ÁLGEBRA III - Práctico 6

(*) Se puede dejar para un repaso.

1. Sea A una matriz 2×2 con entradas reales. Para $X, Y \in \mathbf{R}^{2\times 1}$ sea
$$f_A(X,Y) = Y^t A X.$$
Probar que f_A es un producto interno si y sólo si $A = A^t$, $A_{11} > 0, A_{22} > 0$ y $\det A > 0$.

2. Sea $\mathbf{C}^3$ con el produto interno canónico. Encontrar una base ortonormal del subespacio generado por $\beta_1 = (1, 0, i)$ y $\beta_2 = (2, 1, 1 + i)$.

3. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ortonormal de V. Probar que para todo par de vectores α y β en V se cumple
$$(\alpha|\beta) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha|\alpha_k)\overline{(\beta|\alpha_k)}.$$

4. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita, y sea $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ortonormal de V. Sea T un operador lineal en V y A la matriz de T en la base B. Probar que
$$A_{ij} = (T\alpha_j|\alpha_i).$$

5. Consideremos $\mathbf{C}^2$ con el producto interno usual. Sea T el operador lineal dado por $Te_1 = (1, 2)$, $Te_2 = (i, -1)$. Si $\alpha = (x_1, x_2)$, encontrar $T^*\alpha$.

6. Sea T el operador lineal en $\mathbf{C}^2$ definido por $Te_1 = (1 + i, 2)$, $Te_2 = (i, i)$. Usando el producto interno usual encontrar la matriz de T^* en la base ordenada canónica. ¿ T conmuta con T^*?

7. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y T un operador lineal sobre V. Demostrar que la imagen de T^* es el complemento ortogonal del espacio nulo de T.

8. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y T un operador lineal sobre V. Si T es inversible, probar que T^* es inversible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

9. Sean V un e. p. i. y β y γ vectores dados de V. Demostrar que $T\alpha = (\alpha|\beta)\gamma$ define un operador lineal sobre V. Demostrar que T tiene un adjunto y dar explícitamente T^*.

   Supongamos ahora que $V = \mathbf{C}^n$ con el producto interno canónico, $\beta = (y_1, \ldots, y_n)$ y $\gamma = (x_1, \ldots, x_n)$. ¿Cuál es el elemento j, k de la matriz de T en la base ordenada canónica? ¿Cuál es el rango de esta matriz?

10. Probar que el producto de dos operadores autoadjuntos es autoadjunto si, y sólo si, los dos operadores conmutan.

11. (a) Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbf{R}$ de grado menor o igual que 3 con el producto interno
$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$
    (b) Si t es un número real, hallar el polinomio g_t de V tal que $(f|g_t) = f(t)$ para todo f de V.

(c) Sea D el operador derivación sobre V. Hallar D^*.

12. Sea V el espacio de las matrices complejas $n \times n$ con el p. i. $(A|B) = \text{tr}\,(AB^*)$. Sea P una matriz dada en V, inversible, y sea T_P el operador lineal sobre V definido por $T_P(A) = P^{-1}AP$. Hallar el adjunto de T_P.

13. **(*)** Sea V un e. p. i. de dimensión finita y sea E un operador lineal idempotente sobre V; es decir, $E^2 = E$. Demostrar que E es autoadjunto si y sólo si $EE^* = E^*E$.

14. Sea V un espacio producto interno complejo de dimensión finita, y sea T un operador en V. Probar que T es autoadjunto si y sólo si $(T\alpha|\alpha)$ es real para todo α en V.

15. Encontrar una matriz unitaria que no sea ortogonal, y una ortogonal que no sea unitaria.

16. Sea V el espacio de matrices complejas $n \times n$ con el producto interno $(A|B) = tr(AB^*)$. Para cada M sea T_M el operador multiplicar a izquierda por M. Probar que T_M es unitario si y sólo si M es una matriz unitaria.

17. Si θ es un número real, demostrar que las siguientes matrices son unitariamente equivalentes

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

18. Probar que una matriz real 2×2 es ortogonal si y sólo si es alguna de las siguientes

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

donde $a^2 + b^2 = 1$.

19. Probar que una matriz 2×2, A es unitaria si y sólo si es de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}$$

donde θ es un número real y a y b son números complejos tales que $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

20. **(*)** Sea $\mathbf{C}$ considerado como espacio vectorial real.
   (a) Probar que $(\alpha|\beta) = Re(\alpha\overline{\beta})$ define un producto interno en V.
   (b) Dar un isomorfismo de espacios producto interno entre V y $\mathbf{R}^2$ con el producto interno canónico.
   (c) Para cada $\gamma \in V$, sea M_γ el operador definido por $M_\gamma(\alpha) = \gamma\alpha$. Probar que $(M_\gamma)^* = M_{\overline{\gamma}}$.
   (d) ¿Para qué números complejos γ es M_γ autoadjunta?
   (e) ¿Para cuáles γ es M_γ unitaria?
   (f) Encontrar la matriz de M_γ en la base $\{1, i\}$.
   (g) Si T es un operador lineal en V, hallar condiciones necesarias y suficientes para T para que sea un M_γ.

21. **(*)** Sea $V = \mathbf{R}^2$ con el producto interno canónico. Si U es un operador unitario sobre V, probar que la matriz de U en la base ordenada canónica es alguna de las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

para algún θ real. Sea U_θ el operador correspondiente a la primera matriz, o sea la rotación de ángulo θ.

(a) ¿Qúe es $U_\theta U_\alpha$?

(b) Probar que $U_\theta^* = U_{-\theta}$.

(c) Sea β un número real fijo, y sea $B = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ la base ortonormal que se obtiene al rotar la base canónica en un ángulo β. ¿Cúal es la matriz de U_θ en la base B?

22. **(*)** Sea V un e. p. i. de dimensión finita. Para cada α, β en V, sea $T_{\alpha,\beta}$ el operador lineal en V definido por $T_{\alpha,\beta}(\gamma) = (\gamma|\beta)\alpha$. Demostrar que

(a) $T^*_{\alpha,\beta} = T_{\beta,\alpha}$.

(b) $\text{traza}(T_{\alpha,\beta}) = (\alpha|\beta)$.

(c) $T_{\alpha,\beta}T_{\gamma,\delta} = T_{\alpha,(\beta|\gamma)\delta}$.

(d) ¿En qué condiciones es $T_{\alpha,\beta}$ autoadjunto?