

GRUPOS DE COXETER Y SU COMBINATORIA

IVÁN ANGIOÑO

RESUMEN. Estudiaremos los grupos de Coxeter partiendo de sus propiedades asociadas a la función longitud y expresiones reducidas para un conjunto de generadores fijo. Introduciremos dos órdenes parciales entre los elementos del grupo y daremos su relación también con las expresiones reducidas. Finalmente introduciremos el conjunto de raíces asociado a un grupo de Coxeter y parte de su utilidad para obtener resultados sobre el grupo.

ÍNDICE

Introducción	3
1. Grupos de Coxeter: definición, ejemplos, propiedades	4
1.1. Definiciones y propiedades básicas	4
1.2. Ejemplos clásicos	6
1.3. Propiedades de intercambio y de supresión	7
1.4. Caracterización de los grupos de Coxeter	10
1.5. Subgrupos parabólicos	12
Ejercicios	13
2. Orden de Bruhat, orden débil y expresiones reducidas	13
2.1. Orden de Bruhat: propiedades básicas	14
2.2. Grupos finitos: algunas propiedades	16
2.3. Orden débil	17
Ejercicios	18
3. Representaciones lineales y raíces	18
3.1. Representación lineal y matriz de Coxeter	19
3.2. Raíces. Reflexiones	20
Ejercicios	22
Referencias	23

INTRODUCCIÓN

Una de las cuestiones que más llama la atención de las matemáticas es, a mi juicio, la traducción de un problema de un área en un problema de otro área, a veces completamente diferente, para simplificar notoriamente la obtención de la respuesta que se busca. Un ejemplo claro está relacionado con los grupos de Lie. En primer lugar se traducen varias preguntas sobre su comportamiento a preguntas sobre el álgebra de Lie asociada, y el problema inicialmente geométrico/análítico se traduce en un problema algebraico. En el caso de algunas de esas álgebras podemos considerar un grupo asociado, el grupo de Weyl, generado por elementos de orden 2 y satisfaciendo algunas

2010 *Mathematics Subject Classification*. 20F05, 20F55.

El trabajo del autor está parcialmente financiado por los siguientes organismos: CONICET, FONCyT-ANPCyT, Secyt (UNC).

propiedades especiales, lo cual traduce parte del problema a estudiar en otro problema algebraico, pero referido a la teoría de grupos. Sin embargo, en este contexto aparecen los grupos de Coxeter, que generalizan esta idea y traducen nuestras preguntas al ámbito combinatorio.

Y aquí aparece otra cuestión importante: el desarrollo de una teoría como la de grupos de Coxeter, que vio la luz generalizando los grupos de Weyl, tiene consecuencias fundamentales en otras áreas de la matemática. En este caso, además de su aplicación a la teoría de Lie, los grupos de Coxeter y su rica combinatoria tienen un fuerte impacto en problemas algorítmicos, topológicos y algebraicos de distinta índole, algunos de ellos de gran dificultad como los asociados a los polinomios de Kazhdan-Lusztig, ver [1, 4].

En estas notas descubriremos la teoría básica asociada a estos grupos. En primer lugar daremos su definición y mostraremos algunos ejemplos conocidos que resultan ser grupos de Coxeter. Estudiaremos sus primeras propiedades, tales como la propiedad de Intercambio o la propiedad de Supresión, que caracterizan al grupo. En la segunda parte, introduciremos el orden de Bruhat y conoceremos una caracterización importante del mismo, así como una descripción de sus intervalos y aplicaciones a grupos de Coxeter finitos. También conoceremos otro orden, el débil, y algunas propiedades. En la última parte mostraremos una representación fiel del grupo, que nos permitirá interpretarlo como un grupo generado por reflexiones en algún espacio vectorial \mathbb{R}^n , las consecuencias de la existencia de dicha representación y la introducción del sistema de raíces asociado.

Notación. \mathbb{N} denotará el conjunto de números naturales, \mathbb{N}_0 el de enteros no negativos y \mathbb{N}_∞ el conjunto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{I}_n denotará el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

Dados a, b elementos de un conjunto A , $\delta_{a,b}$ es el símbolo de Kronecker; es decir, $\delta_{a,b} = 0$ si $a \neq b$, $\delta_{a,b} = 1$ si $a = b$.

Dado un producto ordenado $s_1 \cdots s_n$ de elementos s_i de un grupo, denotaremos

$$s_1 \cdots \widehat{s_{i_1}} \cdots \widehat{s_{i_k}} \cdots s_n, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

al producto ordenado que resulta de quitar s_{i_1}, \dots, s_{i_k} .

1. GRUPOS DE COXETER: DEFINICIÓN, EJEMPLOS, PROPIEDADES

Los grupos de Coxeter se definen a partir de una presentación por generadores y relaciones. A continuación presentaremos dicha definición diferentes ejemplos, desde los más conocidos hasta los relacionados con las diferentes aplicaciones; en efecto, explicaremos algunos de los usos de esta familia de grupos. Finalmente consideraremos las propiedades básicas que tienen estos grupos, relacionadas especialmente con la longitud, y describiremos una familia de subgrupos, que resultan ser también grupos de Coxeter. Los resultados fueron extraídos principalmente de [1, 2], recomendamos fuertemente leer estos libros a quien se interese en el tema.

1.1. Definiciones y propiedades básicas. Consideramos para empezar dos definiciones que nos serán útiles para introducir los grupos de Coxeter.

Definición 1.1. Sea \mathcal{S} un conjunto. $M \in \mathbb{N}_\infty^{\mathcal{S} \times \mathcal{S}}$ es una *matriz de Coxeter* si

- es simétrica, o sea $m_{ij} = m_{ji}$ para todo par de elementos $i, j \in \mathcal{S}$, y
- $m_{ij} = 1$ si y solamente si $i = j$.

Un *diagrama de Coxeter* es un grafo cuyo conjunto de vértices es \mathcal{S} , y cuyas aristas son los conjuntos de dos elementos $\{i, j\}$, con $i \neq j \in \mathcal{S}$ tales que $m_{ij} \geq 3$. Las aristas tales que $m_{ij} \geq 4$ están etiquetadas con $m_{ij} = m_{ji}$.

morfismo de grupos tal que $\Phi|_{\mathcal{S}} = \phi$. Luego, Φ induce un morfismo de grupos $\tilde{\Phi} : \mathbf{W} \rightarrow G$ si y sólo si $N \subseteq \ker \Phi$; i.e., existe $\tilde{\Phi} : \mathbf{W} \rightarrow G$ tal que $\tilde{\Phi} \circ \pi = \Phi$ si y sólo si

$$(1.2) \quad \Phi(s)^2 = e, \quad (\Phi(s)\Phi(t))^{m_{st}} = \Phi((st)^{m_{st}}) = 1, \quad \text{para todo } s, t \in \mathcal{S}.$$

Por ejemplo, $\Phi : F \rightarrow \{\pm 1\}$ definido por $\Phi(s) = -1$ para todo $s \in \mathcal{S}$, induce un morfismo $\tilde{\Phi} : \mathbf{W} \rightarrow \{\pm 1\}$. Notar que $\tilde{\Phi}(w) = (-1)^{\ell(w)}$ para todo $w \in \mathbf{W}$, con lo cual

$$(1.3) \quad \ell(ww') \equiv \ell(w) + \ell(w') \pmod{2} \quad \text{para todo par de elementos } w, w' \in \mathbf{W}.$$

Ejemplo 1.7. Para la primer matriz del Ejemplo 1.1, el grupo de Coxeter es el generado por $s_i, i \in \mathbb{I}_3$, y las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1, & & s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2, \\ s_2s_3s_2s_3s_2 = s_3s_2s_3s_2s_3, & & s_1s_3 = s_3s_1. \end{aligned}$$

Para la segunda matriz, el grupo de Coxeter es el generado por $s_i, i \in \mathbb{I}_4$, y las relaciones:

$$\begin{aligned} s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = s_4^2 = 1, & & s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2, \\ s_1s_3s_1s_3s_1s_3s_1 = s_3s_1s_3s_1s_3s_1s_3, & & s_2s_3 = s_3s_2, \\ s_3s_4 = s_4s_3, & & s_2s_4 = s_4s_2. \end{aligned}$$

1.2. Ejemplos clásicos. A continuación interpretaremos varios grupos *conocidos* como grupos de Coxeter, para algún conjunto de generadores \mathcal{S} adecuado.

Ejemplo 1.8. ($\mathbf{W} = \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2, \{e_1, \dots, e_n\}$), donde e_i es el generador de la i -ésima copia de \mathbb{Z}_2 , es un sistema de Coxeter cuyo grupo es de orden 2^n . Su diagrama de Coxeter consta de n vértices desconectados, pues su matriz de Coxeter es $m_{ii} = 1, m_{ij} = 2$ si $i \neq j$.

Ejemplo 1.9. El grafo completo de n vértices cuyas aristas están etiquetadas con ∞ corresponde al *grupo de Coxeter universal* U_n de rango n . Es el grupo generado por n elementos de orden 2, sin relaciones extras, cuyos elementos son todas las palabras en n letras que no tienen dos letras iguales repetidas.

El nombre proviene del hecho que, si $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ es otro grupo de Coxeter con n generadores, existe un morfismo suryectivo de grupos $U_n \twoheadrightarrow \mathbf{W}$ para cada biyección $\mathbb{I}_n \rightarrow \mathcal{S}$.

Ejemplo 1.10. Recordemos que el *grupo simétrico* \mathbb{S}_n , es decir, el grupo de permutaciones de \mathbb{I}_n , admite una presentación por generadores $s_i, 1 \leq i \leq n-1$ y relaciones:

$$s_i^2 = 1, \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \quad s_i s_j = s_j s_i \text{ si } |i-j| \geq 2,$$

donde $s_i = (i, i+1)$ es la biyección que permuta los elementos i e $i+1$, y por lo tanto tiene orden 2. En consecuencia, su matriz de Coxeter tiene como entradas $m_{ii} = 1, m_{i, i\pm 1} = 3, m_{ij} = 2$ si $|i-j| \geq 2$, y su diagrama de Coxeter es:

$$\circ^{s_1} \text{ --- } \circ^{s_2} \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ^{s_{n-1}}.$$

Ejemplo 1.11. Si consideramos el diagrama de Coxeter infinito:

$$\circ^{s_1} \text{ --- } \circ^{s_2} \text{ --- } \circ^{s_3} \text{ --- } \circ^{s_4} \text{ --- } \dots$$

el grupo correspondiente es el de biyecciones de \mathbb{N} que mueven a lo sumo una cantidad finita de elementos. Es decir, el conjunto de biyecciones $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \sigma(n) \neq n\}$ es finito. El mismo admite una presentación por generadores $s_i, i \geq 1$ y relaciones como en el caso de \mathbb{S}_n .

Ejemplo 1.12. Supongamos ahora que tenemos un conjunto de cartas numeradas de 1 a n , donde en la parte superior de la j -ésima carta se escribe $+j$, y en la parte inferior $-j$. Nuestro nuevo grupo \mathbb{S}_n^B consta de todas las formas de ordenar las cartas, pudiendo poner hacia arriba $+j$ o $-j$ para cada carta. Así, un elemento del grupo es una permutación de \mathbb{I}_n junto con la información de los signos, es decir una función $\mathbb{I}_n \rightarrow \{+, -\}$; luego, $|\mathbb{S}_n^B| = 2^n \cdot n!$. Podemos probar que el grupo \mathbb{S}_n^B está generado por las mismas s_i , $1 \leq i \leq n-1$ (las biyecciones que cambian de lugar las cartas de las posiciones i e $i+1$, sin modificar la cara que está hacia arriba) y s_0 , el elemento que voltea la carta que está en la parte superior de la pila. Es claro que $s_0 s_i = s_i s_0$ para cada $i > 1$, mientras que $s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0$, pues ambas operaciones son:

$$(+1, +2, +3, \dots, +n) \mapsto (-1, -2, +3, \dots, +n).$$

En consecuencia, el diagrama de Coxeter de \mathbb{S}_n^B es:

$$\circ^{s_0} \xrightarrow{4} \circ^{s_1} \text{ --- } \circ^{s_2} \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ^{s_{n-1}}.$$

Este grupo admite un subgrupo \mathbb{S}_n^D que consiste de todos los movimientos de la pila que rotan un número par de cartas. Ahora, $s'_0 = s_0 s_1 s_0$ es la simetría

$$(+1, +2, +3, \dots, +n) \mapsto (-2, -1, +3, \dots, +n),$$

que toma las dos primeras cartas como un bloque y las voltea. Notar que $s'_0 s_2 s'_0 = s_2 s'_0 s_2$, $s'_0 s_1 = s_1 s'_0$, por lo cual el diagrama de Coxeter de \mathbb{S}_n^D es:

$$\begin{array}{c} \circ^{s'_0} \\ | \\ \circ^{s_1} \text{ --- } \circ^{s_2} \text{ --- } \dots \text{ --- } \circ^{s_{n-1}}. \end{array}$$

Ejemplo 1.13. Consideremos dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 en \mathbb{R}^2 que pasan por el origen tal que el ángulo entre ellas es π/m , con $m \geq 2$. Denotamos por r_1 y r_2 a las reflexiones ortogonales por ℓ_1 y ℓ_2 , respectivamente, de modo que $r_1 r_2$ es la rotación de \mathbb{R}^2 por un ángulo $2\pi/m$. Luego, $(r_1 r_2)^m = \text{id}$. Sea D_m el grupo generado por r_1 y r_2 . Podemos identificarlo con el grupo de simetrías de un m -ágono regular, de modo que es un grupo finito, conocido como *grupo diedral*. Dicho grupo tiene orden $2m$, pues consta de todas las rotaciones del plano por un ángulo de $2\pi k/m$, $0 \leq k < m$, seguido o no de la rotación r_1 .

Si consideramos el diagrama de Coxeter $\circ^{s_1} \xrightarrow{m} \circ^{s_2}$, el correspondiente grupo de Coxeter $I_2(m)$ está presentado por generadores s_1, s_2 , y relaciones $s_1^2 = s_2^2 = e$, $(s_1 s_2)^m = e$, de modo que existe un morfismo suryectivo $\phi: I_2(m) \rightarrow D_m$ determinado por $s_i \mapsto r_i$. Ahora, de acuerdo a la Observación 1.5, todo elemento de $I_2(m)$ puede expresarse como una palabra $s_1 s_2 s_1 \dots$ o $s_2 s_1 s_2 \dots$, de longitud a lo sumo m , de modo que $|I_2(m)| \leq 2m = |D_m|$. Por lo tanto, ϕ es un isomorfismo, y cada grupo diedral es un grupo de Coxeter.

Notar que si el ángulo entre ℓ_1 y ℓ_2 no es de la forma $q\pi$, $q \in \mathbb{Q}$, entonces $r_1 r_2$ tiene orden infinito, y así obtenemos el grupo de Coxeter $I_2(\infty)$ asociado al diagrama de Coxeter $\circ^{s_1} \xrightarrow{\infty} \circ^{s_2}$.

Podemos obtener de modo análogo los grupos de simetría de los poliedros regulares, o más generalmente (es decir, en dimensiones más grandes) de los polítopos regulares en \mathbb{R}^d , $d \geq 3$. En \mathbb{R}^3 los poliedros regulares y sus correspondientes grupos de simetría

son: tetraedro, con grupo de tipo A_3 , es decir \mathbb{S}_4 ; cubo y octaedro, con grupo B_3 , es decir \mathbb{S}_3^B ; dodecaedro e icosaedro, con grupo H_3 , que es el correspondiente al diagrama

$$\circ \overset{5}{\text{---}} \circ \text{---} \circ .$$

1.3. Propiedades de intercambio y de supresión. Fijemos $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ un sistema de Coxeter. Sean:

$$(1.4) \quad \mathcal{T} := \{wsw^{-1} : s \in \mathcal{S}, w \in \mathbf{W}\}, \quad \mathcal{R} := \{1, -1\} \times \mathcal{T}.$$

Dada $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ una sucesión finita de elementos de \mathcal{S} , definimos

$$(1.5) \quad \Xi(\mathbf{s}) := (t_1, \dots, t_n), \quad \text{donde } t_j = (s_1 \cdots s_{j-1})s_j(s_{j-1} \cdots s_1) \in \mathcal{T}, j \in \mathbb{I}_n.$$

Notar que $t_1 = s_1$, y además $s_1 \cdots s_n = t_n \cdots t_1$. Para cada $t \in \mathcal{T}$, denotaremos $n(\mathbf{s}, t)$ al número de enteros $j \in \mathbb{I}_n$ tales que $t_j = t$.

Lema 1.14. (i) Para cada $w \in \mathbf{W}$ y $t \in \mathcal{T}$, la paridad de $n(\mathbf{s}, t)$ no depende de la sucesión de elementos \mathbf{s} tal que $w = s_1 \cdots s_n$.

Así, denotaremos $\eta(w, t) := (-1)^{n(\mathbf{s}, t)}$, para cualquier sucesión \mathbf{s} como antes.

(ii) Sea $\mathbb{S}(\mathcal{R})$ el grupo de permutaciones de \mathcal{R} . Para cada $w \in \mathbf{W}$, sea $\mathbf{U}_w : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ la función definida por

$$(1.6) \quad \mathbf{U}_w(\epsilon, t) := (\epsilon\eta(w^{-1}, t), wtw^{-1}), \quad \epsilon = \pm 1, t \in \mathcal{T}.$$

Luego, $\mathbf{U} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{S}(\mathcal{R})$, $w \mapsto \mathbf{U}_w$ es un morfismo de grupos.

Demostración. Sea F el grupo libre generado por \mathcal{S} como en la Observación 1.6. Definimos $U : F \rightarrow \mathbb{S}(\mathcal{R})$ como el morfismo de grupos determinado por $s \mapsto U_s$, $s \in \mathcal{S}$,

$$U_s(\epsilon, t) = (\epsilon(-1)^{\delta_{s,t}}, sts), \quad \epsilon = \pm 1, t \in \mathcal{T}.$$

Se deduce fácilmente que $U_s^2 = \text{id}_{\mathcal{R}}$, de modo que el morfismo está bien definido; es decir, en principio U_s define una función de \mathcal{R} en sí mismo, la cual resulta ser una biyección por la relación anterior.

Dada $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$, sean $w = s_n \cdots s_1$, con lo cual $U_{\mathbf{s}} = U_{s_n} \circ \cdots \circ U_{s_1}$. Probaremos por inducción en n que $U_{\mathbf{s}}(\epsilon, t) = (\epsilon(-1)^{n(\mathbf{s}, t)}, wtw^{-1})$.

Si $n = 0, 1$, la prueba es directa. Si $n \geq 2$, sean $\widehat{\mathbf{s}} = (s_1, \dots, s_{n-1})$, $\widehat{w} = s_{n-1} \cdots s_1$; así, $w = s_n \widehat{w}$. Por hipótesis inductiva,

$$U_{\mathbf{s}}(\epsilon, t) = U_{s_n} \circ U_{\widehat{\mathbf{s}}}(\epsilon, t) = U_{s_n} \left(\epsilon(-1)^{n(\widehat{\mathbf{s}}, t)}, \widehat{w}t\widehat{w}^{-1} \right) = \left(\epsilon(-1)^{n(\widehat{\mathbf{s}}, t) + \delta_{s_n, \widehat{w}t\widehat{w}^{-1}}}, wtw^{-1} \right).$$

Así, basta probar que $n(\mathbf{s}, t) = n(\widehat{\mathbf{s}}, t) + \delta_{s_n, \widehat{w}t\widehat{w}^{-1}}$, que sigue de $\Xi(\mathbf{s}) = (\Xi(\widehat{\mathbf{s}}), \widehat{w}^{-1}s_n\widehat{w})$.

Consideremos $s, t \in \mathcal{S}$ tales que $m_{st} < \infty$. Denotamos $\tilde{p} = st \in F$, y p a su imagen en \mathbf{W} . Sea $\mathbf{s} = \{s, t, s, t, \dots, s, t\}$, sucesión de longitud $2m_{st}$. Notar que p tiene orden m_{st} y los elementos t_j asociados son $t_j = p^{j-1}s$. Luego, $t_1, \dots, t_{m_{st}}$ son todos distintos, y $t_{m_{st}+j} = t_j$, para todo $1 \leq j \leq m_{st}$. Así, $n(\mathbf{s}, t) \in \{0, 2\}$, de donde $U_{\tilde{p}^{m_{st}}} = (U_s \circ U_t)^{m_{st}} = \text{id}_{\mathcal{R}}$. De acuerdo a la Observación 1.6, U induce un morfismo $\mathbf{U} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{S}(\mathcal{R})$ tal que $\mathbf{U} \circ \pi = U$. Es decir, si $w \in \mathbf{W}$ se expresa como $w = s_1 \cdots s_n$, entonces $U_w(\epsilon, t) = (\epsilon(-1)^{n(\mathbf{s}, t)}, wtw^{-1})$, de modo que $(-1)^{n(\mathbf{s}, t)}$ no depende de la expresión elegida, y probamos (i) y (ii) simultáneamente. \square

Podemos ahora caracterizar las expresiones reducidas a partir de los conjuntos $\Xi(\mathbf{s})$.

Lema 1.15. $w = s_1 \cdots s_n$ es una expresión reducida de w si y sólo si $t_i \neq t_j$, para todo par $i \neq j \in \mathbb{I}_n$.

Demostración. Dados \mathbf{s} , $\Xi(\mathbf{s})$, w como antes, sea $\mathcal{T}_w := \{t \in \mathcal{T} : \eta(w, t) = -1\}$. Notar que $\mathcal{T}_w \subseteq \{t_1, \dots, t_n\}$ para cualquier expresión de w , con lo cual se deduce que $|\mathcal{T}_w| \leq \ell(w)$, al considerar una expresión reducida.

Ahora, si todos los t_i 's son diferentes, entonces $n(\mathbf{s}, t)$ vale 1 si $t = t_i$, y 0 si $t \notin \{t_1, \dots, t_n\}$. Así, $\mathcal{T}_w = \{t_1, \dots, t_n\}$, con lo cual $n = |\mathcal{T}_w| \geq \ell(w)$. Luego, $n = \ell(w)$; es decir, la expresión es reducida.

Ahora si $t_i = t_j$ para $i < j$, se tiene que $s_i = u s_j u^{-1}$, donde $u = s_{i+1} \cdots s_{j-1}$, y así

$$w = s_1 \cdots s_{i-1} s_i u s_j s_{j+1} \cdots s_n = s_1 \cdots s_{i-1} (s_i^2 u) s_{j+1} \cdots s_n = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_n;$$

es decir, \mathbf{s} no da lugar a una expresión reducida de w . \square

Definición 1.16. Dados un grupo \mathbf{W} y un conjunto de generadores \mathcal{S} , se dice que $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ satisface la *propiedad de intercambio fuerte* si vale la siguiente afirmación.

PIF: Sean $w \in \mathbf{W}$ y $t \in \mathcal{T}$ tales que $\ell(tw) \leq \ell(w)$. Para cada sucesión $\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_n\}$ de elementos de \mathcal{S} tales que $w = s_1 \dots s_n$, existe $j \in \mathbb{I}_n$ tal que

$$t s_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1} s_j.$$

Se dice que $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ satisface la *propiedad de intercambio* si vale lo siguiente.

PI: Sean $w \in \mathbf{W}$ y $s \in \mathcal{S}$ tales que $\ell(sw) \leq \ell(w) = n$. Para cada expresión reducida $w = s_1 \cdots s_n$, existe $j \in \mathbb{I}_n$ tal que $ss_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1} s_j$.

Se dice que $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ satisface la *propiedad de supresión* si vale lo siguiente.

PS: Sean $w \in \mathbf{W}$ y $\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_n\}$ una sucesión de elementos de \mathcal{S} tales que $w = s_1 \cdots s_n$, $\ell(w) < n$. Existen $1 \leq i < j \leq n$ tales que

$$w = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_n.$$

Notar que, tal como lo indican sus nombres, **PIF** \Rightarrow **PI**. Veremos ahora que los sistemas de Coxeter satisfacen ambas propiedades.

Teorema 1.17. *Todo sistema de Coxeter $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ satisface la PIF.*

Demostración. Dados $w \in \mathbf{W}$ y $t \in \mathcal{T}$, probaremos en primer lugar que:

Afirmación 1.1. $\ell(tw) < \ell(w)$ si y sólo si $\eta(w, t) = -1$.

Asumimos primero que $\eta(w, t) = -1$, y fijemos $w = s_1 \cdots s_m$ una expresión reducida. Luego, $t \in \Xi(s_1, \dots, s_m)$, pues t aparece un número impar de veces, o lo que es equivalente, $t = (s_1 \cdots s_{j-1}) s_j (s_{j-1} \cdots s_1)$ para algún j . Luego,

$$\ell(tw) = \ell(s_1 \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_m) < \ell(w) = m.$$

Ahora, si $\eta(w, t) = 1$, el Lema 1.14 nos dice que:

$$\mathbf{U}_{(tw)^{-1}}(\epsilon, t) = \mathbf{U}_{w^{-1}} \mathbf{U}_t(\epsilon, t) = \mathbf{U}_{w^{-1}}(-\epsilon, t) = (-\epsilon \eta(w, t), tw^{-1}) = (-\epsilon, tw^{-1}).$$

Así $\eta(tw, t) = -1$, con lo cual la prueba anterior dice que $\ell(w) = \ell(t(tw)) < \ell(tw)$.

Si $\ell(tw) < \ell(w)$, se tiene que $\eta(w, t) = -1$; si $w = s_1 \cdots s_n$ es una expresión cualquiera, se tiene que $t = (s_1 \cdots s_{j-1}) s_j (s_{j-1} \cdots s_1)$ para algún j , y se satisface la **PIF**. \square

Corolario 1.18. *Sean $w = s_1 \cdots s_n$ una expresión reducida y $t \in \mathcal{T}$. Son equivalentes:*

1. $\ell(tw) < \ell(w)$,
2. $tw = s_1 \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_n$, para algún $j \in \mathbb{I}_m$,
3. $t = s_1 \cdots s_{j-1} s_j s_{j-1} \cdots s_1$ para algún $j \in \mathbb{I}_m$.

Más aún, j está unívocamente determinado en los ítems anteriores.

Demostración. La equivalencia entre 1. y 2. se sigue del Teorema 1.17. Además, se deduce fácilmente que 2. vale sii vale 3. y la unicidad se deduce del Lema 1.15. \square

Definición 1.19. Sea $w \in \mathbf{W}$. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_L(w) &:= \{t \in \mathcal{T} : \ell(tw) < \ell(w)\}, & \mathcal{D}_L(w) &:= \mathcal{T}_L(w) \cap \mathcal{S}, \\ \mathcal{T}_R(w) &:= \{t \in \mathcal{T} : \ell(wt) < \ell(w)\}, & \mathcal{D}_R(w) &:= \mathcal{T}_R(w) \cap \mathcal{S}.\end{aligned}$$

$\mathcal{T}_L(w)$ (resp. $\mathcal{T}_R(w)$) es el conjunto de *reflexiones asociadas a izquierda* (resp. *a derecha*), y $\mathcal{D}_L(w)$ (resp. $\mathcal{D}_R(w)$) es el conjunto *descendente a izquierda* (resp. *a derecha*).

Sea $w = s_1 \cdots s_n$ una expresión reducida. Notar que, de acuerdo al Corolario 1.18,

$$\mathcal{T}_L(w) = \{s_1 \cdots s_{j-1} s_j s_{j-1} \cdots s_1 \mid j \in \mathbb{I}_n\}$$

y como el Lema 1.15 nos dice que todos estos elementos son diferentes, se tiene que

$$(1.7) \quad |\mathcal{T}_L(w)| = \ell(w).$$

Además, se verifica que

$$(1.8) \quad \mathcal{T}_R(w) = \mathcal{T}_L(w^{-1}), \quad \mathcal{D}_R(w) = \mathcal{D}_L(w^{-1}).$$

Daremos a continuación otras consecuencias del Teorema 1.17.

Corolario 1.20. Sean $s \in \mathcal{S}$, $w \in \mathbf{W}$. Se verifican:

1. $s \in \mathcal{D}_L(w)$ sii existe una expresión reducida de w comenzando en s ,
2. $s \in \mathcal{D}_R(w)$ sii existe una expresión reducida de w finalizando en s .

Demostración. Basta con probar 1., pues 2. se deduce de este ítem y (1.8).

Para probar 1., si $s \in \mathcal{D}_L(w)$, el Corolario 1.18 dice que $sw = s_1 \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_n$ para algún j y una expresión reducida de w , de donde $w = s s_1 \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_n$ es una expresión reducida. La definición del conjunto $\mathcal{D}_L(w)$ implica la recíproca. \square

Proposición 1.21. $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ satisface la **PS**.

Demostración. Sea $w = s_1 \cdots s_m$, $\ell(w) < m$. Elegimos el mayor i tal que $s_i s_{i+1} \cdots s_m$ no es reducida. Así, $\ell(s_i s_{i+1} \cdots s_m) < \ell(s_{i+1} \cdots s_m)$, de modo que, por el Teorema 1.17, existe $j > i$ tal que $s_i s_{i+1} \cdots s_m = s_{i+1} \cdots \widehat{s}_j \cdots s_m$, con lo cual $w = s_1 \cdots s_m = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_m$. \square

De esta propiedad se derivan las siguientes consecuencias:

Corolario 1.22. 1. Cada expresión $w = s_1 \cdots s_m$ contiene una expresión reducida que se obtiene quitando una cantidad par de letras.

2. Si $w = s_1 \cdots s_m = s'_1 \cdots s'_m$ son dos expresiones reducidas, entonces

$$\{s_1, \dots, s_m\} = \{s'_1, \dots, s'_m\}.$$

3. Ningún generador de Coxeter $s \in \mathcal{S}$ puede expresarse en términos de los restantes generadores; luego, \mathcal{S} es un conjunto minimal de generadores para \mathbf{W} .

Demostración. La primer afirmación sigue de modo inmediato de la Proposición anterior, mientras que la última sigue de la segunda afirmación.

Probaremos la segunda afirmación por inducción en $\ell(w)$. Para ello, el caso $\ell(w) = 1$ es trivial. Supongamos ahora que vale para $m-1 \geq 1$, y sea w elemento de longitud m , para el cual consideramos dos expresiones reducidas distintas $w = s_1 \cdots s_m = s'_1 \cdots s'_m$. Como $\ell(s'_1 w) = m-1 < \ell(w)$, existe $j \in \mathbb{I}_m$ tal que $s'_1 s_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_j$, de acuerdo al Teorema 1.17, con lo cual $s'_1 = s_1 \cdots s_{j-1} s_j s_{j-1} \cdots s_1$. De acuerdo a la

primer afirmación de este corolario, podemos obtener una expresión reducida de s'_1 a partir de $s_1 \cdots s_{j-1} s_j s_{j-1} \cdots s_1$ borrando una cantidad par de elementos, de modo que nos quedaremos finalmente con un único elemento: $s'_1 = s_l$ para algún $l \in \mathbb{I}_m$. Además,

$$w' = s'_2 \cdots s'_m = s'_1 s_1 \cdots s_m = s_1 \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_m$$

tiene longitud $m - 1$, y se aplica hipótesis inductiva para ver que $\{s'_2, \dots, s'_m\} \subseteq \{s_1, \dots, s_m\}$. Luego, $\{s_1, \dots, s_m\} \supseteq \{s'_1, \dots, s'_m\}$, y el resultado se completa intercambiando los roles de las expresiones reducidas. \square

1.4. Caracterización de los grupos de Coxeter. Luego de verificar que todo grupo de Coxeter satisface las **PS** y **PI**, veremos la fortaleza de estos enunciados, pues caracterizan los grupos de Coxeter. Más exactamente, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.23. *Sea \mathbf{W} un grupo y \mathcal{S} un conjunto de generadores de orden 2. Son equivalentes:*

- (i) $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ es un sistema de Coxeter,
- (ii) $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ satisface la Propiedad de Intercambio,
- (iii) $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ satisface la Propiedad de Supresión.

Demostración. (ii) \Rightarrow (iii) La prueba de la Proposición 1.21 no utiliza la hipótesis de tener un sistema de Coxeter sino simplemente que satisface la **PI**.

(iii) \Rightarrow (ii) Sea $w = s_1 \cdots s_n$ una expresión reducida, y $s \in \mathcal{S}$ tal que $\ell(sw) < n = \ell(w)$. Como asumimos que vale la **PS**, podemos quitar dos letras de $ss_1 \cdots s_n$ y obtener una nueva expresión de sw . Si ninguna de esas letras es s , entonces $sw = ss_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_n$ para algunos $i < j \in \mathbb{I}_n$, con lo cual $w = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_n$ tiene longitud menor o igual que $n - 2$, que es un absurdo. Así, una de las dos letras a quitar es s , con lo cual $sw = ss_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots s_n$ para algún $i \in \mathbb{I}_n$, y $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ satisface la **PI**.

(i) \Rightarrow (ii) Sigue del Teorema 1.17.

(ii) \Rightarrow (i) Sea $s_1 \cdots s_n = e$ una relación en $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$, un grupo generado por elementos de orden 2 que satisfacen la **PI**; es decir, si consideramos el morfismo de grupos $\phi : F \rightarrow \mathbf{W}$, donde F es el grupo libre generado por \mathcal{S} , consideramos $s_1 \cdots s_n \in \ker \phi$.

Notar que $r = 2k$ para algún k , dado que ya vimos que vale **PI** \Leftrightarrow **PS**. Así escribimos la relación como $s_1 \cdots s_k = s'_1 \cdots s'_k$. Probaremos por inducción en k que esta relación se deriva de relaciones del tipo $(ss')^{m_{ss'}} = e$; o sea, $\ker \phi$ está generado por $(ss')^{m_{ss'}}$ y s^2 . Si $k = 1$, entonces $s_1 = s'_1$. Asumimos ahora que todo elemento de $\ker \phi$ expresado por menos de $2k$ elementos pertenece al subgrupo N generado por $(ss')^{m_{ss'}}$ y s^2 .

- Si $s_1 \cdots s_k$ no es reducida, existe $i \in \mathbb{I}_k$ tal que $s_{i+1} \cdots s_k$ es reducida, pero $s_i \cdots s_k$ no lo es. Aplicando la **PI**, existe $j > i$ tal que $s_{i+1} \cdots s_k = s_i s_{i+1} \cdots \widehat{s}_j \cdots s_k$. Como esta relación tiene longitud menor que $2k$, está en N , lo cual nos lleva a la relación

$$s_1 \cdots s_i s_i s_{i+1} \cdots \widehat{s}_j \cdots s_k = s'_1 \cdots s'_k,$$

de la cual podemos quitar s_i^2 , y por lo tanto está en N por hipótesis inductiva, y por lo tanto la relación inicial también lo está.

- Si $s_1 \cdots s_k$ es reducida, asumimos que $s_1 \neq s'_1$, pues en tal caso las quitamos y obtenemos una relación de longitud menor. En otro caso, existe $i \in \mathbb{I}_k$ tal que $s_1 \cdots s_i = s'_1 s_1 \cdots s_{i-1}$, a partir de la cual obtenemos $s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots s_k = s'_2 \cdots s'_k$, que por hipótesis inductiva pertenece a N . Si $i < k$ la prueba está completa, pues la relación está en N a partir de reemplazar la igualdad anterior en la original.

Si $i = k$, se tiene $s'_1 s_1 \cdots s_{k-1} = s'_1 s'_2 \cdots s'_k$, con lo cual basta probar que

$$s'_1 s_1 \cdots s_{k-1} = s_1 s_2 \cdots s_k$$

es una relación en N . Repitiendo el argumento, basta probar que

$$s'_1 s_1 \cdots s_{k-1} = s_1 s'_1 s_1 s_2 \cdots s_{k-2}$$

es una relación en N . Iterando este proceso, lo anterior se reduce a probar que

$$s_1 s'_1 s_1 s'_1 \cdots = s'_1 s_1 s'_1 s_1 \cdots ,$$

la cual se sigue que pertenece a N a partir de $(s_1 s'_1)^{m_{s_1, s'_1}} = e$.

Luego, $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ es un sistema de Coxeter. \square

Veremos aplicaciones de este Teorema en los ejercicios para probar que algunos grupos generados por elementos de orden 2 son efectivamente sistemas de Coxeter.

1.5. Subgrupos parabólicos. A lo largo de esta sección, fijemos \mathcal{X} un subconjunto de \mathcal{S} . Denotaremos $\mathbf{W}_{\mathcal{X}}$ al subgrupo de \mathbf{W} generado por los elementos $s \in \mathcal{X}$. Subgrupos de este tipo se dicen *parabólicos*.

Para cada $w \in \mathbf{W}$, llamamos $\mathcal{X}(w)$ al conjunto de elementos $s \in \mathcal{S}$ que aparecen en una expresión reducida de w ; notar que dicho conjunto no depende de la expresión elegida, de acuerdo al Corolario 1.22.

Proposición 1.24. *Para cada $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}$, se tiene $\mathbf{W}_{\mathcal{X}} = \{w \in \mathbf{W} : \mathcal{X}(w) \subset \mathcal{X}\}$.*

Demostración. Sea $S_{\mathcal{X}} := \{w \in \mathbf{W} : \mathcal{X}(w) \subset \mathcal{X}\}$. De la definición de este conjunto se sigue que $S_{\mathcal{X}} \subseteq \mathbf{W}_{\mathcal{X}}$, con lo cual basta con probar que $S_{\mathcal{X}}$ es un subgrupo. En primer lugar, $\mathcal{X}(w) = \mathcal{X}(w^{-1})$, pues si $w = s_1 \cdots s_n$, entonces $w^{-1} = s_n \cdots s_1$. Luego,

$$w \in S_{\mathcal{X}} \Leftrightarrow \mathcal{X}(w) = \mathcal{X}(w^{-1}) \subseteq \mathcal{X} \Leftrightarrow w^{-1} \in S_{\mathcal{X}}.$$

Por otro lado, sean $w, w' \in S_{\mathcal{X}}$, y $w = s_1 \cdots s_n$, $w' = s'_1 \cdots s'_m$ dos expresiones reducidas. Luego, $ww' = s_1 \cdots s_n s'_1 \cdots s'_m$ es una expresión de ww' , de la cual podemos obtener una expresión reducida quitando algunos elementos (posiblemente ninguno), de acuerdo al Corolario 1.22. Así, $\mathcal{X}(ww') \subseteq \{s_1, \dots, s_n, s'_1, \dots, s'_m\} = \mathcal{X}(w) \cup \mathcal{X}(w') \subseteq \mathcal{X}$, con lo cual $ww' \in S_{\mathcal{X}}$. Por lo tanto, $S_{\mathcal{X}}$ es un subgrupo. \square

Corolario 1.25. $\mathbf{W}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{S} = \mathcal{X}$.

Demostración. Inmediato de la Proposición anterior, pues $\mathcal{X}(s) = \{s\}$. \square

Para cada $w \in \mathbf{W}_{\mathcal{X}}$, denotaremos $\ell_{\mathcal{X}}(w)$ a la longitud de w como elemento de $\mathbf{W}_{\mathcal{X}}$, considerando el conjunto de generadores \mathcal{X} .

Corolario 1.26. *Para cada $w \in \mathbf{W}_{\mathcal{X}}$, $\ell_{\mathcal{X}}(w) = \ell(w)$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.24 y la independencia de la expresión reducida para obtener \mathcal{X}_w . \square

A continuación caracterizaremos los subgrupos $\mathbf{W}_{\mathcal{X}}$. La propiedad más importante es que $\mathbf{W}_{\mathcal{X}}$ es un grupo de Coxeter.

Teorema 1.27. (i) $(\mathbf{W}_{\mathcal{X}}, \mathcal{X})$ es un sistema de Coxeter.

(ii) Si $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ son dos subconjuntos de \mathcal{S} , entonces $\mathbf{W}_{\mathcal{X}} \subset \mathbf{W}_{\mathcal{X}'}$ si y sólo si $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}'$.

(iii) Sea $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de \mathcal{S} , y $\mathcal{X} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{X}_i$. Entonces,

$$\mathbf{W}_{\mathcal{X}} = \bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_{\mathcal{X}_i}.$$

Demostración. (i) $\mathbf{W}_{\mathcal{X}}$ es un grupo generado por elementos de orden 2, con lo cual basta con probar que satisface la **PI**, de acuerdo con el Teorema 1.23. Si $x \in \mathcal{X}$ y $w \in \mathbf{W}_{\mathcal{X}}$ son tales que $\ell_{\mathcal{X}}(xw) \leq \ell_{\mathcal{X}}(w) = n$. A partir del corolario anterior, $\ell(xw) \leq \ell(w) = n$. Si $w = s_1 \cdots s_n$ es una expresión reducida, entonces $s_i \in \mathcal{X}(w) \subseteq \mathcal{X}$ de acuerdo con la Proposición 1.24. Utilizando que \mathbf{W} satisface la **PI**, existe $i \in \mathbb{I}_n$ tal que $xs_1 \cdots s_{i-1} = s_1 \cdots s_i$; así, $(\mathbf{W}_{\mathcal{X}}, \mathcal{X})$ satisface la **PI**.

(ii) Sigue de la Proposición 1.24 y el Corolario 1.25.

(iii) Es inmediato a partir del inciso anterior. \square

A partir del Teorema anterior comprenderemos la relación entre las componentes conexas del diagrama de Coxeter y los correspondientes subgrupos $\mathbf{W}_{\mathcal{X}}$, de acuerdo con el resultado que presentaremos a continuación. Esta relación nos permitirá reducirnos al estudio de grupos de Coxeter con diagrama conexo.

Proposición 1.28. *Sea $(\mathcal{S}_i)_{i \in I}$ una partición de \mathcal{S} tal que $m_{st} = 2$ (es decir, $st = ts$) para cada $s \in \mathcal{S}_i, t \in \mathcal{S}_j, i \neq j$. Entonces, $\mathbf{W} = \prod_{i \in I} \mathbf{W}_{\mathcal{S}_i}$.*

Demostración. Para cada $i \in I$, sea \mathbf{W}'_i el subgrupo generado por todos los $\mathbf{W}_{\mathcal{S}_j}, j \neq i$. Notar que \mathbf{W}'_i es exactamente el grupo generado por $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_i$. El Teorema 1.27 nos dice que $\mathbf{W}_{\mathcal{S}_i} \cap \mathbf{W}'_i = \mathbf{W}_{\emptyset} = \{e\}$. Además, \mathbf{W} está generado por la unión de los $\mathbf{W}_{\mathcal{S}_i}$'s, con lo cual el resultado está probado. \square

Ejercicios.

1. Completar los detalles de los Ejemplos; es decir, probar efectivamente que los ejemplos son grupos de Coxeter y que se satisfacen las relaciones indicadas.
2. Consideramos los siguientes elementos de \mathbb{S}_5 : $a_1 = (12)(34), a_2 = (12)(45), a_3 = (14)(23)$. Probar que $a_i^2 = \text{id}$ y calcular el orden de los 3 productos $a_i a_j, i < j$. Probar que existe un isomorfismo de grupos entre H_3 y \mathbb{S}_5 .
3. El ejercicio anterior muestra que un mismo grupo puede tener más de una estructura como sistema de Coxeter, simplemente eligiendo diferentes conjuntos de generadores. Veremos otro ejemplo. Consideremos el grupo diedral D_6 que tiene 12 elementos, ver el Ejemplo 1.13. Si $\mathcal{S}' = \{r_2, (r_1 r_2)^3, r_2 (r_1 r_2)^3\}$, probar que $(\mathbf{W}, \mathcal{S}')$ es un sistema de Coxeter reducible.
4. Probar que para todo par de elementos $u \neq w \in \mathbf{W}$, se tiene $\mathcal{T}_L(u) \neq \mathcal{T}_L(w)$.
5. Caracterizar \mathcal{T} para cada grupo diedral D_m .
6. Probar que $\mathcal{T}_R(uw) = \mathcal{T}_R(w) \Delta w^{-1} \mathcal{T}_R(u)w$ para todo par de elementos $u, w \in \mathbf{W}$ (donde Δ denota la diferencia simétrica entre los conjuntos).
7. Dados $u, w \in \mathbf{W}$, probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - a) $\ell(uw) = \ell(u) + \ell(w)$,
 - b) $\mathcal{T}_R(w) \cap \mathcal{T}_R(u) = \emptyset$,
 - c) $\mathcal{T}_R(uw) = \mathcal{T}_R(w) \cup w^{-1} \mathcal{T}_R(u)w$,
 - d) $\mathcal{T}_R(uw) = \mathcal{T}_R(w) \uplus w^{-1} \mathcal{T}_R(u)w$ (es decir, la unión es disjunta).
8. Dado $x \in \mathbb{S}_n$, definimos el número de inversión de x como:

$$\text{inv}(x) := |\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, x(i) > x(j)\}|.$$

- a) Probar que $\text{inv}(xs_i) = \begin{cases} \text{inv}(x) - 1, & x(i) > x(i+1); \\ \text{inv}(x) + 1, & x(i) < x(i+1). \end{cases}$
- b) Usar el hecho anterior para concluir que $\ell(x) = \text{inv}(x)$ (definimos ℓ para el conjunto de generadores $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$).
- c) Probar que $\mathcal{D}_R(x) = \{s_i \in \mathcal{S} : x(i) > x(i+1)\}$.

d) Concluir que $(\mathbb{S}_n, \mathcal{S})$ satisface la propiedad del intercambio, y por lo tanto es un sistema de Coxeter.

9. Dado $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}$, sea $\mathcal{T}_{\mathcal{X}} := \{ws w^{-1} : w \in \mathbf{W}_{\mathcal{X}}, s \in \mathcal{X}\}$. Probar que $\mathcal{T}_{\mathcal{X}} = \mathcal{T} \cap \mathbf{W}_{\mathcal{X}}$.

2. ORDEN DE BRUHAT, ORDEN DÉBIL Y EXPRESIONES REDUCIDAS

Introduciremos a continuación un orden parcial muy importante en el conjunto de elementos de un grupo de Coxeter, llamado orden de Bruhat. También mencionaremos algunas propiedades relacionadas con el orden débil. Veremos que el orden de Bruhat está relacionado con todas las subpalabras de las expresiones reducidas, mientras que el orden débil está relacionado con los comienzos de las mismas. Nuestra principal referencia para esta sección será [1].

2.1. Orden de Bruhat: propiedades básicas.

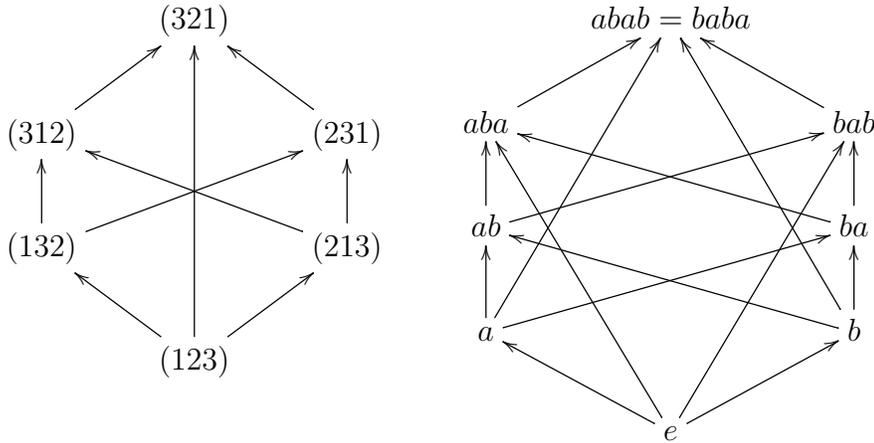
Definición 2.1. Sean $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ un sistema de Coxeter, y $u, v \in \mathbf{W}$.

- (i) Escribiremos $u \xrightarrow{t} v$ si $t = u^{-1}v \in \mathcal{T}$ y $\ell(u) < \ell(v)$.
- (ii) Escribiremos $u \longrightarrow v$ si existe $t \in \mathcal{T}$ tal que $u \xrightarrow{t} v$.
- (iii) Escribiremos $u \leq v$ si existen $w_i \in \mathbf{W}$ tales que

$$u \longrightarrow w_1 \longrightarrow w_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_n \longrightarrow v.$$

El *orden de Bruhat* es el orden parcial en \mathbf{W} definido por (iii). El *gráfico de Bruhat* es el grafo dirigido cuyos vértices son los elementos de \mathbf{W} y cuyas flechas son las de (ii).

Ejemplo 2.2. A continuación, los gráficos de Bruhat para \mathbb{S}_3 e $I_2(4)$.



Lo anterior se deduce a partir de:

$$\mathcal{T}_{\mathbb{S}_3} = \{(213), (132), (321)\}, \quad \mathcal{T}_{I_2(4)} = \{a, b, aba, bab\}.$$

Comenzaremos a descubrir cuáles son las propiedades de este orden. La primera será la PROPIEDAD DE SUBPALABRA, donde por una *subpalabra* de una palabra $s_1 s_2 \cdots s_n$ entendemos una palabra $s_{i_1} \cdots s_{i_j}$, donde $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n$.

Teorema 2.3. Sea $v = s_1 \cdots s_n$ una expresión reducida, y $u \in \mathbf{W}$. Entonces, $u \leq v$ sii u admite una expresión reducida que es una subpalabra de $s_1 \cdots s_n$.

Demostración. (\Rightarrow) Sea $u \leq v$, con lo cual existen $t_i \in \mathcal{T}$ tales que

$$u \xrightarrow{t_0} w_1 \xrightarrow{t_1} w_2 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_{m-1}} w_m \xrightarrow{t_m} v.$$

Como $v^{-1} = s_n \cdots s_1$ es una expresión reducida y $x_m^{-1} = t_m v^{-1}$, $\ell(x_m^{-1}) < \ell(w^{-1})$, la **PIF** nos dice que $x_m^{-1} = s_n \cdots \widehat{s}_i \cdots s_1$ para algún $i \in \mathbb{I}_n$, con lo cual $x_m = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots s_m$. Siguiendo, cada x_{m-k} se obtiene quitando $k+1$ de las s_i 's de la expresión reducida de v , por lo cual u admite una expresión que es una subpalabra de v . Por la **PS**, u admite una expresión reducida que es una subpalabra de esta expresión de u , y por lo tanto es una subpalabra de la expresión reducida de v .

(\Leftarrow) Comencemos por probar el siguiente resultado.

Afirmación 2.1. *Sean $u \neq v \in \mathbf{W}$ y $v = s_1 \cdots s_n$ una expresión reducida. Asumimos que u admite una expresión reducida que es subpalabra de $v = s_1 \cdots s_n$. Entonces existe $w \in \mathbf{W}$ tal que $u \leq w$, $\ell(w) = \ell(u) + 1$ y w admite una expresión reducida que es subpalabra de $v = s_1 \cdots s_n$.*

Demostración. Dado que la cantidad de expresiones reducidas de u es finita, podemos elegir aquélla que sea subpalabra de $v = s_1 \cdots s_n$, es decir de la forma $u = s_1 \cdots \widehat{s}_{i_1} \cdots \widehat{s}_{i_k} \cdots s_n$, $k = \ell(v) - \ell(u)$, con i_k mínimo. Sea $t = s_n s_{n-1} \cdots s_{i_k} \cdots s_{n-1} s_n \in \mathcal{T}$, de modo que

$$ut = s_1 \cdots \widehat{s}_{i_1} \cdots \widehat{s}_{i_{k-1}} \cdots s_{i_k} \cdots s_n.$$

Así, $\ell(ut) \leq \ell(u) + 1$. Supongamos que $\ell(ut) < \ell(u)$, de modo que la **PIF** nos dice que

- $t = s_n s_{n-1} \cdots s_p \cdots s_{n-1} s_n$ para algún $p > i_k$, o
- $t = s_n s_{n-1} \cdots \widehat{s}_{i_k} \cdots \widehat{s}_{i_d} \cdots s_p \cdots \widehat{s}_{i_d} \cdots \widehat{s}_{i_k} \cdots s_{n-1} s_n$ para algún $i_k \geq i_d > p$.

En el primer caso, las dos expresiones distintas de t nos dicen que

$$\begin{aligned} v &= vt^2 = (s_1 \cdots s_n)(s_n s_{n-1} \cdots s_{i_k} \cdots s_{n-1} s_n)(s_n s_{n-1} \cdots s_p \cdots s_{n-1} s_n) \\ &= s_1 \cdots \widehat{s}_{i_k} \cdots \widehat{s}_p \cdots s_n, \end{aligned}$$

que contradice la hipótesis de que $\ell(v) = n$. En el segundo caso,

$$\begin{aligned} u &= ut^2 = (s_1 \cdots \widehat{s}_{i_1} \cdots \widehat{s}_{i_k} \cdots s_n)(s_n \cdots \widehat{s}_{i_k} \cdots \widehat{s}_{i_d} \cdots s_p \cdots \widehat{s}_{i_d} \cdots \widehat{s}_{i_k} \cdots s_n) \\ &\quad (s_n s_{n-1} \cdots s_{i_k} \cdots s_{n-1} s_n) = s_1 \cdots \widehat{s}_{i_1} \cdots \widehat{s}_p \cdots s_n, \end{aligned}$$

que contradice la minimalidad de i_k . Así, $\ell(ut) = \ell(u) + 1$, con lo cual $w = ut$ es el elemento buscado. \square

Luego, la prueba es inmediata por inducción en $\ell(v) - \ell(u)$ a partir del Lema. \square

Corolario 2.4. *Los intervalos de Bruhat $[u, v] := \{w \in \mathbf{W} : u \leq w \leq v\}$ son finitos. Más aún, se tiene $|[u, v]| \leq 2^{\ell(v)}$.*

Demostración. Sean $v = s_1 \cdots s_n$ una expresión reducida, y $\zeta(s_1, \dots, s_n)$ el conjunto de subpalabras de $s_1 \cdots s_n$. De acuerdo al Teorema anterior, existe una función inyectiva $f: [u, v] \rightarrow \zeta(s_1, \dots, s_n)$, de modo que $|[u, v]| \leq |\zeta(s_1, \dots, s_n)| = 2^n$. \square

Corolario 2.5. *La aplicación $\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$, $w \mapsto w^{-1}$, es un automorfismo para el orden de Bruhat. Esto es, $u \leq v$ sii $u^{-1} \leq v^{-1}$.*

Demostración. Es inmediato a partir del Teorema anterior. \square

A continuación, probaremos que se satisface la PROPIEDAD DE CADENA.

Teorema 2.6. *Si $u < v$, entonces existe una cadena $u < w_1 < \cdots < w_n = v$ tal que $\ell(w_i) = \ell(u) + i$ para todo $i \in \mathbb{I}_n$.*

Demostración. Es consecuencia de la Afirmación 2.1. \square

Observación 2.7. $u \triangleleft v$ denota un *cubrimiento* para el orden de Bruhat; esto es, $u \leq_R v$ y no existe $z \in \mathbf{W}$ tal que $u < z < v$. De acuerdo al Teorema anterior, $u \triangleleft v$ sii $u < v$ y $\ell(v) = \ell(u) + 1$.

Probaremos que también se satisface la PROPIEDAD DEL LEVANTAMIENTO.

Teorema 2.8. *Si $u < v$ y $s \in \mathcal{D}_L(v) - \mathcal{D}_L(u)$, entonces $u \leq sv$ y $su \leq v$.*

Demostración. Aplicaremos varias veces el Teorema 2.3

Sea $sv = s_1 \cdots s_n$ una expresión reducida; luego, $v = ss_1 \cdots s_n$ también es reducida, pues $s \in \mathcal{D}_L(w)$. Así, u admite una expresión reducida $u = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$, que es una subpalabra de $v = ss_1 \cdots s_n$. Como $su > u$, pues $s \notin \mathcal{D}_L(u)$, se tiene que $s_{i_1} \neq s$, con lo cual $u = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ es una subpalabra de $sv = s_1 \cdots s_n$ y por lo tanto $u \leq sv$. También, $su = ss_{i_1} \cdots s_{i_k}$ es una expresión reducida y es a la vez una subpalabra de $v = ss_1 \cdots s_n$, por lo tanto $su \leq v$. \square

Corolario 2.9. (i) *Sean $s, s' \in \mathcal{S}$ tales que $w \triangleleft sw, s'w$. Entonces, o bien $sw, ws' \triangleleft sws'$, o $w = sws'$.*

(ii) *Si $s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}, s \neq t$, son tales que $w \triangleleft sw, tw$, entonces $sw, tw \triangleleft stw$.*

Demostración. Inmediata a partir de la Proposición anterior. \square

Finalizamos esta subsección con el siguiente resultado.

Proposición 2.10. *El orden de Bruhat en \mathbf{W} es dirigido: esto es, para cada par de elementos $u, v \in \mathbf{W}$ existe $w \in \mathbf{W}$ tal que $u \leq w, v \leq w$.*

Demostración. Lo probaremos por inducción en $\ell(u) + \ell(v)$. Si $\ell(u) + \ell(v) = 0$, entonces $u = v = e$, y $w = e$ es un candidato. Asumimos ahora que $\ell(u) + \ell(v) \geq 1$, y que vale la hipótesis inductiva. Podemos considerar $u, v \neq e$, pues $w \geq e$ para todo $w \in \mathbf{W}$. Sea $s \in \mathcal{D}_L(u)$, de modo que $\ell(su) = \ell(u) - 1$. Por inducción, existe $w' \in \mathbf{W}$ tal que $su \leq w', v \leq w'$. Usando el Teorema 2.8, se tiene que $sw' < w'$, en cuyo caso $u \leq w'$, o $sw' > w'$, en cuyo caso $u \leq sw'$. Así, el w buscado es en el primer caso $w = w'$, y en el segundo, $w = sw'$. \square

2.2. Grupos finitos: algunas propiedades. A continuación estudiaremos algunas particularidades que presenta el orden de Bruhat cuando nos restringimos a grupos de Coxeter finitos. En esta Subsección, \mathbf{W} será siempre un grupo de Coxeter finito.

Proposición 2.11. *Existe un único elemento de longitud máxima w_0 , que es máximo para el orden de Bruhat.*

Recíprocamente, si $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ es un sistema de Coxeter que admite un elemento u tal que $\mathcal{D}_L(u) = \mathcal{S}$, entonces \mathbf{W} es finito y $u = w_0$.

Demostración. Existe algún elemento de longitud máxima w_0 . Para cualquier otro elemento $w \in \mathbf{W}$, la Proposición 2.10 dice que existe una cota superior x de estos dos elementos, la cual satisface $\ell(w_0) \leq \ell(x)$. La maximalidad de $\ell(w_0)$ nos dice que $w_0 = x$ por el Teorema 2.3 (w_0 debe ser una subpalabra de x de la misma longitud) y así $w_0 \geq w$.

Para la segunda afirmación, probemos que $v < u$ para todo $v \in \mathbf{W}$ por inducción en $\ell(v)$ (el caso $\ell(v) = 0$ es trivial). Si $v \neq e$, existe $s \in \mathcal{S}$ tal que $sv < v$, de modo que $s \notin \mathcal{D}_L(sv)$. Por hipótesis inductiva, $sv < u$, y por el Teorema 2.8, $s(sv) = v \leq u$. Luego, $\mathbf{W} = [e, u]$ es finito, y u es el elemento máximo. \square

Proposición 2.12. *El elemento w_0 tiene las siguientes propiedades:*

- (i) $w_0^2 = e$.
- (ii) $\ell(w_0w) = \ell(w_0) - \ell(w)$ para todo $w \in \mathbf{W}$.
- (iii) $\mathcal{T}_L(w_0w) = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}(w)$ para todo $w \in \mathbf{W}$.
- (iv) $\ell(w_0) = |\mathcal{T}|$.
- (v) $\ell(w_0w) = \ell(w_0) - \ell(w)$, $\ell(w_0ww_0) = \ell(w)$ para todo $w \in \mathbf{W}$.

Demostración. (i) Como $\ell(w_0^{-1}) = \ell(w_0)$, la unicidad del elemento de longitud máxima nos dice que $w_0^{-1} = w_0$.

(ii) En primer lugar, $\ell(w) + \ell(w_0w) = \ell(w^{-1}) + \ell(w_0w) \geq \ell(w_0)$. Ahora, probaremos que $\ell(w) + \ell(w_0w) \leq \ell(w_0)$ por inducción en $\ell(w_0) - \ell(w)$. Si $\ell(w_0) - \ell(w) = 0$, entonces $w = w_0$ y la igualdad es trivial. Asumimos ahora que vale para $\ell(w_0) - \ell(w) = k > 0$, con lo cual existe $s \in \mathcal{S}$ tal que $w < sw$ (ver Proposición 2.11). Luego,

$$\begin{aligned} \ell(w_0w) &\leq \ell(sw_0w) + 1 \leq (\ell(w_0) - \ell(sw)) + 1 \\ &= \ell(w_0) - (\ell(w) + 1) + 1 = \ell(w_0) - \ell(w), \end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba.

(iii) Notar que (ii) implica que $tw < w$ sii $tw_0 > w$ para todo $t \in \mathcal{T}$, con lo cual cada $t \in \mathcal{T}$ pertenece a uno y sólo uno de los conjuntos $\mathcal{T}_L(w)$, $\mathcal{T}_L(w_0w)$.

(iv) Si $w = e$ en (iii), $\mathcal{T} = \mathcal{T}_L(w_0)$, y el resultado sigue de (1.7).

(v) Notar que $\ell(w_0w) = \ell(w^{-1}w_0) = \ell(w_0) - \ell(w^{-1}) = \ell(w_0) - \ell(w)$. \square

2.3. Orden débil. Nuevamente $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ denotará un sistema de Coxeter.

Definición 2.13. El orden débil a derecha \leq_R está definido por la siguiente condición:

$$u \leq_R w \text{ sii existen } s_i \in \mathcal{S} \text{ tales que } w = us_1 \cdots s_k \text{ y } \ell(us_1 \cdots s_i) = \ell(u) + i \text{ para todo } i \in \mathbb{I}_k.$$

El orden débil a izquierda \leq_L está definido por la siguiente condición:

$$u \leq_L w \text{ sii existen } s_i \in \mathcal{S} \text{ tales que } w = s_k \cdots s_1u \text{ y } \ell(s_i \cdots s_1u) = \ell(u) + i \text{ para todo } i \in \mathbb{I}_k.$$

Observación 2.14. Estos dos órdenes son diferentes; sin embargo están relacionados por la condición:

$$u \leq_R w \iff u^{-1} \leq_L w^{-1}.$$

Además, justamente son órdenes más débiles que el de Bruhat: si $u \leq_R v$ o $u \leq_L v$, entonces $u \leq v$.

Usaremos la siguiente notación, análoga a la relacionada con el orden de Bruhat:

- $u \triangleleft_R v$ denota un *cubrimiento* para el orden a derecha; esto es, $u \leq_R v$ y no existe $z \in \mathbf{W}$ tal que $u \leq_R z \leq_R v$.
- $[u, v]_R := \{w \in \mathbf{W} : u \leq_R w \leq_R v\}$.
- De modo análogo se definen $u \triangleleft_L v$ y $[u, v]_L$ para el orden a izquierda.

Algunas propiedades del orden débil son las siguientes:

Proposición 2.15. (i) *Existe una correspondencia biyectiva entre expresiones reducidas de $w \in \mathbf{W}$ y cadenas maximales de $[e, w]_R$.*

(ii) $u \leq_R w$ sii $\ell(w) = \ell(u) + \ell(u^{-1}w)$.

(iii) *El orden débil satisface la propiedad del prefijo:*

$u \leq_R w$ sii existe una expresión reducida $w = s_1 \cdots s_m$ tal que $u = s_1 \cdots s_n$,
 $n = \ell(u) \leq m = \ell(w)$.

(iv) El orden débil satisface la propiedad de la cadena:

Si $u \leq_R w$, entonces existe una cadena $u \leq_R v_1 \leq_R \cdots \leq_R v_n = w$ tal que
 $\ell(v_i) = \ell(u) + i$ para todo $i \in \mathbb{I}_n$.

(v) Si $s \in \mathcal{D}_L(u) \cap \mathcal{D}_L(w)$, entonces $u \leq_R w$ si y sólo si $su \leq_R sw$.

(vi) Si \mathbf{W} es finito, entonces $w \leq_R w_0$ para todo $w \in \mathbf{W}$.

(vii) Si $r(w)$ denota el número de expresiones reducidas de $w \in \mathbf{W}$, entonces

$$(2.1) \quad r(w) = \sum_{u \in \mathbf{W}: u \triangleleft_R w} r(u).$$

Demostración. Todos los ítems son fáciles de probar, y quedan como ejercicio para el lector. \square

Existe una buena caracterización para el orden débil, que damos a continuación.

Proposición 2.16. $u \leq_R w$ sii $\mathcal{T}_L(u) \subseteq \mathcal{T}_L(w)$.

Demostración. (\Rightarrow) Existe una expresión reducida $w = s_1 \cdots s_n$ tal que $u = s_1 \cdots s_k$,
 $k \leq n$. De la definición de los conjuntos se sigue que $\mathcal{T}_L(u) \subseteq \mathcal{T}_L(w)$.

(\Leftarrow) Asumimos que $\mathcal{T}_L(u) \subseteq \mathcal{T}_L(w)$, y fijamos $u = s_1 \cdots s_k$ una expresión reducida.
 Sea $t_i = s_1 s_2 \cdots s_i \cdots s_2 s_1$, para cada $i \in \mathbb{I}_k$. Notar que $n = \ell(w) \geq k$ por (1.7).
 Probaremos por inducción en i que existe una expresión reducida $w = s_1 \cdots s_i s'_1 \cdots s'_{n-i}$,
 para $i \in \mathbb{I}_k$. El caso $i = 1$ sigue del Corolario 1.20. Asumimos que vale para i : $w =$
 $s_1 \cdots s_i s'_1 \cdots s'_{n-i}$. El Lema 1.15 nos dice que existe $m \in \mathbb{I}_{n-i}$ tal que

$$t_{i+1} = s_1 \cdots s_i s'_1 \cdots s'_m \cdots s'_1 s_i \cdots s_1,$$

pues $t_{i+1} \neq t_j$ para todo $j \in \mathbb{I}_i$, con lo cual

$$\begin{aligned} w &= t_{i+1}^2 w = (s_1 s_2 \cdots s_{i+1} \cdots s_2 s_1)(s_1 \cdots s_i s'_1 \cdots s'_m \cdots s'_1 s_i \cdots s_1) s_1 \cdots s_i s'_1 \cdots s'_{n-i} \\ &= s_1 \cdots s_{i+1} s'_1 \cdots \widehat{s'_m} \cdots s'_{n-i}. \end{aligned}$$

Luego, como vale para $i = k$, se tiene $u \leq_R w$. \square

Ejercicios.

1. Hallar el diagrama de Bruhat correspondiente al grupo diedral D_m . Probar que dos elementos cualesquiera de distinta longitud son comparables; más aún, vale que $\ell(u) < \ell(v)$ sii $u < v$.
2. Definimos el *orden de Bruhat a izquierda* cambiando la condición $t = u^{-1}v$ por $t = vu^{-1}$ en la definición del orden de Bruhat. Probar que dicho orden coincide con el de Bruhat (es por eso que no se definen órdenes de Bruhat a derecha e izquierda, sino un único orden de Bruhat).
3. Probar que el elemento de longitud máxima de \mathbb{S}_n es w_0 , la permutación que invierte el orden: $i \leftrightarrow n - i$. Hallar una expresión reducida de dicho elemento.
4. Dado $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}$ y $u, v \in \mathbf{W}_{\mathcal{X}}$, probar que $u \leq v$ para el orden de Bruhat en $\mathbf{W}_{\mathcal{X}}$ sii $u \leq v$ para el orden de Bruhat en \mathbf{W} .
5. Sea \mathbf{W} un grupo de Coxeter finito, y $w \in \mathbf{W}$. Probar que:
 - a) $\mathcal{D}_L(w w_0) = \mathcal{S} \setminus \mathcal{D}_L(w)$.
 - b) $\mathcal{D}_L(w_0 w) = w_0(\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}_L(w))w_0 = \mathcal{S} \setminus w_0 \mathcal{D}_L(w) w_0$.
 - c) $\mathcal{D}_L(w_0 w w_0) = w_0 \mathcal{D}_L(w) w_0$.

$$d) \mathcal{T}_L(w_0 w w_0) = w_0 \mathcal{T}_L(w) w_0.$$

6. Probar la Proposición 2.15.

3. REPRESENTACIONES LINEALES Y RAÍCES

En la última parte de estas notas descubriremos un punto de vista geométrico que presentan los grupos de Coxeter. En primer lugar, los realizaremos como grupos lineales, es decir como subgrupos de $\text{GL}(V)$, el grupo de automorfismos sobre un espacio \mathbb{R} -lineal V . Luego, daremos la definición y algunas propiedades de los sistemas de raíces asociados a dichos grupos.

3.1. Representación lineal y matriz de Coxeter. Mostraremos a continuación una representación lineal canónicamente asociada a un grupo de Coxeter y algunas consecuencias de su existencia. Entre otras, probaremos que existe una biyección entre las matrices de Coxeter y los sistemas de Coxeter salvo isomorfismos (notar que no dijimos simplemente grupos, sino que debemos fijar el conjunto de generadores).

En lo que resta de estas notas, \mathcal{S} será un conjunto finito. Recordar que una *representación lineal* es un morfismo de grupos $\phi : \mathbf{W} \rightarrow \text{GL}(V)$, donde $\text{GL}(V)$ denota el grupo de automorfismos lineales de V (consideraremos \mathbb{R} -espacios vectoriales).

Fijemos un entero $m \geq 3$, y reales $k_1, k_2 > 0$ tales que $k_1 k_2 = 4 \cos^2(\pi/m)$. Fijemos una base $\{v_1, v_2\}$ de \mathbb{R}^2 tal que el ángulo entre v_1 y v_2 es π/m , y sus normas satisfacen

$$\|v_2\| = \frac{2 \cos(\pi/m)}{-k_1} \|v_1\|, \quad \|v_1\| = \frac{2 \cos(\pi/m)}{-k_2} \|v_2\|.$$

Sea r_i la reflexión ortogonal con respecto a v_i , $i = 1, 2$.

Lema 3.1. r_i está determinada por:

$$r_i(v_i) = -v_i, \quad r_i(v_j) = v_j + k_j v_i, j \neq i.$$

Demostración. Es un cálculo directo, que dejamos como ejercicio para el lector. \square

Sea $a : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$\begin{aligned} a_{ss} &= 2, & a_{st} &= a_{ts} = -2 \cos \frac{\pi}{m_{st}}, & \text{si } 3 \leq m_{st} < \infty, \\ a_{st} &= 0, & & & \text{si } m_{st} = 2, & a_{st} &= a_{ts} = -2, & \text{si } m_{st} = \infty. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\{\alpha_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$, el espacio vectorial de funciones de \mathcal{S} a valores en \mathbb{R} ; ésto es, $\alpha_s(t) = \delta_{st}$ para cada par $s, t \in \mathcal{S}$. Definimos la transformación lineal $\sigma_s : \mathbb{R}^{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$, $\sigma_s(\alpha_t) = \alpha_t - a_{st} \alpha_s$. Definimos una forma bilineal $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $B(\alpha_s, \alpha_t) = a_{st}/2$. Dicha forma es simétrica, y $B(\alpha_s, \alpha_s) = 1$, $B(\alpha_s, \alpha_t) \leq 0$ para todo par $s \neq t \in \mathcal{S}$. Si H_s es el hiperplano ortogonal a α_s con respecto a B , entonces $\sigma_s(H_s) = H_s$ y H_s es un complemento lineal de $\mathbb{R}\alpha_s$, pues $B(\alpha_s, \alpha_s) \neq 0$. También $\sigma_s(\alpha_s) = -\alpha_s$. Además, para cada $s \in \mathcal{S}$,

$$(3.1) \quad B(\sigma_s(v), \sigma_s(w)) = B(v, w), \quad \text{para todo } v, w \in V.$$

Teorema 3.2. *Sea $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ un sistema de Coxeter. Entonces, existe un único morfismo de grupos $\sigma : \mathbf{W} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^{\mathcal{S}})$, $s \mapsto \sigma_s$.*

Demostración. Lo probaremos en una serie de pasos; el primero es fácil de probar.

Afirmación 3.1. $\sigma_s^2 = \text{id}$ para todo $s \in \mathcal{S}$, y $\sigma_s \sigma_t = \sigma_t \sigma_s$ si $m_{st} = 2$.

Afirmación 3.2. $\sigma_s\sigma_t$ tiene orden m_{st} si $3 \leq m_{st} < \infty$.

Sea V el subespacio generado por α_s y α_t , de dimensión 2. Notar que $\sigma_s\sigma_t(V) \subseteq V$, pues ambas reflexiones dejan invariante a V (basta con aplicarlas a α_s y α_t). Luego, podemos pensar a V como \mathbb{R}^2 , y considerar $\sigma_s\sigma_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dadas dos reflexiones ortogonales con respecto a planos que se diferencian en un ángulo γ , su composición es una rotación de ángulo 2γ . En nuestro caso, a partir de la fórmula de σ_s y σ_t , y del Lema 3.1, σ_s y σ_t son las reflexiones con respecto a α_s y α_t . Luego, $\sigma_s\sigma_t$ tiene orden m_{st} , pues es la rotación en un ángulo de amplitud $2\pi/m_{st}$; los conjuntos $\{(\sigma_s\sigma_t)^m(\alpha_s) : 0 \leq m < m_{st}\}$, $\{(\sigma_s\sigma_t)^m(\alpha_t) : 0 \leq m < m_{st}\}$ tienen m_{st} elementos cada uno de ellos. Ahora, $\sigma_s\sigma_t$ deja estable $H_s \cap H_t$, y como $(H_s \cap H_t) \cup \{\alpha_s, \alpha_t\}$ generan V , se sigue que $\sigma_s\sigma_t$ tiene orden m_{st} .

Afirmación 3.3. $\sigma_s\sigma_t$ tiene orden ∞ si $m_{st} = \infty$.

Por inducción podemos probar que

$$(st)^n(\alpha_s) = (2m+1)\alpha_s + 2m\alpha_t, \quad t(st)^n(\alpha_s) = (2m+1)\alpha_s + 2(m+1)\alpha_t.$$

En particular, $(st)^n \neq \text{id}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego, el resultado sigue de las Afirmaciones y la Observación 1.6. \square

Observación 3.3. En general usaremos la notación $\sigma_w := \sigma(w)$, para cada $w \in \mathbf{W}$. Además, escribiremos $w(\alpha) := \sigma_w(\alpha)$.

Teorema 3.4. *Existe una biyección entre matrices de Coxeter y clases de equivalencia de sistemas de Coxeter.*

Demostración. Simplemente, si m_{st} es finito, entonces el orden de st divide a m_{st} , pues se tiene la relación $(st)^{m_{st}} = e$, pero por otro lado es al menos m_{st} , pues $\sigma((st)^m) \neq e$ si $a < m_{st}$ (ver las Afirmaciones de la prueba anterior). Si $m_{st} = \infty$, el Teorema anterior también nos dice que $(st)^m \neq e$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Luego, cada matriz de Coxeter determina un único sistema de Coxeter, del cual obtenemos la matriz de Coxeter asociada (única) como la matriz de los órdenes de st , $s, t \in \mathcal{S}$. \square

3.2. Raíces. Reflexiones. En esta última parte introduciremos el sistema de raíces asociado a un grupo de Coxeter y obtendremos una relación con la longitud de cada elemento de \mathbf{W} . Además probaremos la inyectividad de la representación σ .

Definición 3.5. El sistema de raíces de $(\mathbf{W}, \mathcal{S})$ es el conjunto

$$\Delta := \{w(\alpha_s) \mid s \in \mathcal{S}, w \in \mathbf{W}\}.$$

Dado $\alpha \in \Delta$, escribimos $\alpha = \sum_{s \in \mathcal{S}} c_s \alpha_s$, donde los c_s están unívocamente determinados. Decimos que α es *positiva* (respectivamente, *negativa*) si $c_s \geq 0$ (respectivamente, $c_s \leq 0$) para todo $s \in \mathcal{S}$. Usaremos la notación $\alpha > 0$ (respectivamente, $\alpha < 0$) para indicar que α es positiva (respectivamente, negativa). Además,

$$\Delta_+ := \{\alpha \in \Delta : \alpha > 0\}, \quad \Delta_- := \{\alpha \in \Delta : \alpha < 0\}.$$

Observación 3.6. Notar que $B(\alpha, \alpha) = 1$ para cada $\alpha \in \Delta$, pues \mathbf{W} preserva B . Además, $\Delta = -\Delta$, pues $s(\alpha_s) = -\alpha_s$.

Teorema 3.7. Sean $w \in \mathbf{W}$, $s \in \mathcal{S}$. Si $\ell(ws) > \ell(w)$, entonces $w(\alpha_s) > 0$. Si $\ell(ws) < \ell(w)$, entonces $w(\alpha_s) < 0$.

Demostración. Lo probaremos por inducción en $\ell(w)$, siendo trivial el caso inicial $\ell(w) = 0$. Asumimos que $w'(\alpha_s) > 0$ para cada $w' \in \mathbf{W}$ tal que $\ell(w') < k$, $\ell(w's) > \ell(w')$, y sea $w \in \mathbf{W}$ tal que $\ell(w) = k$. Fijemos una expresión reducida de w , la cual termina en t , de modo que $\ell(wt) = k - 1$; luego, $s \neq t$. Sea $\mathcal{X} = \{s, t\}$, de modo que $\mathbf{W}_{\mathcal{X}}$ es isomorfo al grupo diedral $I_2(m)$, donde $m = m_{st}$. Consideramos

$$A := \{v \in \mathbf{W} : v^{-1}w \in \mathbf{W}_{\mathcal{X}}, \ell(v) + \ell(v^{-1}w) = \ell(w)\}.$$

Notar que $A \neq \emptyset$, pues $w \in A$. Fijemos entonces $v \in A$ de longitud mínima, y $v_{\mathcal{X}} := v^{-1}w$. Así, $\ell(v) + \ell(v_{\mathcal{X}}) = \ell(w)$. Por otro lado, $wt \in A$, pues $(tw^{-1})w = t \in \mathbf{W}_{\mathcal{X}}$ y $\ell(wt) = \ell(w) - 1$, de modo que $\ell(v) \leq \ell(wt) = k - 1$. Supongamos que $\ell(vs) < \ell(v)$; es decir, $\ell(vs) = \ell(v) - 1$. Entonces,

$$\ell(w) \leq \ell(vs) + \ell(sv^{-1}w) = \ell(v) - 1 + \ell(sv^{-1}w) \leq \ell(v) - 1 + \ell(v^{-1}w) + 1 = \ell(w).$$

Así, $\ell(w) = \ell(vs) + \ell(sv^{-1}w)$, y $sv^{-1}w \in \mathbf{W}_{\mathcal{X}}$, con lo cual $vs \in A$. Este hecho contradice la elección de v , con lo cual $\ell(vs) > \ell(v)$, y por hipótesis inductiva $v(\alpha_s) > 0$. De modo análogo probamos que $\ell(vt) > \ell(v)$, y así $v(\alpha_t) > 0$. Dado que $w = vv_{\mathcal{X}}$, basta con probar que $v_{\mathcal{X}}(\alpha_s) > 0$, pues en tal caso es una combinación lineal con coeficientes no negativos de α_s y α_t , a la cual le aplicamos v , y obtenemos una combinación lineal con coeficientes no negativos.

Supongamos que $\ell(v_{\mathcal{X}}s) < \ell(v_{\mathcal{X}})$. Entonces,

$$\ell(ws) = \ell(vv^{-1}ws) \leq \ell(v) + \ell(v^{-1}ws) = \ell(v) + \ell(v_{\mathcal{X}}s) < \ell(v) + \ell(v_{\mathcal{X}}) = \ell(w),$$

lo cual es un absurdo. Así, $\ell(v_{\mathcal{X}}s) > \ell(v_{\mathcal{X}})$. Luego, toda expresión reducida de $v_{\mathcal{X}}$ termina en t , y así $v_{\mathcal{X}} = (st)^n$ o $v_{\mathcal{X}} = t(st)^n$, para algún $m \in \mathbb{N}$.

- Si $m < \infty$, entonces $\ell(v_{\mathcal{X}}) < m$, pues $v_{\mathcal{X}}$ no puede ser el elemento de longitud máxima w_0 (w_0 tiene una escritura que termina en s). Calculando directamente, donde interpretamos a α_s, α_t como dos vectores de longitud 1 en \mathbb{R}_2 que forman un ángulo de $\pi - \pi/m$, vemos que $v_{\mathcal{X}}(\alpha_s) > 0$.
- Si $m = \infty$, entonces $v_{\mathcal{X}}(\alpha_s) > 0$, ver la prueba de la Afirmación 3.3.

En cualquier caso tenemos que $v_{\mathcal{X}}(\alpha_s) > 0$, lo que concluye la prueba.

Una vez probada la primer afirmación, la segunda se obtiene a partir de ella, pues si $w' = ws$, entonces $\ell(w') < \ell(w's)$, y por lo tanto $w'(\alpha_s) = -w(\alpha_s) > 0$. \square

Corolario 3.8. *La representación $\sigma : \mathbf{W} \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^{\mathcal{S}})$ es inyectiva.*

Demostración. Si $w \neq e$, existe $s \in \mathcal{S}$ tal que $\ell(ws) < \ell(w)$ (como dijimos antes, un final de una expresión reducida), con lo cual $w(\alpha_s) < 0$, y por lo tanto $w(\alpha_s) \neq \alpha_s$. Así, $w \notin \ker \sigma$. \square

Corolario 3.9. $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$. \square

Para cada $w \in \mathbf{W}$ definimos $L_w := \{\alpha \in \Delta_+ : w(\alpha) < 0\}$.

Proposición 3.10. (i) *Para cada $s \in \mathcal{S}$, $s(\Delta_+ \setminus \{\alpha_s\}) = \Delta_+ \setminus \{\alpha_s\}$.*

(ii) *Para cada $w \in \mathbf{W}$, $\ell(w) = |L_w|$.*

Demostración. (i) Sea $\alpha = \sum_{t \in \mathcal{S}} c_t \alpha_t \in \Delta_+$, $\alpha \neq \alpha_s$. Entonces, existe $t_0 \neq s$ tal que $c_{t_0} > 0$, pues α no es un múltiplo de α_s (todas las raíces son unitarias). Dado que

$$s(\alpha) = s \left(\sum_{t \in \mathcal{S}} c_t \alpha_t \right) = \sum_{t \neq s} c_t \alpha_t + (-c_s + \sum_{t \neq s} c_t a_{st}) \alpha_s,$$

s no modifica el coeficiente de α_{t_0} , que sigue siendo positivo, y por el Corolario 3.9, $s(\alpha) \in \Delta_+$. Luego, $s(\Delta_+ \setminus \{\alpha_s\}) \subseteq \Delta_+ \setminus \{\alpha_s\}$, y aplicando s obtenemos la otra inclusión.

(ii) El enunciado es claro para $\ell(w) = 0$ (es decir, $w = e$), y $\ell(w) = 1$ a partir de (i). Procederemos entonces por inducción, para lo cual, a partir del Teorema 3.7 basta con probar lo siguiente:

Afirmación 3.4. Sean $w \in \mathbf{W}$, $s \in \mathcal{S}$. Si $w(\alpha_s) > 0$, entonces $|L_{ws}| = |L_w| + 1$. Si $w(\alpha_s) < 0$, entonces $|L_{ws}| = |L_w| - 1$.

Tenemos que $L_w = \Delta_+ \cap w^{-1}(\Delta_-)$. Si $w(\alpha_s) > 0$, (i) nos dice que

$$L_{ws} = \Delta_+ \cap sw^{-1}(\Delta_-) = s(L_w) \cup \{\alpha_s\},$$

y $\alpha_s \notin s(L_w)$, con lo cual $|L_{ws}| = |L_w| + 1$. De modo análogo, si $w(\alpha_s) < 0$,

$$L_{ws} = \Delta_+ \cap sw^{-1}(\Delta_-) = s(L_w) \setminus \{\alpha_s\},$$

con lo cual $|L_{ws}| = |L_w| - 1$, y la Afirmación queda probada. \square

Sea $\alpha \in \Delta$; así, existen $w \in \mathbf{W}$, $s \in \mathcal{S}$ tales que $\alpha = w(\alpha_s)$. Notar que

$$\begin{aligned} wsw^{-1}(v) &= w(w^{-1}(v) - 2B(w^{-1}(v), \alpha_s)\alpha_s) = v - 2B(w^{-1}(v), \alpha_s)w(\alpha_s) \\ v - 2B(v, w(\alpha_s))w(\alpha_s) &= v - 2B(v, \alpha)\alpha, \end{aligned}$$

para todo $v \in V$, con lo cual $wsw^{-1} \in \mathcal{T}$ no depende de w , s sino solamente de α . Llamaremos s_α a este elemento, que resulta ser la reflexión ortogonal con respecto a α , que envía α en $-\alpha$ y deja fijo el hiperplano H_α ortogonal a α ; además $s_\alpha = s_{-\alpha}$.

Lema 3.11. (i) La función $\Delta_+ \rightarrow \mathcal{T}$, $\alpha \mapsto s_\alpha$ es biyectiva.

(ii) Dados $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $w(\alpha) = \beta$ para algún $w \in \mathbf{W}$, entonces $ws_\alpha w^{-1} = s_\beta$.

Demostración. (i) La definición de \mathcal{T} dice que la aplicación es suryectiva. Si $s_\alpha = s_\beta$,

$$-\beta = s_\beta(\beta) = s_\alpha(\beta) = \beta - 2B(\beta, \alpha)\alpha,$$

con lo cual $\beta = B(\beta, \alpha)\alpha$, y por lo tanto $\alpha = \beta$, pues ambas raíces son positivas y son vectores unitarios. Así la aplicación es inyectiva.

(ii) Es inmediato de la definición de s_β y el hecho que B es \mathbf{W} -invariante. \square

Ahora podemos generalizar el Teorema 3.7.

Teorema 3.12. Dados $w \in \mathbf{W}$, $\alpha \in \Delta_+$, $\ell(ws_\alpha) > \ell(w)$ sii $w(\alpha) > 0$.

Demostración. (\Rightarrow) Aplicaremos inducción en $\ell(w)$, siendo trivial el caso $\ell(w) = 0$. Asumimos que $u(\alpha) > 0$ para cada $u \in \mathbf{W}$ tal que $\ell(u) < k$, $\ell(u) < \ell(us_\alpha)$. Sea $w \in \mathbf{W}$ tal que $\ell(w) = k$, $\ell(w) < \ell(ws_\alpha)$. Sea $s \in \mathcal{S}$ tal que $\ell(sw) = \ell(w) - 1$. Notar que

$$\ell(sws_\alpha) \geq \ell(ws_\alpha) - 1 > \ell(w) - 1 = \ell(sw).$$

Por hipótesis inductiva, $sw(\alpha) > 0$. Supongamos que $w(\alpha) < 0$. La Proposición 3.10 nos dice que $w(\alpha) = -\alpha_s$, a partir de lo cual $sw(\alpha) = \alpha_s$ y $s = (sw)s_\alpha(sw)^{-1}$, por el Lema 3.11. Así, $ws_\alpha = sw$. Como $\ell(ws_\alpha) > \ell(w) > \ell(sw)$, obtenemos un absurdo, de donde $w(\alpha) > 0$.

(\Leftarrow) Como en la prueba del Teorema 3.7, se deduce de la prueba anterior. \square

Ejercicios.

1. Probar que $L_{w^{-1}} = -wL_w$ para todo $w \in \mathbf{W}$.
2. Probar que para todo par de elementos $v, w \in \mathbf{W}$, $\ell(vw) = \ell(v) + \ell(w)$ si y sólo si $L_w \subseteq L_{vw}$. En tal caso, probar que $L_{vw} = L_w \cup w^{-1}L_v$.
3. Sea $w = s_1 \cdots s_r$ una expresión reducida. Consideremos

$$\beta_r := \alpha_{s_r}, \quad \beta_j := s_r s_{r-1} \cdots s_{j-1}(\alpha_{s_j}).$$

Probar que β_1, \dots, β_r son r raíces positivas distintas.

4. Si \mathbf{W} es infinito, probar que ℓ toma valores arbitrariamente grandes, y por lo tanto Δ es infinito. Si \mathbf{W} es finito, probar que $w_0(\Delta_+) = \Delta_-$.
5. Sean $\mathcal{R}, \mathbf{U}_w$ como en (1.4), (1.6). Definimos $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \Delta$ como sigue:

$$(t, \pm 1) \mapsto \gamma \in \Delta_{\pm}, \quad \text{si } t_{\gamma} = t.$$

- a) Probar que ϕ es biyectiva.
 - b) Probar que $\phi \circ \pi_w = w \circ \phi$ para todo $w \in \mathbf{W}$.
 - c) Probar que la Proposición 3.10 y el Teorema 3.12 se pueden probar a partir del ítem anterior.
6. Consideremos la forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$.
- a) Si $|\mathcal{S}| = 2$, probar que $B(\cdot, \cdot)$ es definida positiva o semidefinida positiva.
 - b) Consideremos $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3\}$, $(p, q, r) = (m_{s_1, s_2}, m_{s_1, s_3}, m_{s_2, s_3})$ y

$$d := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}.$$

Probar que $B(\cdot, \cdot)$ es

- definida positiva si y sólo si $d > 1$
- semidefinida positiva degenerada sii $d = 1$.
- de signo $(2, 1)$, es decir tiene dos autovalores positivos y uno negativo, sii $d < 1$.

Ayuda: dividir el estudio en dos casos: cuando el diagrama es un triángulo, o cuando no lo es (es decir, uno de las entradas de M es 2).

- c) Hallar todas las ternas (p, q, r) para los cuales la forma bilineal es definida positiva o semidefinida positiva.

REFERENCIAS

- [1] A. Björner y F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*. Graduate Texts in Mathematics, **231**. Springer, New York, xiv+363 pp. (2005).
- [2] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. **4, 5 et 6**. Éléments de mathématique. Hermann, Paris, 300 pp. (1968).
- [3] A. Cohen, *Coxeter groups*. Notes of a MasterMath course, Fall 2007. Disponible en <http://www.win.tue.nl/~jpanhuis/coxeter/notes/notes.pdf>
- [4] J. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **29**. Cambridge University Press, Cambridge, xii+204 pp. (1990)

FAMAF-CIEM (CONICET), UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA, MEDINA ALLENDE S/N, CIUDAD UNIVERSITARIA, 5000 CÓRDOBA, REPÚBLICA ARGENTINA.

E-mail address: angiono@famaf.unc.edu.ar