ESPECIES COMBINATORIAS

RODRIGO IGLESIAS

Resumen. Las funciones y series generatrices son un intrumento clásico para el conteo de estructuras combinatorias de algún tipo (árboles, particiones, grafos, etc.). La teoría de especies combinatorias fue introducida por A. Joyal en 1980 como un método sistemático para definir y analizar estructuras combinatorias y sus series asociadas, dando explicaciones naturales a las manipulaciones algebraicas que se hacen con las funciones generatrices.

Así como la suma y multiplicación en el anillo de caracteres provienen de operaciones en la categoría de las representaciones de un grupo, de manera similar, las operaciones de suma, multiplicación, derivación, composición, etc. entre series formales son manifestaciones de operaciones en una categoría más rica: la de las especies combinatorias.

En el curso vamos a introducir el concepto de especie combinatoria y sus operaciones más básicas, mostrando cómo funcionan en ejemplos importantes como las especies de particiones, permutaciones, árboles y ciclos. Veremos una extensión del concepto de especie, el de las especies ponderadas y sus series, en particular las serie indicatriz de ciclos apuntando a dar esquemáticamente una prueba puramente combinatoria del teorema de enumeración de Polya-Redfield, el cual da un método general para contar las órbitas de una acción del grupo simétrico.

Índice

Date: 10 de julio de 2012.

Introducción

Supongamos que queremos calcular el número a_n de árboles con raíz con n nodos (etiquetados) así como el número t_n de tipos de isomorfismos de árboles con n nodos (no etiquetados). Para esto es conveniente considerar las funciones generatrices

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}, \qquad T(x) = \sum_{n\geq 0} t_n x^n$$

puesto que se sabe por los trabajos de Cayley y Pólya entre otros que estas series generatrices satisfacen identidades como

$$\mathcal{A}(x) = xe^{\mathcal{A}(x)}, \qquad T(x) = x\sum_{n\geq 0} \exp\left(\frac{T(x^n)}{n}\right)$$

De identidades como estas podemos obtener fórmulas de recurrencia para los coeficientes.

De dónde provienen o qué significan estas identidades, o para qué otras estructuras podemos obtener este tipo ecuaciones funcionales o diferenciales, son el tipo de preguntas que queremos responder.

En 1980 A. Joyal introdujo en [4] una teoría que es capaz de dar respuestas satisfactorias a estas preguntas. Las especies combinatorias forman una categoría de objetos con operaciones de suma, multiplicación, composición, derivación, etc., que resultan naturales desde el punto de vista intuitivo o visual y que sin embargo resultan ser los movimientos detrás de escena de varias manipulaciones usuales y menos intuitivas que se hacen con las series generatrices.

Por ejemplo las identidades de arriba son manifestaciones distintas de una única ecuación que indica un isomorfismo entre dos especies:

$$\mathcal{A} = XE(\mathcal{A})$$

Esta ecuación esencialmente dice que especificar un árbol con raíz sobre un conjunto de nodos es equivalente a especificar un nodo y un conjunto de árboles con raíz sobre el resto de los nodos. Una vez planteada la ecuación entre especies, la teoría nos da métodos sistemáticos para deducir ecuaciones entre las diferentes series generatrices.

En estas tres clases el objetivo es introducir las nociones básicas de la teoría de especies combinatorias que nos permitan leer y escribir ecuaciones en esta categoría, apuntando a entender la explicación que ésta da de la teoría enumerativa de Pólya para el cálculo de tipos de estructuras (no etiquetadas) que usualmente son las que presentan mayor dificultad para ser enumeradas.

Para una introducción a las especies combinatorias es muy recomendable el artículo original [4] de A. Joyal así como el muy buen libro [2] de F. Bergeron, G. Labelle y P. Leroux.

1. Especies

Definición 1.1. Una *especie combinatoria* es un functor $M : \mathbb{B} \to \mathbb{E}$ donde $\mathbb{B}$ es el grupoide cuyos objetos son los conjuntos finitos y cuyos morfismos son las biyecciones. $\mathbb{E}$ es la categoría cuyos objetos son los conjuntos finitos y cuyos morfismos son las funciones. Si U es un conjunto finito, $M[U]$ es el conjunto de todas las *estructuras de especie M sobre U*.

En otras palabras, una especie es una regla M que por cada conjunto finito U produce un conjunto finito $M[U]$ –el conjunto de todas las estructuras etiquetadas de especie M–

y por cada biyección $f : U \to V$ –que puede pensarse como una manera de permutar las etiquetas– produce una función $M[f] : M[U] \to M[V]$ de manera que:

i) para todas las biyecciones $f : U \to V$ y $g : V \to W$

$$M[g \circ f] = M[g] \circ M[f]$$

ii) para todos los conjuntos U

$$M[Id_U] = Id_{M[U]}$$

Observar que $M[f]$ es forzosamente una biyección para toda f. Decimos que un elemento s de $M[U]$ es una *M-estructura*, y que U es su *conjunto subyacente*. Dadas M-estructuras $u \in M[U]$ y $v \in M[V]$, una biyección $f : U \to V$ tal que $M[f](u) = v$ es un *isomorfismo* entre u y v, y en tal caso decimos que u y v son M-estructuras isomorfas. El *tipo de isomorfismo* de u es el conjunto de todas las M-estructuras isomorfas a u.

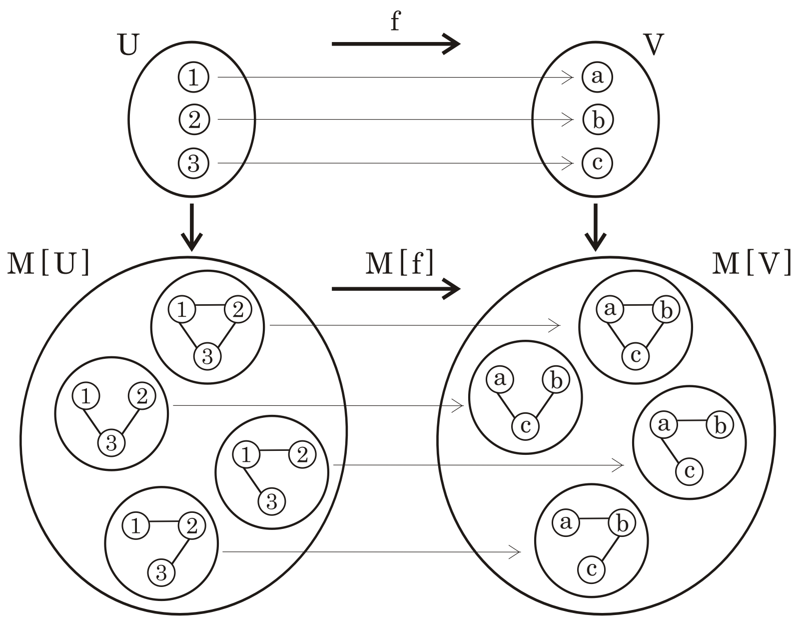

FIGURA 1. El functor M en este caso corresponde a la especie de los grafos conexos. La biyección $M[f]$, llamada *transporte de estructura*, puede verse como un reetiquetamiento de los nodos de los grafos.

1.1. Ejemplos de especies.

Ejemplo 1.2. Una estructura de *esquema simplicial* sobre el conjunto E es una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos no vacíos de E tales que: i) toda parte no vacía de un elemento de $\mathcal{F}$ está también en $\mathcal{F}$ y ii) los singletones $\{x\}$ donde $x \in E$ pertenecen a $\mathcal{F}$. Los elementos de $\mathcal{F}$ son los símplices. La dimensión de un símplice es su cardinal menos uno y la dimensión de un esquema simplicial es el máximo de las dimensiones de los símplices que contiene. La especie de los esquemas simpliciales está dada por el functor Sim que a cada conjunto E le hace corresponder el conjunto $Sim[E]$ de todos los esquemas simpliciales sobre E. Dada una biyección $f : U \to V$ la biyección $Sim[f]$ es la inducida por f.

Las propiedades de las M-estructuras que se preservan por isomorfismos definen subespecies de M. Decimos que N es una *subespecie* de M si para todo E se tiene que $N[E] \subseteq M[E]$ y para cada biyección $f : U \to V$ se cumple $N[f] = M[f]|_{N[U]}$.

Ejemplo 1.3. La especie $\mathcal{G}$ de los *grafos* está definida como la subespecie de Sim tal que $\mathcal{G}[E]$ es el conjunto de todas las estructuras simpliciales de dimensión 1. La especie $\mathcal{G}_c$ denota la subespecie de $\mathcal{G}$ de los *grafos conexos*.

Ejemplo 1.4. La especie de las *forestas* es la subespecie de $\mathcal{G}$ de los grafos sin ciclos. Las forestas conexas forman la especie $\mathfrak{a}$ de los *árboles*. Los árboles con un nodo distinguido del resto forman la especie $\mathcal{A}$ de los *árboles con raíz*, también llamados *arborescencias*. Más precisamente, la especie $\mathcal{A}$ se define por $\mathcal{A}[E] = E \times \mathfrak{a}[E]$ para cada E.

Ejemplo 1.5. Una estructura de *partición* sobre el conjunto E es una familia de subconjuntos no vacíos disjuntos de E cuya unión es E. Denotaremos por Par la especie de las particiones, donde $Par[E]$ es el conjunto de todas las estructuras de partición sobre E.

Ejemplo 1.6. La especie End es la especie de los *endomorfismos*, donde $End[E]$ es el conjunto de todas las funciones de E en E. Si $f : U \to V$ es una biyección y $g \in End[U]$, entonces $End[f](u) = f \circ u \circ f^{-1}$, es decir que el transporte de una estructura de endomorfismo a lo largo de una biyección f está dado por la *conjugación*. Es conveniente a veces visualizar a un endomorfismo de E como un grafo dirigido donde E es el conjunto de nodos y hay una flecha que va de x a y si y sólo si $f(x) = y$. Un *endomorfismo conexo* es un endomorfismo cuyo grafo es conexo. Denotamos por End_c la subespecie de los endomorfimos conexos.

Ejemplo 1.7. La especie $\mathcal{S}$ de las *permutaciones* es la subespecie de End de los endomorfismos biyectivos. La especie $\mathcal{C}$ de los *ciclos* es la subespecie de $\mathcal{S}$ de las permutaciones cuyos grafos son conexos. Convenimos que el conjunto vacío no admite ninguna estructura de ciclo, es decir $\mathcal{C}[\emptyset] = \emptyset$. De esta manera podemos decir que una permutación es un conjunto (posiblemente vacío) de ciclos. En particular $\mathcal{S}[\emptyset] = \{\emptyset\}$ tiene cardinal igual a uno.

Ejemplo 1.8. Denotamos por L la especie de las *listas* u *órdenes lineales*, donde $L[E]$ es el conjunto de todos los órdenes totales sobre E. Un órden lineal puede representarse por un grafo dirigido donde E es el conjunto de nodos y hay una flecha que va de x a y si y sólo si x es el antecesor de y.

Ejemplo 1.9. La especie E es la especie de los *conjuntos*. El conjunto de E-estructuras sobre U tiene un único elemento: $E[U] = \{U\}$. Denotamos por E_+ la especie de los *conjuntos no vacíos*, $E_+[U] = \{U\}$ si U es no vacío y $E_+[U] = \emptyset$ si U es vacío.

Ejemplo 1.10. La especie E_k es la especie de los *k-conjuntos*, es decir, los conjuntos de cardinal k. Está definida por

$$E_k[U] = \begin{cases} \{U\} & \text{si } |U| = k \\ \emptyset & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Es decir que no es posible poner una estructura de k-conjunto a un conjunto que no tenga cardinal k, y si tiene cardinal k entonces posee una única E_k-estructura.

Ejemplo 1.11. La especie X es la especie de los *singletones*. Es la especie E_k en el caso especial $k = 1$:

$$X[U] = \begin{cases} \{U\} & \text{si } |U| = 1 \\ \emptyset & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejemplo 1.12. La especie 1 es la especie *conjunto vacío*. Es la especie E_k en el caso especial $k = 0$. Es decir que U tiene una única estructura de conjunto vacío si es vacío, y ninguna estructura de conjunto vacío si no es vacío.

Ejemplo 1.13. La especie 0 es la especie *nula*. No importa cuál sea el conjunto U, éste no tiene 0-estructura alguna, es decir, $0[U] = \emptyset$ para todo U.

1.2. Especies como acciones del grupo S_n. Para cada entero $n \geq 0$ denotamos por $[n]$ el conjunto de los primeros n naturales y por $M[n]$ el conjunto de M-estructuras sobre $[n]$. Cada especie M determina una acción del grupo simétrico S_n de las endofunciones biyectivas de $[n]$ sobre el conjunto $M[n]$. Si $x \in M[n]$ y $\sigma \in S_n$ la acción está dada por

$$\sigma.x = M[\sigma](x)$$

Como M es un functor, se verifica que esta fórmula define un homomorfismo de grupo que va de S_n en $S_{M[n]}$. Es decir que una especie M define una familia de representaciones –una representación para cada n– del grupo simétrico S_n por permutaciones de un conjunto finito. Inversamente, dada una familia de acciones del grupo simétrico, una para cada n, es posible definir sin ambiguedad la especie M correspondiente.

La *órbita* de una M-estructura $x \in M[n]$ es el conjunto de todos los elementos de la forma $M[\sigma]x$ con $\sigma \in S_n$. El *estabilizador* o *grupo de automorfismos* de x es el conjunto de todos los $\sigma \in S_n$ tales que $M[\sigma]x = x$. Cada tipo de estructura de especie M corresponde a una única órbita por la acción de S_n para algún n.

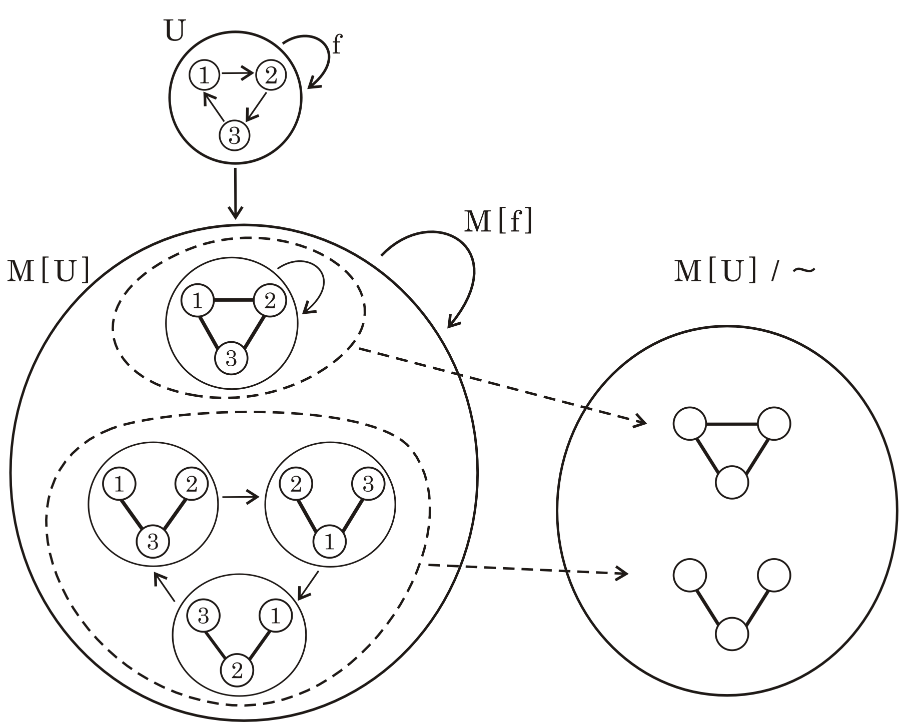

FIGURA 2. Cada permutación de los elementos de U determina una permutación de las estructuras de grafo conexo sobre U. Cada órbita de esta acción de S_3 sobre $M[3]$ corresponde a un tipo de estructura de grafo conexo de 3 vértices.

2. La categoría de las especies

Definición 2.1. Sean M y N dos especies. Un *morfismo* h de M en N es una transformación natural de M en N, considerando que M y N son ambos functores de $\mathbb{B}$ en $\mathbb{E}$.

En otras palabras, un morfismo de especies $h : M \to N$ es una familia de funciones $h_U : M[U] \to N[U]$, una función para cada conjunto finito U, de manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M[U] \arrow[r, "h_U"] \arrow[d, "M[f]"'] & N[U] \arrow[d, "N[f]"] \\ M[V] \arrow[r, "h_V"] & N[V] \end{tikzcd}$$

Podemos interpretar al morfismo h como una construcción que a partir de una M-estructura produce una N-estructura de manera que da lo mismo reetiquetar antes de la construcción que después.

Si para cada U el morfismo h_U es inversible, es decir, si h_U es una función biyectiva, decimos que h es un *isomorfismo de especies*. Si $f : M \to N$ es un isomorfismo, se dice que M y N son especies *isomorfas o combinatorialmente equivalentes* y si bien la notación $M \simeq N$ es usual, por regla se escribe $M = N$ sobreentendiendo que M y N no son necesariamente iguales sino sólo isomorfas.

Ejemplo 2.2. Sea $h : \mathcal{G} \to Par$ el morfismo que para cada estructura de grafo $g \in \mathcal{G}[U]$ sobre un conjunto de nodos U, construye la partición $h_U(g) \in Par[U]$ del conjunto U determinada por las componentes conexas del grafo g.

Ejemplo 2.3. Sea Inv la especie de las involuciones, esto es, $Inv[U]$ es el conjunto de todos los endomorfismos f de U tales $f^2 = Id$. Sea $\mathcal{G}_2$ la especie de los grafos (no dirigidos) cuyas componentes conexas son de tamaño ≤ 2. Si f es una involución en $Inv[U]$ definimos $h_U(f)$ como el grafo con nodos en U tal que $u, v \in U$ están conectados si y sólo si $f(u) = v$. Se verifica que h define un isomorfismo entre Inv y $\mathcal{G}_2$.

Ejemplo 2.4. Sea $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ la especie de las *permutaciones de árboles con raíz.* Una estructura de especie $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ sobre un conjunto U se contruye de la siguiente manera. Primero se elige una partición π de U. Luego sobre cada parte π_i se elige una estructura de árbol a_i con raíz r_i, y sobre el conjunto de miembros de la partición se elige una permutación σ. Vamos a definir un isomorfismo $h : \mathcal{S}(\mathcal{A}) \to End$. Dada una $\mathcal{S}(\mathcal{A})$-estructura p sobre U, definimos un endomorfismo $h_U(p) : U \to U$ como sigue. Sea $u \in U$, y sea π_i el miembro de la partición que contiene a u y a_i es árbol sobre el miembro π_i. Si u no es la raíz r_i entonces $h_U(p)(u)$ se define como el vecino de u en a_i más cercano a la raíz de r_i. Si $u = r_i$ entonces $h_U(p)(u) = r_{\sigma(i)}$. La construcción h determina un isomorfismo entre End y $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. La figura 3 ilustra este isomorfismo.

3. Series asociadas a una especie

3.1. Serie generatriz y serie de tipos. Son problemas fundamentales de la combinatoria enumerativa calcular los cardinales de $M[n]$ y de $M[n]/\sim$ para alguna especie dada. Vamos a definir ahora algunos invariantes de las especies cuyo cálculo involucra resolver estos problemas. Por invariante nos referimos a cualquier objeto que se asocie a cada especie de manera que especies isomorfas reciban el mismo objeto.

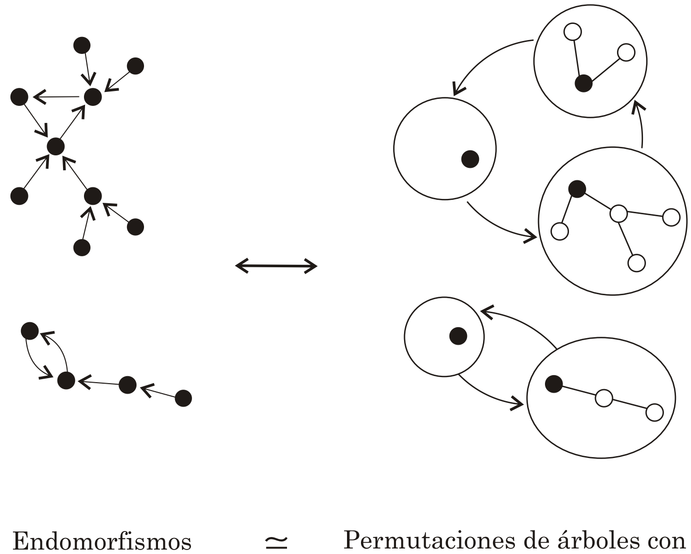

FIGURA 3. Isomorfimo entre la especie End de los endomorfismos de un conjunto y la especie $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ de las permutaciones de árboles con raíz

Definición 3.1. Sea M una especie, sea $M[n]$ el conjunto de M-estructuras sobre el conjunto $[n] = \{1, ..., n\}$ y $|M[n]|$ su cardinal. La *serie generatriz de M* o *serie exponencial de M* es la serie formal $M(x)$ definida por

$$M(x) = \sum_{n \geq 0} |M[n]| \frac{x^n}{n!}$$

Si h es un isomorfismo entre las especie M y N, tenemos biyecciones $h_{[n]}$ entre $M[n]$ y $N[n]$ para cada n, por lo tanto $M(x) = N(x)$, lo que muestra que la serie generatriz es un invariante. Más aún, para cada n la biyección $h_{[n]}$ es un isomorfismo entre la acción de S_n sobre $M[n]$ y la acción de S_n sobre $N[n]$. Por lo tanto la cantidad de órbitas en ambas acciones es idéntica, es decir, $|M[n]/\sim| = |N[n]/\sim|$ para todo n. Esto indica que la siguiente serie también es un invariante.

Definición 3.2. Sea M una especie y sea $M[n]/\sim$ el conjunto de los tipos de M-estructuras sobre $\{1, ..., n\}$. La *serie de tipos de estructuras* de M es la serie formal $\widetilde{M}(x)$ definida por

$$\widetilde{M}(x) = \sum_{n \geq 0} |M[n]/\sim| \, x^n$$

La serie de tipos de M-estructuras puede describirse como la serie generatriz de la siguiente especie $\widetilde{M}$ asociada a M.

Definición 3.3. Sea M una especie. Una $\widetilde{M}$-estructura sobre un conjunto U es un par (s, m) donde m es una M-estructura sobre U y s es un automorfismo de m, es decir que s es una estructura de permutación sobre U tal que $M[s](m) = m$.

Proposición 3.4. *La serie generatriz de la especie $\widetilde{M}$ es igual a la serie de tipos de estructuras de la especie M.*

Prueba: El grupo S_n actúa en $M[n]$ por la acción $s.m = M[s](m)$. Para cada $m \in M[n]$ definimos $Aut(m)$ como el conjunto de los s tales que $s.m = m$ y definimos

$Orb(m)$ como el conjunto de todos los $t \in M[n]/\sim$ es una órbita de la acción denotamos por $|t|$ la cantidad de elementos en la órbita t. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{M}[n]\right| &= \sum_{(s,m),s.m=m} 1 \;=\; \sum_{m \in M[n]} |Aut(m)| = \sum_{m \in M[n]} \frac{n!}{|Orb(m)|} \\ &= n! \sum_{t \in M[n]/\sim} \sum_{m \in t} \frac{1}{|Orb(m)|} \;=\; n! \sum_{t \in M[n]/\sim} \sum_{m \in t} \frac{1}{|t|} \\ &= n! \sum_{t \in M[n]/\sim} 1 \;=\; n!\, |M[n]/\sim|\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.5. Sea E la especie de los conjuntos. Entonces $E[n]$ consiste en una única estructura para cada n, de manera que $|E[n]| = |E[n]/\sim| = 1$. Luego

$$E(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \widetilde{E}(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Asimismo

$$E_k(x) = \frac{x^k}{k!} \qquad \widetilde{E}_k(x) = x^k$$

y

$$E_+(x) = e^x - 1 \qquad \widetilde{E}_+(x) = \frac{x}{1-x}$$

En particular las series generatrices de la especie singleton X, de la especie 1 del conjunto vacío y de la especie nula 0 son

$$X(x) = x \qquad 1(x) = 1 \qquad 0(x) = 0$$

Ejemplo 3.6. Consideremos la especie $\mathcal{S}$ de las permutaciones. Como $|\mathcal{S}[n]| = n!$ tenemos que la serie generatriz es

$$\mathcal{S}(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

La órbita o tipo de una permutación σ está caracterizada por su descomposición en ciclos. Si σ_i es la cantidad de ciclos de tamaño i, el tipo de σ está dado por la secuencia $\sigma_1\sigma_2...\sigma_n$, donde $\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 ... + n\sigma_n = n$. Tales secuencias están en biyección con los diagramas de Ferrer de n puntos, o con el conjunto de particiones del número n. Una partición del número n es una forma de escribir a n como suma de números naturales, sin importar el orden de los sumandos. Por lo tanto $|\mathcal{S}[n]/\sim| = p(n)$, donde $p(n)$ es la cantidad de particiones de n. La serie generatriz de los números $p(n)$ es bien conocida, ver por ejemplo [3], de la cual obtenemos

$$\widetilde{\mathcal{S}}(x) = \sum_{n \geq 0} p(n)\; x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)...}$$

Ejemplo 3.7. Consideremos la especie L de las listas. Sobre $[n]$ podemos formar $n!$ listas diferentes, es decir que $|L[n]| = n!$. Además podemos obtener cualquier lista reetiquetando los elementos de cualquier otra, es decir que $L[n]$ consiste en una única órbita. Entonces

$$L(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \widetilde{L}(x) = \frac{1}{1-x}$$

Observemos que $\mathcal{S}$ y L tienen la misma serie generatriz. Sin embargo $\mathcal{S}$ y L no son isomorfas como especies ya que sus series de tipos son distintas. Esto prueba que la serie generatriz no es un invariante completo de las especies. Por otro lado, vemos que E y L tienen la misma serie de tipos de estructuras. Sin embargo sus series generatrices son distintas, lo que muestra que no son isomorfas. Por lo tanto la serie de tipos de estructura tampoco es un invariante completo.

4. Operaciones con especies

4.1. Suma y producto. La *suma* o *unión disjunta* $U+V$ de dos conjuntos U y V se define como

$$U+V=(U\times\{1\})\ \cup(V\ \times\{2\})\,.$$

Si $f:U\to U'$ y $g:V\to V'$ son dos funciones, la función $f+g:U+V\to U'+V'$ se define por

$$(f+g)(u,1)=f(u)\qquad\qquad (f+g)(v,2)=g(v).$$

Si bien $U+V$ no es igual a $V+U$, hay un isomorfismo entre ambos conjuntos. Asimismo $U+(V+W)\simeq(U+V)+W$.

Definición 4.1. La *suma* de dos especies M y N es la especie $M+N$ definida por

$$(M+N)[U]=M[U]+N[U]\qquad\qquad (M+N)[f]=M[f]+N[f]$$

donde $f:U\to V$ es una biyección entre conjuntos finitos.

Intuitivamente, poner una estructura de especie $M+N$ sobre un conjunto U es elegir entre poner sobre U una M-estructura o una N-estructura.

Observar que $|(M+N)[n]|=|M[n]|+|N[n]|$ para todo n. El conjunto de órbitas en $(M+N)[U]$ es la unión disjunta del conjunto de las órbitas en $M[U]$ con el conjunto de las órbitas en $N[U]$. Por lo tanto

Proposición 4.2. *La series asociadas a la suma $M+N$ son*

$$(M+N)(x)=M(x)+N(x)\qquad\qquad (\widetilde{M+N})(x)=\widetilde{M}(x)+\widetilde{N}(x)$$

Definición 4.3. La especie *producto* MN se define por

$$(MN)[U]=\sum_{U_1+U_2=U}M[U_1]\times N[U_2]\qquad\qquad (MN)[f]=\sum_{U_1+U_2=U}M[f|_{U_1}]\times N[f|_{U_2}]$$

Esto significa que poner sobre U una estructura de especie MN consiste en elegir un subconjunto U_1, poner sobre U_1 una M-estructura y poner sobre su complemento U_2 una N-estructura. Se puede probar que:

Proposición 4.4. *Cualesquiera sean las especies M, N y H, tenemos los siguientes isomorfismos de especies:*

i) $(MN)H=M(NH)$
ii) $MN=NM$
iii) $H(M+N)=HM+HN$

Si $M_1,M_2,...,M_n$ son especies, poner sobre U una estructura de la especie producto $M_1M_2...M_n$ consiste en particionar U en n subconjuntos U_i (posiblemente algunos vacíos) y poner sobre U_i una estructura de especie M_i. En particular, si M es una especie, poner sobre U una estructura de especie M^n consiste en elegir para cada $i=1,...,n$ un subconjunto U_i de manera que los U_i son disjuntos y cubren a U, y luego poner sobre cada U_i una M-estructura. Remarquemos que en una M^n-estructura las partes U_i tienen un orden.

Proposición 4.5. *La serie generatriz del producto MN es*

$$(MN)(x) = M(x)N(x)$$

Prueba: El cardinal del conjunto de MN-estructuras sobre n es

$$|(MN)[n]| = \sum_{U_1+U_2=U} |M[U_1]|\,|N[U_2]| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |M[k]|\,|N[n-k]|$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{|M[k]|}{k!} \frac{|N[n-k]|}{(n-k)!}$$

Entonces

$$(MN)(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{|(MN)[n]|}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} \frac{|M[k]|}{k!} x^k \frac{|N[n-k]|}{(n-k)!} x^{n-k} = M(x)\ N(x)$$

□

Ejemplo 4.6. Sea $\mathcal{D}$ la especie de las permutaciones que no tienen puntos fijos, es decir, $\mathcal{D}[U]$ es el conjunto de las biyecciones $\sigma : U \to U$ tales que $\sigma(u) \neq u$ para todo $u \in U$. Se puede ver que la especie $\mathcal{S}$ de todas las permutaciones es isomorfa al producto de la especie E de los conjuntos por la especie $\mathcal{D}$, es decir, $\mathcal{S} = E\mathcal{D}$. Entonces $\mathcal{S}(x) = E(x)\mathcal{D}(x)$, lo que permite deducir una forma cerrada de la serie generatriz de $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...\right)\left(1 + x^2 + x^3 + x^4 + ...\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n$$

Esto muestra que $\mathcal{D}[n] = n!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)$, de donde vemos que cuando $n \to \infty$ la probabilidad de que una permutación tomada al azar no tenga un punto fijo tiende a $1/e$.

También se puede verificar que la serie de tipos de estructura se comporta bien con respecto a la suma y multiplicación de especies.

Proposición 4.7. *Si M y N son especies entonces*

$$(\widetilde{M+N})(x) = \widetilde{M}(x) + \widetilde{N}(x), \qquad (\widetilde{MN})(x) = \widetilde{M}(x)\widetilde{N}(x).$$

4.2. Composición de especies. Sea N una especie tal que $N[0] = \emptyset$. Dotar a un conjunto finito U de una N^n-estructura consiste en particionar a U en una familia ordenada de exactamente n subconjuntos no vacíos $U_1, U_2, ..., U_n$ y elegir sobre cada U_i una N-estructura. Podemos pensar que cada parte U_i está rotulada con un número del 1 al n. El grupo S_n actúa sobre estas estructuras intercambiando estos rótulos. Una estructura de especie N^n/S_n corresponde a una órbita de esta acción, es decir, consiste en particionar U en n partes no vacías sin rotular y colocar sobre cada parte una N-estructura. Se puede ver que la serie generatriz de N^n/S_n es

$$(N^n/S_n)(x) = \frac{N(x)^n}{n!}$$

Sea M una especie cualquiera. La especie *composición* $M(N)$ se define como sigue. Especificar una $M(N)$-estructura sobre un conjunto U consiste en especificar

i) una partición π del conjunto U, con miembros $U_1, U_2, ...$

ii) una M-estructura sobre el conjunto $\pi = \{U_1, U_2, ...\}$ de los miembros de esa partición

iii) una N-estructura sobre cada conjunto U_i

Proposición 4.8. *La serie generatriz de la composición de dos especies satisface*

$$M(N)(x) = M(N(x))$$

Prueba: Sea M_n la especie que asigna una M-estructura cuando el conjunto subyacente tiene cardinal n, y no asigna estructura en caso contrario. Similarmente, sea $M_n(N)$ la subespecie de $M(N)$ donde la partición del conjunto tiene exactamente n miembros. Entonces

$$M = \sum_{n\geq 0} M_n \qquad\qquad M(N) = \sum_{n\geq 0} M_n(N)$$

De la definición de $M(N)$ podemos ver que $M_n(N) = M_n \times (N^n/S_n)$. En particular

$$M_n(N)(x) = |M[n]|\,(N^n/S_n)(x) = |M[n]|\,\frac{N(x)^n}{n!}$$

Luego

$$M(N)(x) = \sum_{n\geq 0} |M[n]|\,\frac{N(x)^n}{n!} = M(N(x))$$

□

Ejemplo 4.9. La especie $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ de las permutaciones de árboles con raíz está ilustrada en la parte derecha de la Figura 3. Efectivamente, es una composición de la especie $\mathcal{S}$ de las permutaciones con la especie $\mathcal{A}$ de los árboles con raíz. El conjunto U es particionado en miembros, sobre cada miembro vemos una estructura de árbol con raíz y vemos una estructura exterior de permutación sobre el conjunto de los miembros.

Ejemplo 4.10. Una estructura de partición sobre un conjunto U consiste en especificar una partición de U en miembros U_i, sobre cada U_i colocar una estructura de conjunto no vacío, y sobre el conjunto de los miembros colocar una estructura de conjunto. Dicho brevemente, una partición es un conjunto de conjuntos no vacíos. Entonces $Par = E(E_+)$. De este isomorfismo de especies se deduce que

$$Par(x) = e^{e^x - 1}$$

En forma similar podemos calcular la serie generatriz de las particiones en k partes. Esta especie se puede expresar como $E_k(E_+)$. Por lo tanto su serie generatriz es

$$E_k(E_+)(x) = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}$$

Ejemplo 4.11. Colocar una estructura de permutación sobre un conjunto U consiste en especificar una partición de U en miembros U_i, sobre cada U_i colocar una estructura de ciclo, y sobre el conjunto de los miembros colocar una estructura de conjunto. Es decir, una permutación es un conjunto de ciclos (que por definición son de longitud no nula). Entonces $\mathcal{S} = E(\mathcal{C})$. La serie generatriz de la especie de las permutaciones con exactamente k ciclos es

$$E_k(\mathcal{C})(x) = \frac{1}{k!}\log^k\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

5. Especies ponderadas

La serie generatriz de una especie M da una medida de la especie M en el sentido que es una recopilación de los cardinales $|M[n]|$, los cuales son una medida natural de los tamaños de los conjuntos $M[n]$ de M-estructuras sobre $\{1, ..., n\}$. El cardinal de un conjunto finito es, en particular, una función μ que a cada conjunto finito A le asigna un elemento de un semianillo $\mathbb{S}$ –el de los números naturales– que satisface:

i) $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$,

ii) $\mu(A \times B) = \mu(A)\mu(B)$.

Permitiendo que el semianillo $\mathbb{S}$ sea arbitrario podemos obtener medidas más refinadas de los conjuntos de estructuras. Por ejemplo, en lugar de medir el conjunto de los grafos de n nodos por su cardinal, podemos asociarle el polinomio $g_{n0} + g_{n1}x + g_{n2}x^2 + ...$ donde g_{nk} es la cantidad de estructuras de grafo con k puentes sobre un conjunto de n nodos. A continuación veremos una manera de construir tales medidas considerando la categoría de los conjuntos ponderados.

5.1. Categoría de los conjuntos ponderados. Sea $\mathbb{M}$ un monoide donde cada elemento tiene un número finito de factorizaciones. Un *conjunto ponderado* es un par (A, ω) donde A es un conjunto y ω es una función $\omega : A \to \mathbb{M}$. En tal caso decimos que ω es una $\mathbb{M}$-ponderación y que $\omega(a)$ es el peso de a.

Un *morfismo* entre conjuntos ponderados (A, ω) y (B, ν) es una función $f : A \to B$ que preserva los pesos, es decir, tal que $\nu \circ f = \omega$.

La *suma* $(A, \omega)+(B, \nu)$ de conjuntos ponderados es el par $(A+B, \omega+\nu)$ donde $A+B$ es la union disjunta de A y B y la ponderación $\omega+\nu$ está definida por $(\omega+\nu)(x) = \omega(x)$ si $x \in A$ y $(\omega + \nu)(x) = \nu(x)$ si $x \in B$.

El *producto* $(A, \omega) \times (B, \nu)$ de conjuntos ponderados es el par $(A \times B, \omega \times \nu)$ donde $A \times B$ es el producto cartesiano y $\omega \times \nu$ está definida por $(\omega \times \nu)(a, b) = \omega(a)\nu(b)$.

El anillo de *series formales* $\mathbb{Z}[\mathbb{M}]$ es el anillo de las combinaciones lineales formales de elementos de $\mathbb{M}$. Un elemento f de $\mathbb{Z}[\mathbb{M}]$ es de la forma

$$f = \sum_{x \in \mathbb{M}} f(x)x$$

donde $f(x)$ es un número entero y es nulo excepto para un conjunto finito de elementos de $\mathbb{M}$. La suma y el producto en $\mathbb{Z}[\mathbb{M}]$ están dados por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(fg)(x) = \sum_{uv=x} f(u)g(v)$$

Un conjunto $\mathbb{M}$-ponderado es *sumable* si $\omega^{-1}(m)$ es un conjunto finito para todo peso $m \in \mathbb{M}$.

Sea $\mathbb{E}_{\mathbb{M}}$ la categoría cuyos objetos son los conjuntos $\mathbb{M}$-ponderados sumables y cuyos morfismos son las funciones que preservan las ponderaciones.

Sea $(A, \omega) \in \mathbb{E}_{\mathbb{M}}$. La *cardinalidad* (o *peso total*) de A es la serie formal en $\mathbb{Z}[\mathbb{M}]$ definida por

$$|A|_\omega = \sum_{a \in A} \omega(a)$$

Proposición 5.1. *Si* $A, B \in \mathbb{E}_{\mathbb{M}}$ *entonces*

$$|A + B|_{\omega+\nu} = |A|_\omega + |B|_\nu$$
$$|A \times B|_{\omega\times\nu} = |A|_\omega\,|B|_\nu$$

5.2. Especies ponderadas y sus series asociadas. Una *especie ponderada* es un functor $M_\omega : \mathbb{B} \to \mathbb{E}_{\mathbb{M}}$. Es decir que M_ω es una regla que

i) para cada conjunto finito U produce un conjunto $\mathbb{M}$-ponderado sumable $M[U] = (M[U], \omega_U)$

ii) para cada biyección $f : U \to V$ produce una función $M[f] : M_\omega[U] \to M[V]$ que preserva los pesos de manera que

a) para todas las biyecciones $f : U \to V$ y $g : V \to W$

$$M[g \circ f] = M[g] \circ M[f]$$

b) para todos los conjuntos U

$$M[Id_U] = Id_{M[U]}$$

La función $M[f]$ se llama el *tranporte de estructura a lo largo de* f. Se deduce de la definición que $M[f]$ es una biyección que preserva los pesos y por lo tanto

$$|M[U]|_{\omega_U} = |M[V]|_{\omega_V}$$

El cardinal $|M[U]|_{\omega_U}$ lo vamos a notar más simplemente por $|M[U]|_\omega$ y una especie ponderada M la vamos notar por M_ω donde ω hace referencia a la familia de ponderaciones ω_U.

La *serie generatriz* de una especie ponderada M se define como

$$M_\omega(x) = \sum_{n \geq 0} |M[n]|_\omega \; \frac{x^n}{n!}$$

Si u y v son estructuras en $M[U]$ y $M[V]$ respectivamente tales que $M[f](u) = v$, decimos que u y v son isomorfas. Observar que en tal caso $\omega_U(u) = \omega_V(v)$, por lo tanto el peso de las estructuras es constante a lo largo de cada clase de isomorfismo. Esto permite definir sin ambiguedad el *peso* $\omega(t)$ *de un tipo de estructura* t como el peso $\omega(a)$ de cualquier estructura a que represente a la clase t. De esta manera, la ponderación de $M[U]$ induce una ponderación del conjunto $M[U]/\sim$ de los tipos de estructuras y la cardinalidad de $M[U]/\sim$ queda definida como

$$|M[U]/\sim|_\omega = \sum_{t \in M[U]/\sim} \omega(t)$$

La *serie generatriz de tipos* de la especie ponderada M se define como

$$\widetilde{M}_\omega(x) = \sum_{n \geq 0} |M[n]/\sim|_\omega \; x^n$$

Ejemplo 5.2. Sea $\mathcal{S}$ la especie de las permutaciones. Sea $\sigma \in \mathcal{S}[n]$ una estructura de permutación sobre el conjunto $[n] = \{1, ..., n\}$ y sea σ_i la cantidad de ciclos de tamaño i en su descomposición en ciclos. Para cada biyección $f : [n] \to [n]$ tenemos una biyección $\mathcal{S}[f] : \mathcal{S}[n] \to \mathcal{S}[n]$ dada por el functor $\mathcal{S}$. Es decir que $\mathcal{S}$ determina una acción del grupo de permutaciones sobre el conjunto de las estructuras de permutación dada por $\mathcal{S}[f](\sigma) = f\sigma f^{-1}$. Es útil interpretar esta acción representando a σ por su grafo asociado y a f como un reetiquetamiento de los vértices del grafo. La descomposición en componentes conexas corresponde a la descomposición de σ en ciclos. La órbita de la permutación σ abarca a todas las permutaciones con la misma descomposición. Luego podemos identificar al *tipo de la permutacíón* σ con la secuencia $\sigma_1, \sigma_2, ...$ El peso de σ

se define como $\omega(\sigma) = s_1^{\sigma_1} s_2^{\sigma_2} s_3^{\sigma_3} ... s_n^{\sigma_n}$. La cardinalidad de $\mathcal{S}[n]$ es

$$|\mathcal{S}[n]|_\omega = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}[n]} s_1^{\sigma_1} s_2^{\sigma_2} ... s_n^{\sigma_n} = \sum_{r_1+2r_2+...+nr_n=n} p(r_1,...,r_n)\ s_1^{r_1} s_2^{r_2} ... s_n^{r_n}$$

donde $p(r_1,...,r_n)$ es la cantidad de permutaciones sobre $[n]$ con peso $s_1^{r_1} s_2^{r_2} ... s_n^{r_n}$. Observemos que $p(r_1,...,r_n)$ es el cardinal de la órbita de una permutación de tipo $r_1, r_2, ...$. Entonces para calcularlo es suficiente calcular el estabilizador de una permutación tal. Si interpretamos a σ como un grafo etiquetado, debemos contar cuántos reetiquetamientos preservan la estructura de grafo etiquetado.

Una forma de reetiquetar preservando al grafo es que cada etiqueta se mantenga en su componente conexa , produciendo en cada componente un corrimiento cíclico. En una componente de i elementos tenemos i tales corrimientos. Por lo tanto hay $1^{r_1} 2^{r_2} 3^{r_3} ...$ formas diferentes de reetiquetar de esta manera.

Por otro lado, podemos intercambiar en bloque las etiquetas entre componentes de igual tamaño, preservando un orden prefijado en cada componente cíclica. Hay $r_1! r_2! r_3! ...$ intercambios de este tipo. Estos movimientos de las etiquetas conmutan con los del tipo anterior.

Puede verse que cualquier reetiquetamiento que preserve la estructura de grafo de σ se obtiene de forma única como composición de un movimiento del primer tipo compuesto con uno del segundo tipo. Por lo tanto el estabilizador de σ tiene cardinal $1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! 3^{r_3} r_3! ...$ y por lo tanto

$$p(r_1,...,r_n) = \frac{n!}{1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! 3^{r_3} r_3! ...}$$

De aquí obtenemos que la serie generatriz de la especie de las *permutaciones ponderadas* es

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\omega(x) &= \sum_{n\geq 0} \sum_{r_1+2r_2+3r_3+...+nr_n=n} \frac{n!\ s_1^{r_1} s_2^{r_2} ... s_n^{r_n}}{1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! 3^{r_3} r_3! ... n^{r_n} r_n!}\ \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{r_1, r_2, ... \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{1}{r_1!} \left(\frac{x\ s_1}{1}\right)^{r_1} \frac{1}{r_2!} \left(\frac{x\ s_2}{2}\right)^{r_2} \frac{1}{r_3!} \left(\frac{x\ s_3}{3}\right)^{r_3} ... \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{x\ s_k}{k}\right)^r \right) \ = \ \exp\left(x\ \left(\frac{s_1}{1} + \frac{s_2}{2} + \frac{s_3}{3} + ...\right)\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3. Consideremos la especie Par de las particiones. Si $\pi \in Par[n]$ es una partición del conjunto $[n]$ y π_i es el número de partes de tamaño i en π, se define el peso $\omega(\pi)$ como el monomio $s_1^{\pi_1} s_2^{\pi_2} ... s_n^{\pi_n}$.

Al igual que en el caso de la especie de permutaciones, cada tipo de partición está caracterizado por su peso. Es decir que las órbitas de la acción del grupo simétrico sobre el conjunto $Par[n]$ son distinguidas por el peso ω.

La cardinalidad de $Par[n]$ es

$$|Par[n]|_\omega = \sum_{\pi \in Par[n]} s_1^{\pi_1} s_2^{\pi_2} ... s_n^{\pi_n} = \sum_{r_1+2r_2+...+nr_n=n} q(r_1,...,r_n)\ s_1^{r_1} s_2^{r_2} ... s_n^{r_n}$$

donde $q(r_1,...,r_n)$ es la cantidad de particiones sobre $[n]$ con peso $s_1^{r_1} s_2^{r_2} ... s_n^{r_n}$. El cálculo de $q(r_1,...,r_n)$ es muy similar al caso de la especie de permutaciones en el ejemplo anterior. Es suficiente calcular el subgrupo estabilizador de una partición de tipo $r_1, r_2, ..., r_n$.

Por un lado tenemos los reetiquetamientos que mantienen cada etiqueta dentro de la misma parte donde habita. Hay $(1!)^{r_1}(2!)^{r_2}(3!)^{r_3}...(n!)^{r_n}$ de estos movimientos de etiquetas. Por otro lado están los movimientos que intercambian las etiquetas en bloque entre partes de igual tamaño manteniendo un orden prefijado en cada parte. Hay $r_1!r_2!...r_n!$ de estos reetiquetamientos, los cuales conmutan con los anteriores. Luego

$$q(r_1, ..., r_n) = \frac{n!}{r_1!(1!)^{r_1}\ r_2!(2!)^{r_2}...r_n!(n!)^{r_n}}$$

Obtenemos así la función generatriz

$$\begin{aligned}\mathrm{Par}_\omega(x) &= \sum_{n\geq 0}\ \sum_{r_1+2r_2+...+nr_n=n} \frac{n!\ s_1^{r_1}s_2^{r_2}...s_n^{r_n}}{(1!)^{r_1}r_1!(2!)^{r_2}r_2!(3!)^{r_3}r_3!...(n!)^{r_n}r_n!}\ \frac{x^n}{n!}\\ &= \exp\left(x\ \left(\frac{s_1}{1!}+\frac{s_2}{2!}+\frac{s_3}{3!}+...\right)\right)\end{aligned}$$

Observar que sustituyendo x por 1 y s_i por z^i se obtiene $e^{(e^z-1)}$, la función generatriz ordinaria de la especie de particiones.

Las operaciones de suma y producto de especies ponderadas se definen imitando la definición de suma y producto de especies ordinarias reemplazando la suma y producto cartesiano de conjuntos por sus versiones ponderadas. En forma análoga se verifica que las series generatrices y las series de tipos de especies ponderadas se comportan bien con respecto a estas operaciones.

Proposición 5.4. *Si M_ω y N_μ son especies ponderadas entonces*

$$(M_\omega + N_\mu)(x) = M_\omega(x) + N_\mu(x), \qquad (M_\omega N_\mu)(x) = M_\omega(x)N_\mu(x).$$

$$(\widetilde{M_\omega + N_\mu})(x) = \widetilde{M_\omega}(x) + \widetilde{N_\mu}(x), \qquad (\widetilde{M_\omega N_\mu})(x) = \widetilde{M_\omega}(x)\widetilde{N_\mu}(x).$$

5.3. Serie indicatriz de ciclos. Dada una especie (ordinaria) M, observamos que la especie $\widetilde{M}$ –cuyas estructuras son los pares (m, σ) donde σ es un automorfismo de la M-estructura m– tiene una ponderación natural. El peso de un elemento (m, σ) es $s_1^{\sigma_1}s_2^{\sigma_2}...$ donde σ_i es la cantidad de ciclos de longitud i en σ. Denotamos a esta especie ponderada por $\widehat{M}$. La serie generatriz de $\widehat{M}$ como especie ponderada se puede escribir como

$$\widehat{M}(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\left(\sum_{\sigma\in S_n}|M[\sigma]|\ \ s_1^{\sigma_1}s_2^{\sigma_2}s_3^{\sigma_3}...\right)$$

donde $M[\sigma]$ es el conjunto de M-estructuras sobre $[n]$ que son fijadas por la permutación σ de $[n]$. La *serie indicatriz de ciclos de M* (o simplemente serie de ciclos) es la serie formal en las variables $s_1, s_2, ...$ definida por

$$Z_M(s_1, s_2, s_3, ...) = \widehat{M}(1).$$

Ejemplo 5.5. Sea M la especie E de los conjuntos. En este caso $\widehat{M}$ coincide con la especie ponderada de las permutaciones $\mathcal{S}_\omega$. De acuerdo al cálculo que ya efectuamos de la serie $\mathcal{S}_\omega(x)$ obtenemos que la serie de ciclos de E está dada por

$$Z_E(s_1, s_2, ...) = \exp\ \left(\frac{s_1}{1}+\frac{s_2}{2}+\frac{s_3}{3}+...\right)$$

De las propiedades de las series ponderadas vemos que

$$Z_{M+N} = Z_M + Z_N, \qquad\qquad Z_{MN} = Z_M Z_N.$$

Veamos que la serie de ciclos es un refinamiento de la serie generatriz y de la serie de tipos a la vez.

Observar que el cardinal del conjunto $M[\sigma]$ sólo depende del tipo $n_1, n_2...$ de la permutación σ. Entonces podemos escribir $M[\sigma] = M[n_1, n_2, ...]$.

Proposición 5.6. *La serie de ciclos de M se puede escribir como*

$$Z_M(s_1, s_2, ...) = \sum_{n_1+2n_2+3n_3+...<\infty} |M[n_1 n_2 ...]| \frac{s_1^{n_1} s_2^{n_2} s_3^{n_3} ...}{1^{n_1} n_1!\ 2^{n_2} n_2!\ 3^{n_3} n_3! ...}$$

Prueba: La identidad se consigue agrupando los términos de acuerdo al tipo de cada permutación σ en la suma original y recordando que $1^{n_1}n_1!\ 2^{n_2}n_2!\ 3^{n_3}n_3!...$ es el cardinal del subgrupo estabilizador de una permutación de tipo $n_1, n_2, ...$ cuando el grupo S_n actúa por conjugación sobre el conjunto de las permutaciones. □

Corolario 5.7. *La serie generatriz de M se obtiene como*

$$Z_M(x, 0, 0, ...) = M(x)$$

Sea $M/\sim$ el conjunto de tipos de M-estructuras, esto es, un elemento t de $M/\sim$ es una órbita en $M[n]$ por la acción de S_n para algún n. Si G es un subgrupo de S_n entonces el *índice de ciclos* de G se define como

$$Z(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} s_1^{\sigma_1} s_2^{\sigma_2} s_3^{\sigma_3} ...$$

Dado $x \in t$, con $t \in M/\sim$, si G_x es el subgrupo estabilizador de x observamos que $Z(G_x)$ sólo depende de t, por lo tanto denotamos por $Z(G_t)$ y por $|G_t|$ al índice de ciclos y al cardinal de G_x respectivamente. La cantidad de elementos en la órbita t la denotamos por $|t|$.

Proposición 5.8. *La serie de ciclos de M se puede escribir como*

$$Z_M(s_1, s_2, ...) = \sum_{t \in M/\sim} Z(G_t)$$

Prueba:

$$\begin{aligned} Z_M &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{(x,\sigma)\in \widetilde{M}[n]} s_1^{\sigma_1} s_2^{\sigma_2} ... = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{x \in M[n]} \sum_{\sigma \in G_x} s_1^{\sigma_1} s_2^{\sigma_2} ... \\ &= \sum_{n\geq 0} \sum_{t\in M[n]/\sim} \frac{1}{n!} \sum_{x\in t} \sum_{\sigma\in G_x} s_1^{\sigma_1} s_2^{\sigma_2} ... = \sum_{n\geq 0} \sum_{t\in M[n]/\sim} \frac{|t|}{n!} \sum_{\sigma\in G_t} s_1^{\sigma_1} s_2^{\sigma_2} ... \\ &= \sum_{n\geq 0} \sum_{t\in M[n]/\sim} \frac{1}{|G_t|} \sum_{\sigma \in G_t} s_1^{\sigma_1} s_2^{\sigma_2} ... = \sum_{t\in M/\sim} Z(G_t) \end{aligned}$$

□

Corolario 5.9. *La serie de tipos de estructura de M se obtiene como*

$$Z_M(x, x^2, x^3, ...) = \widetilde{M}(x)$$

Prueba: El cálculo anterior muestra que

$$\begin{aligned} Z_M(x, x^2, x^3, ...) &= \sum_{n\geq 0} \sum_{t\in M[n]/\sim} \frac{1}{|G_t|} \sum_{\sigma\in G_t} x^{\sigma_1+2\sigma_2+3\sigma_3+...} \\ &= \sum_{n\geq 0} \sum_{t\in M[n]/\sim} \frac{1}{|G_t|} \sum_{\sigma\in G_t} x^n = \sum_{n\geq 0} \sum_{t\in M[n]/\sim} x^n = \widetilde{M}(x) \end{aligned}$$

□

6. Teorema de Redfield-Pólya

Un problema fundamental en combinatoria es contar el número de órbitas cuando un grupo actúa sobre un conjunto finito. Una especie M brinda una familia de acciones –una para cada n– del grupo S_n sobre el conjunto de M-estructuras $M[n]$. Entonces el problema de contar las órbitas de estas acciones es equivalente al de calcular la serie de tipos $\widetilde{M}(x)$.

Como vimos, la serie de tipos se comporta bien con respecto a las operaciones de suma y multiplicación de especies. Sin embargo, no puede decirse lo mismo respecto de la operación de composición. En efecto, la identidad $\widetilde{M(N)}(x) = \widetilde{M}(\widetilde{N}(x))$ es falsa. Por ejemplo, si $\mathcal{S}$, E y $\mathcal{C}$ son las especies de las permutaciones, los conjuntos y los ciclos respectivamente, tenemos el isomorfismo de especies $\mathcal{S} = E(\mathcal{C})$. En efecto, una permutación es un conjunto de ciclos. Sin embargo sus series de tipos son

$$\widetilde{\mathcal{S}}(x) = \prod_{n\geq 0} \frac{1}{1-x^n} \qquad \widetilde{\mathcal{C}}(x) = \frac{x}{1-x} \qquad \widetilde{E}(x) = \frac{1}{1-x}$$

Dado que la composición es una operación fundamental en la construcción de especies interesantes, es importante disponer de un método para calcular la serie de tipos de estructura de una composición. La clave está en interpretar a la serie de tipos como $Z_M(x, x^2, x^3, ...)$ puesto que la serie de ciclos satisface la siguiente ley de sustitución.

Proposición 6.1. *Sean M y N especies, tal que $N[\emptyset] = \emptyset$. Entonces*

$$Z_{M(N)}(s_1, s_2, s_3, ...) = Z_M(Z_N(s_1, s_2, s_3, ...), Z_N(s_2, s_4, s_6, ...), Z_N(s_3, s_6, s_9, ...), ...)$$

Nos referiremos a esta identidad como el *teorema de enumeración de Pólya* o teorema de Redfield-Pólya. En esta sección damos una guía para probar esta identidad de series formales basándonos en la prueba y la teoría formulada por Joyal en [4].

Como consecuencia inmediata de esta fórmula obtenemos

Corolario 6.2. *La serie de tipos de estructura de la composición de especies está dada por*

$$\widetilde{M(N)}(x) = Z_M(\widetilde{N}(x), \widetilde{N}(x^2), \widetilde{N}(x^3), ...)$$

Ejemplo 6.3. De la expresión que obtuvimos para la serie de ciclos de la especie de los conjuntos obtenemos que

$$\widetilde{E(N)}(x) = \exp\left(\frac{N(x)}{1} + \frac{N(x^2)}{2} + \frac{N(x^3)}{3} + ...\right)$$

Para probar la proposición 6.1 debemos calcular la serie generatriz de la especie ponderada $\widehat{M(N)}$. Es decir que debemos analizar la especie $\widehat{M(N)}$ con la ponderación determinada por la descomposición en ciclos del automorfismo. Una estructura de especie $\widehat{M(N)}$ sobre un conjunto U es un par (x, σ) donde x es una $M(N)$-estructura y

σ es una permutación de los elementos de U que fija la estructura x, es decir tal que $M(N)[\sigma]x = x$. En la Figura 4 vemos un ejemplo de una estructura de esta especie y del peso correspondiente.

La $M(N)$-estructura x sobre U es de la forma $x = (m, n_1, n_2, ...)$, es decir consiste en una partición de U, una N-estructura n_i sobre cada miembro U_i de la partición, y una M-estructura m sobre el conjunto de los miembros. Entonces, el automorfismo σ de x induce una permutación $\overline{\sigma}$ entre los miembros de la partición. Observemos que el par $(m, \overline{\sigma})$ es una estructura de especie $\widetilde{M}$ sobre el conjunto de los miembros de la partición de U.

Para entender esta estructura conviene considerar primero el caso en que la permutación inducida $\overline{\sigma}$ consiste en sólo un ciclo. Nos referiremos a tales estructuras como N-coronas. En la Figura 4 podemos observar cómo el automorfismo σ induce la descomposición de una $\widetilde{M(N)}$-estructura como unión disjunta de N-coronas.

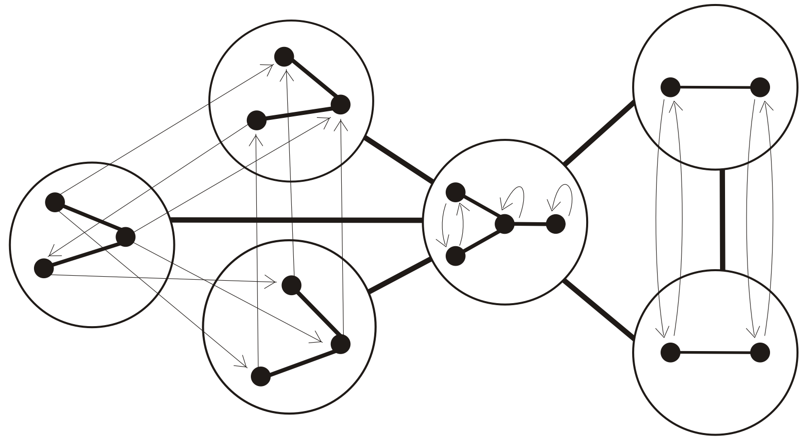

FIGURA 4. Ejemplo de una estructura de una especie de la forma $\widetilde{M(N)}$. En este caso M es la especie de los grafos y N es la especie de los árboles. El automorfismo σ está representado por las flechas delgadas y descompone a la estructura en tres N-coronas. Una corona de longitud 3 que aporta un peso $s_3 s_6$. Otra corona de longitud 1 que aporta un peso $s_1^2 s_2$. Y una última corona de longitud 2 que aporta un peso s_2^2. Por lo tanto el peso total de la estructura es $s_1^2 s_2^3 s_3 s_6$.

6.1. Coronas de N-estructuras. Colocar una estructura de *N-corona de longitud n* sobre conjunto U consiste en particionar al conjunto U en n partes iguales $U_1, U_2, ..., U_n$, colocar una N-estructura sobre cada U_i y especificar biyecciones $\sigma_i : U_i \to U_{i+1}$ (identificando $n+1$ con 1) de manera que realicen isomorfismos de N-estructuras. En otras palabras, una N-corona es un conjunto de N-estructuras junto con un automorfismo que permuta circularmente los miembros de la partición. Denotamos por C_n^N a la especie de las N-coronas de longitud n.

Una estructura de *N-corona marcada* (de longitud n) sobre U consiste en una N-corona de longitud n sobre U junto con un elemento del conjunto $\{U_1, ..., U_n\}$. Denotamos por L_n^N a esta especie. Observar que $\left|L_n^N[U]\right| = n \left|C_n^N[U]\right|$.

Proposición 6.4. *Sea L_n la especie de las listas de longitud n. Entonces tenemos el isomorfismo de especies*

$$L_n^N = \widetilde{N}(L_n)$$

El isomorfismo entre estas especies está sugerido por la Figura 5. La idea es considerar la parte U_i distinguida y componer los isomorfismos saliendo de ella n veces hasta obtener un automorfismo de la U_i distinguida que fija la N-estructura. Toda la información de la L_n^N-estructura queda codificada por este automorfismo junto con las secuencias determinadas por la cadena de composiciones saliendo de cada elemento de U_i.

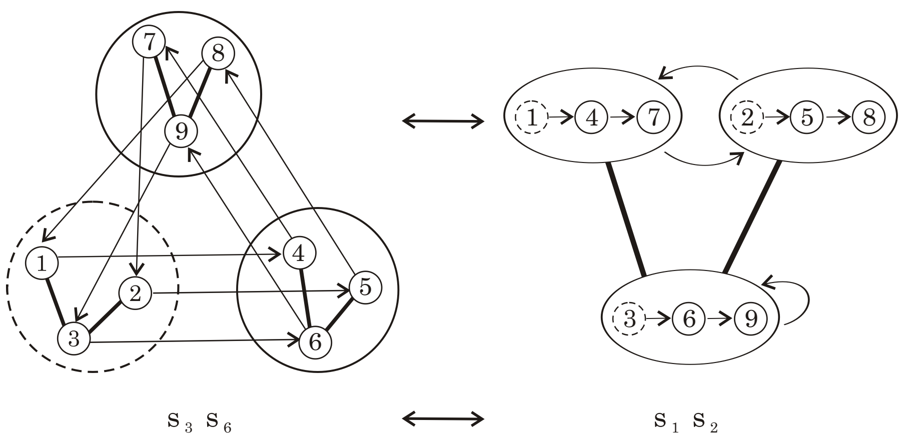

FIGURA 5. Ejemplo del isomorfismo entre la especie de las N-coronas marcadas de longitud n y la especie $\widetilde{N}(L_n)$. En este caso la especie N es la de los árboles y $n = 3$. A la izquierda tenemos una corona de árboles de longitud 3 con uno de los miembros marcados. El automorfismo σ de la corona está compuesto por un 3-ciclo y por un 6-ciclo, por lo tanto el peso de la corona es $s_3 s_6$. A la derecha tenemos el árbol de listas asociado junto con el automorfismo $\overline{\sigma}$ inducido por σ. El peso de $\overline{\sigma}$ se obtiene dividiendo los índices de σ por 3.

El grupo $\mathbb{Z}_n$ actúa naturalmente por automorfismos de la especie L_n^N permutando cíclicamente los U_i. Entonces podemos describir a la especie C_n^N como la especie cociente

$$C_n^N = \widetilde{N}(L_n)/\mathbb{Z}_n \tag{6.1}$$

Cada ciclo c del automorfismo σ de una N-corona de longitud n tiene longitud kn para algún entero k. El correspondiente ciclo $\overline{c}$ del automorfismo inducido $\overline{\sigma}$ tiene longitud k. Teniendo en cuenta este hecho junto con el isomorfismo 6.1 se puede probar la siguiente fórmula para la serie de ciclos de una corona.

Proposición 6.5. *La serie indicatriz de ciclos de la especie de las N-coronas de longitud n está dada por*

$$Z_{C_n^N}(s_1, s_2, s_3, \ldots) = \frac{1}{n} Z_N(s_n, s_{2n}, s_{3n}, \ldots)$$

En particular

Corolario 6.6. *La serie generatriz de la especie de las N-coronas de longitud n está dada por*

$$C_n^N(x) = \frac{\widetilde{N}(x^n)}{n}$$

6.2. Conjuntos de k R-estructuras. Sea R una especie tal que $R[0] = \emptyset$. Una $E_k(R)$-estructura sobre U se especifica eligiendo una partición de U en exactamente k miembros y colocando sobre cada miembro una R-estructura. Una manera alternativa de describirla es como la especie cociente $E_k(R) = R^k/S_k$. La serie de ciclos está dada por la siguiente fórmula.

Proposición 6.7. *Sea R una especie tal que $R[0] = \emptyset$. La serie indicatriz de ciclos de la especie de los conjuntos de exactamente k R-estructuras es*

$$Z_{E_k(R)}(s_1, s_2, s_3, ...) = \frac{(Z_R(s_1, s_2, s_3, ...))^k}{k!}$$

Corolario 6.8. *La especie $E_d(C_i^N)$ de los conjuntos de exactamente d N-coronas de longitud i tiene como serie de ciclos a*

$$Z_{E_d(C_i^N)}(s_1, s_2, s_3, ...) = \frac{(Z_N(s_i, s_{2i}, s_{3i}, ...))^d}{i^d d!}$$

Dado un conjunto U podemos especificar una $\widetilde{M(N)}$-estructura sobre U mediante la siguiente serie de pasos.

1. Especificamos una secuencia $d_1, d_2, d_3, ...$ tal que $d_i = 0$ para i mayor que cierto n.
2. Determinamos para cada i un subconjunto U_i de U de manera que los U_i son disjuntos y cubren a U.
3. Elegimos sobre cada U_i una estructura de especie $E_{d_i}(C_i^N)$, es decir, una estructura de conjunto de exactamente d_i N-coronas de longitud i. Cada corona de longitud i tiene i miembros. Sea $\overline{U}$ el conjunto de todos los miembros de coronas y sea $\overline{\sigma}$ la permutación de estos miembros inducida por las coronas.
4. Elegimos sobre el conjunto $\overline{U}$ de los miembros de las coronas una M-estructura que quede fija por la permutación $\overline{\sigma}$. La cantidad de tales M-estructuras sólo depende de la secuencia $d_1, d_2, ...$ y la notamos por $M[d_1, d_2, ...]$

Esta descripción de la especie $\widetilde{M(N)}$ es la guía para establecer el siguiente isomorfismo de especies ponderadas.

Proposición 6.9. *La especie ponderada $\widehat{M(N)}$ se puede expandir como*

$$\widehat{M(N)} = \sum_{d_1, d_2, ...} M[d_1, d_2, ...] \;\; E_{d_1}(C_1^N) \;\; E_{d_2}(C_2^N) \;\; E_{d_3}(C_3^N) \; ...$$

Evaluando las series generatrices de ambos miembros obtenemos la siguiente identidad de series formales.

$$Z_{M(N)} = \sum_{d_1, d_2, ...} M[d_1, d_2, ...] \;\; \prod_{i \geq 1} \frac{(Z_N(s_i, s_{2i}, s_{3i}, ...))^{d_i}}{i^{d_i} d_i!}$$

Teniendo en cuenta la expresión para la serie de ciclos obtenida en la Proposición 5.6 el teorema de Redfield-Pólya se obtiene de esta última identidad.

Referencias

[1] J. C. Baez, J. Dolan, *From finite sets to Feynman diagrams*, Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond, vol. 1, edited by Björn Engquist and Wilfried Schmid, Springer-Verlag, Berlin, 29-50, (2001).

[2] F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux, *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*, LaCIM, Montréal (1994). English version: *Combinatorial Species and Tree-like Structures*, Cambridge University Press (1998).

[3] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, (1938).

[4] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Mathematics **42**, 1-82 (1981).

[5] G. Labelle, P. Leroux (editores), *Combinatiore enumerative*, Lecture Notes in Math. **1234**, 1-82 (1985).

[6] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Wadsworth Inc., Belmont, (1986).

Av. Alem 1253, Depto. de Matemática, Univ. Nac. del Sur, (8000) Bahía Blanca, Argentina

E-mail address: iglesiasrodrigo@gmail.com