FORMAS DIFERENCIALES EN CURVAS ALGEBRAICAS (UNA INTRODUCCIÓN A LAS CURVAS ALGEBRAICAS).

FEDERICO QUALLBRUNN

RESUMEN. En este curso vamos a tratar de brindar una introducción a la geometría de las curvas algebraicas a partir del estudio de sus formas diferenciales y la relación con integrales abelianas y funciones abelianas.

ÍNDICE

Palabras de advertencia. Las siguiente son las notas de un curso de tres clases de una hora sobre la geometría de curvas algebraicas. El autor NO cree que pueda cubrir el material de estas notas en tres horas. Más bien, las notas servirían de complemento o ampliación al contenido del curso en sí.

Más importante aún, estas páginas no tienen ninguna intención de *explicar* estos temas, como será claro para cualquiera que las hojée. Bajo ningún concepto puede este ser un medio para entender las cosas que acá se cuentan, más bien es un medio para

Date: La fecha de envío del documento.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 14-01.

Agradecimientos, financiación, etc.

informarse acerca de esta matemática que el autor asegura es muy linda. En todo caso, tal vez el mayor valor que tengan estas notas sea el de dirigir al lector hacia bibliografía más rica e interesante, si eso llegase a suceder el objetivo del curso y las notas se habrá cumplido con creces. Vale aclarar que mucho del contenido aquí presente está inspirado en las notas del curso del Prof. Cukierman [2].

Como requisitos a este curso conviene tener familiaridad con los elementos básicos de la geometría de variedades tales como atlas, cambios de cartas y coordenadas locales. También ayuda bastante tener algún conocimiento sobre formas diferenciales, más que nada su definición y cómo se comportan bajo cambio de coordenadas.

Introducción

Desde el siglo XVIII los matemáticos estuvieron interesados en estudiar las propiedades de las funciones que son primitivas de funciones racionales o funciones algebraicas. Ejemplos tales como

$$\ln(z) = \int_1^z \frac{ds}{s}, \qquad \arcsin(z) = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

aparecen típicamente en los primeros cursos de análisis. Fueron originalmente estudiados por sus propiedades analíticas ($\ln(z)$) o por su relación con la geometría clásica ($\arcsin(z)$).
Otras funciones como

$$\phi(z) = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}, \qquad \psi(z) = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

son menos conocidas (no tienen nombre propio, por lo menos no en análisis 1), pero aparecen frecuentemente como soluciones a problemas de mecánica o problemas de rectificación de curvas (cálculos de longitud de arco).

Las propiedades del logarítmo y la exponencial bien pueden deducirse, como lo hacen en [1], de la clásica fórmula:

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

Asimismo también hay fórmulas similares para las funciones trigonométricas inversas, aunque son menos lindas:

$$\arcsin(a) + \arcsin(b) = \arcsin(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}).$$

Esta fórmula, que puede deducirse de la fórmula de la suma del seno o bien derivando respecto de a de los dos lados, también puede usarse para deducir las propiedades de las funciones trigonométricas.

Estudiando problemas de elasticidad, Bernoulli mostró que sería útil conocer propiedades de la función $\phi(z) = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$. Para esta función Fagnano encontró en 1718 la fórmula

$$2\phi(a) = \phi(\frac{2a\sqrt{1-a^4}}{1+a^4}),$$

y en 1756 Euler descubrió que valía la fórmula más general:

$$\phi(a) + \phi(b) = \phi(\frac{a\sqrt{1-b^4} + b\sqrt{1-a^4}}{1+a^2b^2}).$$

El problema de Euler. Estos descubrimientos llevaron a Euler a formular el problema de estudiar las funciones que admiten fórmula de la suma, más en concreto:
Sea φ una función algebraica, es decir, una función implícitamente definida por una ecuación del tipo

$$f(x, \varphi(x)) = f_0(x)\varphi^n + f_1(x)\varphi^{n-1} + \cdots + f_{n-1}(x)\varphi + f_n(x) = 0$$

donde los $f_i(x)$ son polinomios en x.
Sea también una función racional de dos variables $R(x, y) \in \mathbb{C}(x, y)$.
A partir de estos datos consideramos la función

$$\xi(z) = \int_{z_0}^{z} R(s, \varphi(s))ds.$$

Pregunta 0.1 (Euler). ¿Se puede encontrar siempre una función algebraica $g(a, b)$ en a y b tal que valga

$$\xi(a) + \xi(b) = \xi(g(a, b))?$$

¿Para qué tipo de funciones $\xi(z)$ existe una fórmula así?

Después que Euler formuló esta pregunta Lagrange encontró una fórmula de este tipo para la función $\psi(z)$ de más arriba. Entre 1824 y 1826 Abel escribió una serie de trabajos en los que muestra que no es siempre posible encontrar una fórmula para la suma como buscaba Euler, pero sí es posible encontrar fórmulas menos fuertes pero más generales.

Teorema 0.1 (N.H.Abel). *Dada la función $\xi(z) = \int_{z_0}^{z} R(s, \varphi(s))ds$ existe un número p, que sólo depende de la ecuación algebraica que verifica φ (o sea sólo depende del polinomio $f(x, y)$) y que tiene la siguiente propiedad:*
Para cualquier $m \in \mathbb{N}$ existen p funciones algebraicas $y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_p(x_1, \ldots, x_m)$ de m variables y una función elemental $v(x_1, \ldots, x_m)$ (composición de funciones algebraicas y logaritmos) tales que

$$\xi(x_1) + \cdots + \xi(x_m) = v + \xi(y_1) + \cdots + \xi(y_p).$$

En pocas palabras el teorema dice que a cualquier suma de m términos la podemos reducir a una suma de p términos más un sumando dado por una función elemental. Las fórmulas de Fagnano, Euler y Lagrange corresponden al caso en que $p = 1$ y la función $v \equiv 0$.

Como todo gran teorema, el de Abel abre más preguntas de las que cierra. ¿Cómo se calcula el número p? ¿Y las funciones y_i? ¿De dónde salió la función v, por qué en las fórmulas de Fagnano y Euler no aparece?

Observación 0.2. El lector avisor se habrá dado cuenta que muchos de los objetos sobre los que estamos hablando hasta acá no están del todo definidos. Por empezar no queda del todo claro cuál es el dominio de las funciones $\xi(z)$. Sabemos, basados en el caso particular de las funciones exponenciales y trigonométricas, que mucho se simplifican los argumentos si consideramos funciones de variable compleja. Por otro lado, al considerar funciones en el plano complejo, hay que especificar las ramas del logaritmo y de las funciones algebraicas que uno esté usando, y así la definición de $\xi(z)$ que se presentó acá resulta ambigua.

Tal vez estas sutilezas tuvieran sin mayor cuidado a Euler. Posiblemente Abel se haya dado cuenta de que son necesarias ciertas precauciones al usar estas definiciones (después de todo él también fue el primero en estudiar seriamente la cuestión de la convergencia de series). Fue sin embargo Riemann el que empezó a dar a estas cuestiones un marco teórico sólido.

En el siglo XIX Riemann y sus sucesores se dieron cuenta gradualmente que las propiedades de estas funciones y las respuestas a las preguntas antes planteadas están íntimamente relacionadas con la geometría de las curvas algebraicas. Este descubrimiento fue una de las razones que originaron el estudio de las curvas algebraicas y la Geometría Algebraica en general.

Ejercicios.

1. **(Período del péndulo)** Consideremos el problema del péndulo (de masa m sin rozamiento, con una varilla de masa despreciable de longitud $l = 1$) Denotemos $\theta(t)$ es el ángulo con la vertical a tiempo t, y g la gravedad (constante). Sea θ_0 el ángulo inicial del movimiento (es decir $\theta_0 = \theta(0)$ y $\frac{d\theta}{dt}|_{t=0} = 0$). Entonces la energía cinética en tiempo t está dada por
$$K(t) = \frac{1}{2}mv_t^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\theta}{dt}(t)\right)^2.$$
Y la energía potencial por
$$U(t) = mgh_t = mg(1 - \cos(\theta(t)).$$
Supongamos la hipótesis (de índole físico) que la energía total $K+U$ es constante a lo largo del tiempo.
   a) Deducir que necesariamente se cumple la ecuación diferencial
   $$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2g(\cos(\theta) - \cos\theta_0)}.$$
   b) Analizar la para qué puntos $(t, \theta(t))$ la función $\theta(t)$ es inversible y su inversa es derivable. Denotemos a la inversa $t(\theta)$ (es el tiempo que le lleva al péndulo alcanzar el ángulo θ).
   c) Mostrar que en el intervalo $(0, \theta_0)$ vale la siguiente fórmula para $t(\theta)$:
   $$t(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^\theta \frac{dv}{\sqrt{\cos(v) - \cos\theta_0}}.$$
   d) Hacer un cambio de variables para escribir a t como una función de la forma
   $$t(z) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_1^z \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(s-a)}}.$$
2. Mostrar que, en coordenadas polares, la longitud de arco de la elipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
está dada en términos de la integral
$$\int_0^1 \frac{1-k^2x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
donde $k = 1 - (\frac{b}{a})^2$.

3. La lemniscata es una curva plana dada por la ecuación
$$(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2).$$
Dar una expresión para la longitud de arco de la lemniscata en coordenadas polares, como la integral de una función del tipo $\xi(z) = \int_{z_0}^{z} R(s, \varphi(s))ds$.

1. Curvas algebraicas planas

Definición 1.1. Una *curva algebraica plana* C es un subconjunto de $\mathbb{C}^2$ tal que existe algún polinomio de dos variables $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $C = C(f) := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | f(x, y) = 0\}$. Si existe un polinomio primo f tal que $C = C(f)$ entonces la curva C se dice *irreducible.*

Afirmación 1.1. *Si C es una curva irreducible y f un polinomio primo tal que $C = C(f)$, entonces para cualquier otro polinomio primo g tal que $C = C(g)$ existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $g = \lambda f$.*

Definición 1.2. Sea $C(f)$ una curva irreducible y f un polinomio primo que la define. Al dominio íntegro $\mathbb{C}[C] := \mathbb{C}[x, y]/(f)$ lo llamamos *anillo de coordenadas* o *anillo de funciones regulares* de la curva y a su cuerpo de fracciones $Frac(\mathbb{C}[C])$ lo llamamos *cuerpo de funciones racionales* de C, también lo denotamos $\mathbb{K}(C)$.

La primera de las ideas que tuvo Riemann para tratar el problema de Euler fue la siguiente: En vez de tratar con "funciones multivaluadas" (como por ejemplo $\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}$) hay que considerar la curva asociada a la función (en el caso anterior la curva $y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$).

Observación 1.3. Sea $p = (x_0, y_0) \in C$ tal que $\frac{\partial f}{\partial y}|_p \neq 0$. Entonces, por el Teorema de la Función Implícita, existe un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ y una (única) función holomorfa $\varphi : U \to \mathbb{C}$ tal que $g(x_0) = y_0$ y $f(x, \varphi(x)) = 0$ para todo $x \in U$. Es decir que $\varphi(x)$ es una función algebraica de ecuación implícita $f(x, \varphi) = 0$. En ese sentido es que consideramos heurísticamente que la ecuación $f(x, y) = 0$ da lugar a "funciones algebraicas multivaluadas". Por ejemplo $f(x, y) = y^2 - x$ da lugar a las diversas determinaciones de la raíz cuadrada.

Hasta Riemann sólo se consideraban las funciones algebraicas definidas en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ conveniente de manera de poder determinar la función unívocamente. Riemann mostró que la geometría global de la curva $\{f(x, y) = 0\}$ determina el comportamiento de las funciones algebraicas asociadas.

1.1. Curvas racionales y fracciones simples.

Definición 1.4. Una curva algebraica irreducible $C(f)$ (f primo) se dice *racional* si existen funciones racionales $X, Y \in \mathbb{C}(t)$ y $T \in \mathbb{C}(x, y)$ tales que
$$\begin{aligned} f(X, Y) &= 0 \in \mathbb{C}(t), \\ T(X(t), Y(t)) &= t \in \mathbb{C}(t) \quad \text{y} \\ X(T(x, y)) &= x, \quad Y(T(x, y)) = y \quad \text{como elementos del cuerpo } \mathbb{K}(C). \end{aligned}$$

Proposición 1.5. *Sea $f \in \mathbb{C}[x, y]$ primo tal que $C(f)$ es una curva racional, y sea $\varphi(s)$ una función tal que $f(s, \varphi(s)) \equiv 0$. Entonces toda función $\xi(z) = \int_{z_0}^{z} R(s, \varphi(s))ds$*

se escribe, en algún entorno simplemente conexo U de z_0 apropiado, como

$$\xi(z) = S(z, \varphi(z)) + \sum_i b_i \log(T(z, \varphi(z)) - a_i),$$

con $S(x, y), T(x, y) \in \mathbb{C}(x, y)$.

Demostración. Como $C(f)$ es racional existen funciones $X(t)$, $Y(t)$ y $T(x, y)$ con las propiedades de la definición 1.4. Luego en la integral $\int R(s, \varphi(s))ds$ podemos hacer el cambio de variables $s = X(t)$, de manera que ahora la composición $\varphi(X(t)$ verifica la ecuación implícita $f(X(t), \varphi(X(t))) = 0$, por la unicidad de la función implícita en un entorno adecuado se tiene que entonces $\varphi(X(t)) = Y(t)$.
De manera que $R(X, Y)\frac{dX}{dt}dt = pdt$, donde $p \in \mathbb{C}(t)$. Ahora a la integral $\int p(t)dt$ podemos aplicarle el método de fracciones simples para encontrarle una primitiva de la forma $r(t) + \sum_i b_i \log(t - a_i)$, con $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{C}(t)$. Entonces reemplazando $t = T(s, \varphi(s))$ tenemos que la primitiva de $\int R(s, \varphi(s))ds$ es $S(z, \varphi(z)) + \sum_i b_i \log(T(z, \varphi(z)) - a_i)$, donde $S(x, y) = r(T(x, y))$. $\square$

Sabemos ahora que el método de fracciones simples puede extenderse a integrar funciones algebraicas φ tales que cumplan una ecuación $f(x, \varphi(x)) = 0$ con $C(f) \subset \mathbb{C}^2$ una curva racional. Cabe preguntarse cómo reconocer si un polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$ define una curva racional. No vamos a dar acá un criterio general, sólo mencionamos el siguiente criterio, cuya demostración es caso particular de un procedimiento bastante más general para reconocer curvas racionales.

Proposición 1.6. *Sea $f \in \mathbb{C}[x, y]$ un polinomio primo que sólo contiene monomios de grados r y $r + 1$. Entonces la curva $C(f)$ es racional.*

Demostración. Notemos como f_{r+1} y f_r las partes homogéneas de grados $r + 1$ y r respectivamente. Reemplazando $y = tx$ en $f(x, y) = 0$ obtenemos $f_r(x, tx) + f_{r+1}(x, tx) = x^r f_r(1, t) + x^{r+1} f_{r+1}(1, t) = 0$, con lo cual obtenemos la parametrización $X = -\frac{f_r(1,t)}{f_{r+1}(1,t)}$, $Y = tX$. $\square$

Ejercicios.

1. *a*) Verificar que una curva $C(f)$ es racional si y sólo si $\mathbb{K}(C(f)) \cong \mathbb{C}(t)$.
   b) Concluir que el teorema de Luroth en teoría de cuerpos implica la siguiente afirmación:
   Sea C una curva algebraica plana. Si existen dos funciones racionales $X(t), Y(t) \in \mathbb{C}(t)$ tales que la aplicación
   $$T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$$
   $$t \mapsto (X(t), Y(t))$$
   cumple $Im(T) \subseteq C$, entonces la curva C es racional.
2. Encontrar una primitiva de $1/y(x)$ donde
   $$y(x) = \sqrt[3]{-x^2 + \sqrt{x^4 + 4x^3}} - \sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x^4 + 4x^3}}.$$
   (Sugerencia: Observar que $y^3 + axy + bx^2 = 0$ para ciertas $a, b \in \mathbb{C}$.)
3. Probar que toda curva dada por un polinomio f de grado 2 es racional. Concluir que toda función de la forma $\xi(z) = \int_{z_0}^{z} R(s, \sqrt{as^2 + bs + c})ds$ se escribe como suma de funciones algebraicas y logarítmos de funciones algebraicas. (Sugerencia: Usar el mismo cambio de variables que en la demostración de la Proposición 1.6.)

2. Formas diferenciales en curvas regulares.

Para continuar con nuestro estudio de las integrales abelianas vamos a considerar compactificaciones de las curvas afines. Una forma canónica de compactificar una curva plana afín es considerar la proyectivización de la curva.

Sea $f(x,y) = f_0 + \cdots + f_n \in \mathbb{C}[x,y]$ un polinomio de grado n, siendo $f_i(x,y)$ el término homogéneo de grado i de f. Consideremos ahora el polinomio $\overline{f} \in \mathbb{C}[x,y,z]$ definido por $\overline{f}(x,y,z) = \sum_{i=0}^{n} z^{n-i} f_i(x,y)$. Observemos que el polinomio $\overline{f}(x,y,z)$ es *homogéneo* de grado n.

Definición 2.1. La *proyectivización* de la curva $C(f)$ es el subconjunto de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definido como

$$\overline{C(f)} := \{(x:y:z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \ t.q.: \ \overline{f}(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

En general, dado un polinomio homogéneo g cualquiera, decimos que el conjunto

$$C(g) := \{(x:y:z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \ t.q.: \ g(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

es una *curva algebraica proyectiva.*

Observación 2.2. En $\mathbb{P}^2$ tenemos el cubrimiento por abiertos afines coordenados. Estos son los abiertos de la forma $U_i := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \ t.q.: x_i \neq 0\}$. La proyectivización $\overline{C(f)}$ de una curva afín $C(f)$ contiene a la curva afín como un abierto denso. En efecto $C(f) = \overline{C(f)} \cap U_0$.

Por otra parte, siendo cualquier curva proyectiva un cerrado de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (ejercicio: verificar esta afirmación), y siendo que $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ es una variedad diferencial compacta, tenemos que una curva proyectiva es, como subespacio topológico de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (considerado con la topologia de variedad diferencial), compacto.

Definición 2.3. Una curva algebraica afín $C \subset \mathbb{C}^2$ se dice *regular* si está dada por un polinomio $f \in \mathbb{C}[x,y]$ tal que para todo punto $p \in C$ se tiene $(\frac{\partial f}{\partial x}|_p, \frac{\partial f}{\partial y}|_p) \neq (0,0)$.

Una curva algebraica proyectiva $C \subset \mathbb{P}^2$ se dice *regular* si para todo punto $p \in C$ existe un abierto de la forma $U_i := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \ t.q.: x_i \neq 0\}$ tal que $C \cap U_i$ es una curva afín regular.

Observación 2.4. Si consideramos el polinomio f como una función holomorfa $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ la condición de regularidad nos dice que podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita para funciones holomorfas. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\frac{\partial f}{\partial x}|_p \neq 0$, tenemos entonces que existe un entorno $U \in \mathbb{C}$ y una función holomorfa $g : U \to \mathbb{C}^2$ tal que $f(g(y),y) = 0$, $\forall y \in U$. En este caso el teorema de las fibras que se ve generalmente en cursos de geometría diferencial tiene una versión holomorfa, que implica que la restricción de la proyección a la curva C, $(x,y) \mapsto y$ es una carta de la única estructura de variedad holomorfa que hace de C una subvariedad holomorfa de $\mathbb{C}^2$ de dimensión 1 (dimensión como variedad compleja). En particular C es una varideady diferencial de dimensión real 2. A una variedad holomorfa de dimensión compleja 1 se la denomina *superficie de Riemann.*

Por lo anterior una curva proyectiva regular tiene también un cubrimiento por abiertos y cartas holomorfas que le dan estructura de subvariedad holomorfa de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de dimensión compleja 1. Más aún, una curva regular es una superficie de Riemann compacta.

2.1. Formas diferenciales en curvas. Ya mencionamos que una forma de tratar con funciones algebraicas era considerar curvas algebraicas en el plano. Así, en vez de tratar con la "función multivaluada" $\sqrt{x}$, simplemente consideramos la restricción de la función $(x, y) \mapsto y$ a la curva $x^2 - y = 0$. Para estudiar integrales de funciones algebraicas vamos a necesitar de otra construcción geométrica, la de forma diferencial. Hablando mal y pronto una forma diferencial sobre una variedad es simplemente algo que tiene sentido integrar. Vamos a tratar de hacer esto más preciso a continuación. Recordamos, sin embargo, que lo recomendable es que el lector ya haya tomado contacto con la noción de formas diferenciables y bajo ningún concepto este apunte es una introducción al tema, para esto recomendamos el libro [6], capítulo 4.

Definición 2.5. Una 1-*forma diferencial holomorfa* en una variedad compleja X está dada por una terna (U_k, ψ_k, f_k), donde los (U_k, ψ_k) forman un atlas (holomorfo) de la variedad y las f_k son funciones holomorfas $f_k : \psi_k(U_k) \to \mathbb{C}$ tales que, en $U_k \cap U_j$, vale

$$f_j = (f_k \circ \psi_k \circ \psi_j^{-1}) \cdot \det(\mathrm{Jac}(\psi_j \circ \psi_k^{-1})).$$

Equivalentemente podemos definir una 1-forma como una sección holomorfa del fibrado cotangente $T^*X \to X$. Denotamos al $\mathbb{C}$ espacio vectorial de 1-formas holomorfas $\Omega^1[X]$.

Afirmación 2.1. *Similarmente al caso de formas diferenciales toda* 1*-forma diferencial holomorfa puede escribirse localmente de la forma* $\sum f_i dz_i$ *con* f_i *funciones holomorfas y* z_i *coordenadas locales. En el caso en que la variedad tenga dimensión compleja* 1 *cualquier forma puede escribirse localmente como* $f(z)dz$.

Definición 2.6. Una 1-forma diferencial *meromorfa* en una superficie de Riemann X es una 1-forma ω definida sobre un abierto denso $U \subseteq X$ tal que para todo $p \in X$, existe un entorno de p donde ω puede escribirse como $\omega = f(z)dz$ con f una función *meromorfa*. Observemos que el conjunto de formas meromorfas tiene una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $K(X)$ de funciones meromorfas. A este espacio lo denotamos $\Omega^1(X)$.

En el caso en que la superficie de Riemann X sea una curva plana tenemos muchas 1-formas sobre X que vienen de restringir 1-formas definidas en el plano $\mathbb{C}^2$ (o $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$) a X. En particular podemos considerar una curva no singular $C(f)$, las 1-formas que se escriben como $g_1(x, y)dx + g_2(x, y)dy$ con $g_i \in \mathbb{C}[x, y]$; y la restricción de estas 1-formas a $C(f)$.

Ejemplo 2.7. Sea $f \in \mathbb{C}[x, y]$ primo y $C = C(f) \subset \mathbb{C}^2$. Supongamos que C es no singular. Considerando que la función f restringida a C es identicamente nula, entonces tenemos que, en C, vale la igualdad $df = 0$, o sea.

$$f_x dx + f_y dy = 0. \tag{2.1}$$

Lema 2.8. *Sea* $f \in \mathbb{C}[x, y]$ *primo de grado* d *y* $X = \overline{C(f)} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *la proyectivisación de la curva* $C(f)$. *Supongamos que* X *es no singular. Entonces tenemos bien definida una aplicación lineal*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x, y]_{\leq d-3} &\longrightarrow \Omega^1[X] \\ h &\longmapsto \omega_h = \frac{h}{\frac{\partial f}{\partial y}} dx, \end{aligned}$$

donde $\mathbb{C}[x, y]_{\leq d-3}$ *denota el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que* $d - 3$. *Más aún esta aplicación es inyectiva.*

Demostración. Denotemos $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$. A priori ω_h es una forma meromorfa sobre la curva afín $C(f)$. Veamos que define una única forma meromorfa en X. Para esto notemos que la curva $C(f)$ vista dentro de $\overline{C(f)} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ es el conjunto $\{(x : y : 1) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\ t.q. : \overline{f}(x, y, 1) = 0\}$, y que en un punto $(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$lo que expresamos en coordenadas afines como ω_g se expresa en coordenadas homogéneas como

$$\omega_h((x : y : z)) = \frac{h(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})}{f_y(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})} d\left(\frac{x}{z}\right).$$

Luego, si denotamos $\overline{h}(x, y, z)$ el homogeneizado de $h(x, y)$ y $\overline{f_y}(x, y, z)$ el de $f_y(x, y)$, podemos escribir la ecuación de arriba como

$$\omega_h((x : y : z)) = \frac{\overline{h}(x, y, z)}{\overline{f_y}(x, y, z)} \frac{z^{d-1}}{z^e} d\left(\frac{x}{z}\right) = \tag{2.2}$$

$$= \left(\frac{\overline{h}(x, y, z)}{\overline{f_y}(x, y, z)} \frac{z^{d-1}}{z^e}\right)\left(\frac{dx}{z} + \frac{xdz}{z^2}\right), \tag{2.3}$$

donde e es el grado de h. Esta última expresión es la de una forma meromorfa sobre X.

Tenemos entonces una forma meromorfa ω_h sobre X. Vamos a ver que es regular en todo punto. Primero veamos que es regular en el abierto denso $C(f) \subset \overline{C(f)}$.

Tomemos entonces un punto $p \in C(f)$ tal que $f_y(p) = 0$, como X es no singular entonces necesariamente $f_x(p) \neq 0$. Por la identidad del Ejemplo 2.7 llegamos a la conclusión de que vale

$$\omega_h = \frac{h}{f_y} dx = -\frac{h}{f_x} dy.$$

Entonces ω_h es regular en p.

Ahora veamos que ω_h es regular en $\overline{C(f)} \setminus C(f)$. Notemos primero que $\overline{C(f)} \setminus C(f)$ consiste de los (finitos) puntos de la forma $(x : y : 0)$ tales que $\overline{f}(x, y, 0) = 0$. Usando la expresión (2.3) vemos que, si $e \leq d - 3$, entonces ω_h es regular en $(x : y : 0) \in \overline{C(f)}$ si y sólo si $\frac{dx}{f_y} + \frac{xdz}{f_y}$ lo es. Para ver que esta última forma es regular en $X \setminus C(f)$ podemos razonar como en el Ejemplo 2.7 y ver que esto es consecuencia de la regularidad de X. En efecto, escribiendo (2.1) en coordenadas homogéneas tenemos que

$$\overline{f_x}(x, y, z)(dx + \frac{x}{z} dz) = -\overline{f_y}(x, y, z)(dy + \frac{y}{z} dz).$$

Esta fórmula junto a la regularidad de X muestran que ω_h es una forma regular en todo punto.

El hecho de que la aplicación es inyectiva sale fácil del hecho de que la forma ω_h tiene siempre coeficientes no nulos si $h(x, y) \neq 0$. □

El siguiente teorema, que no vamos a demostrar, caracteriza completamente las formas holomorfas en una curva plana no singular.

Teorema 2.9. *Sea X como en el lema anterior. La aplicación*

$$\mathbb{C}[x, y]_{\leq d-3} \longrightarrow \Omega^1[X]$$
$$g \longmapsto \omega_h$$

es un isomorfismo. En particular, si la curva tiene grado d, el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de formas diferenciales holomorfas tiene dimensión $(d - 1)(d - 2)/2$.

Demostración. Ver [7], cap. 7. □

Ejercicios.

1. Dado un polinomio homogéneo $g \in \mathbb{C}[x,y,z]$ y la curva proyectiva plana $X = C(g)$, consideramos el anillo cociente $\mathbb{C}[X] := \mathbb{C}[x,y,z]/(g)$. Lo llamamos *anillo de coordenadas homogéneas* de la curva X.
   a) Mostrar que, al ser g homogéneo, $\mathbb{C}[X]$ tiene una graduación de manera que la proyección $\mathbb{C}[x,y,z] \to \mathbb{C}[X]$ respeta el grado.
   b) Supongamos que $\mathbb{C}[X]$ es un dominio. Consideremos entonces el cuerpo $\mathbb{K}(X) := \{\frac{f}{g}\ t.q.\ :\ f,g \in \mathbb{C}[X],\ \deg(f) = \deg(g)\}$ que llamamos *cuerpo de funciones racionales*. Probar que si C es una curva afín tal que $C \subset X$ entonces $\mathbb{K}(C) = \mathbb{K}(X)$.
2. Probar que cualquier curva proyectiva es un cerrado de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (ojo, un polinomio homogéneo de tres variables NO define una función $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{C}$).
3. Sea $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Mostrar que si la proyectivización de la curva plana $y^2 - f(x) = 0$ es regular entonces el grado de f es necesariamente menor o igual a 3.
4. a) Sea $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con coordenadas homogéneas $(x : y)$, y sea una 1-forma meromorfa ω que en el abierto $y \neq 0$ se escribe $\omega = f(x)dx$. Entonces necesariamente $f(x)$ es una función racional.
   b) Concluir que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ no posee formas holomorfas globales.

3. El teorema de Abel

Recordemos que empezamos estudiando integrales de la forma $\xi(z) = \int_{z_0}^{z} R(s,\varphi(s))ds$, con $\varphi(s)$ una función satisfaciendo una ecuación polinomial $f(s,\varphi(s)) = 0$. Hasta ahora, para estudiar las funciones $\xi(z)$ del principio, hemos introducido primero curvas algebraicas para pensar a las funciones algebraicas $\varphi(s)$ como funciones sobre una curva algebraica $C(f)$. Luego definimos 1-formas holomorfas y meromorfas en las curvas algebraicas, el propósito de esto es poder pensar en la expresión $\int R(s,\varphi(s))ds$ como la integral de la forma (meromorfa) $\omega = R(x,y)dx$, definida sobre la curva $C(f)$.

Recordemos que, dada una 1-forma diferencial $\eta = f(x)dx$ definida sobre una variedad M, podemos definir la integral de η a lo largo de una curva $[0,1] \xrightarrow{c} M$ como

$$\int_c \eta = \int_0^1 f(c(t))dt,$$

notemos que, si η es una forma holomorfa en una variedad compleja, esta fórmula sigue teniendo perfecto sentido y generaliza la integral curvilínea de funciones complejas. Recordemos que podemos definir una 1-cadena como una combinación entera simbólica de curvas $\sum n_i c_i$ y extender linealmente la definición de integral a cadenas.

Definición 3.1. Sea X una superficie de Riemann y $\eta \in \Omega^1(X)$. El *residuo* de η alrededor de un punto singular p es el número $\mathrm{res}_p(\eta) := \int_c \eta$ donde c es una curva que encierra a p y a ningún otro punto singular de η.

3.1. La aplicación de Abel-Jacobi. Sea X una curva proyectiva regular. Vamos a definir una función cuyo dominio es X, que va a englobar información sobre funciones de la pinta $\xi(z) = \int_{z_0}^{z} R(s,\varphi(s))ds$. Para poder entender esta aplicación es preciso hacer consideraciones sobre la topología y la geometría de X.

El teorema 2.9 afirma que, si X es una curva plana regular, el espacio vectorial $\Omega^1[X]$ de 1-formas holomorfas tiene dimensión finita. De hecho vale una afirmación un poco más general.

Afirmación 3.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta. El espacio $\Omega^1[X]$ tiene dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. Al número $g = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^1[X]$ se le llama el* género *de X.*

Tomemos entonces una base $\omega_1, \ldots, \omega_g$ de $\Omega^1[X]$. Un paso importante en el estudio de las funciones $\xi(z)$ fue considerar simultaneamente las integrales de las formas ω_i. Así uno toma en cuenta la aplicación

$$p \mapsto (\int_{p_0}^{p} \omega_1, \int_{p_0}^{p} \omega_2, \ldots, \int_{p_0}^{p} \omega_g). \tag{3.1}$$

La conveniencia de estudiar tal aplicación estaba explícita en los trabajo de Riemann sobre integrales abelianas y aparentemente en los trabajos originales de Abel sobre el tema también tiene un lugar importante.

La fórmula 3.1, sin embargo, no define ninguna función así como así, por empezar tenemos que darle sentido al dominio y codominio de la aplicación, tarea que en este caso es altamente no trivial.

La fórmula $\int_{p_0}^{p} \omega$ no tiene, a priori, sentido ya que la integral de una 1-forma depende realmente de la curva sobre la cual estamos integrando y no solamente de los puntos inicial y final de la curva. Más precisamente vale la siguiente afirmación:

Afirmación 3.2 (Teorema de Stokes para formas holomorfas)**.** *Sea X una variedad holomorfa, η una p-forma holomorfa y Δ un $p+1$ simplex en X entonces*

$$\int_{\partial\Delta} \eta = \int_{\Delta} d\eta.$$

La forma $d\eta$ se calcula localmente de la misma manera que para formas diferenciales sólo que usando la derivada compleja (y coordenadas complejas).

En particular, como una superficie de Riemann tiene dimensión compleja 1, no hay 2-formas holomorfas no triviales en una superficie de Riemann, por lo que todas las 1-formas holomorfas son cerradas. Esto implica, junto con el teorema de Stokes, que en el caso de superficies de Riemann la integral $\int_c \eta$ de una 1-forma η a lo largo de una curva c sólo depende de la clase de homología de la curva c. En efecto, si c y c' son dos curvas homológicamente equivalentes entonces el ciclo $[c] - [c']$ es el borde de una cadena Δ de dimensión 2 y, usando el teorema de Stokes,

$$\int_c \eta - \int_{c'} \eta = \int_{[c]-[c']} \eta = \int_{\partial\Delta} \eta = \int_{\Delta} d\eta = \int_{\Delta} 0 = 0.$$

Vemos así que es preciso tener en cuenta las clases de homología de 1-cadenas para hablar de la aplicación de Abel-Jacobi, es decir que hay que tener en cuenta al grupo $H_1(X, \mathbb{Z})$. Respecto de este grupo tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2 (Riemann)**.** *Sea X una superficie de Riemann y sea $g = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^1[X]$ el género de X. Entonces $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$.*

Demostración. Ver [6] capítulo 1 y referencias ahí dadas. □

Ahora estamos en condiciones de darle sentido a las integrales de la fórmula 3.1. En efecto si tomamos una base $\delta_1, \ldots, \delta_{2g}$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$; tenemos que las integrales $\int_{p_0}^{p} \omega$ están definidas a menos de un término de la forma $\sum n_j \int_{\delta_j} \omega$. Más precisamente, si c y c' son dos curvas (reales) en X que empiezan en p_0 y terminan en p, entonces el 1-ciclo $[c] - [c']$ es homólogo a una combinación entera $\sum n_i \delta_i$ y, por lo tanto, $\int_c \omega - \int_{c'} \omega = \sum n_i \int_{\delta_i} \omega$. Esto hace que considerar las propiedades de la integral $\int_{p_0}^{p} \omega$ se haga muy difícil. Abel se dio cuenta que si se consideran todas las formas holomorfas simultáneamente el panorama sorprendentemente se hace mucho más claro. Vamos a ver por qué.

Sea una base $\omega_1, \ldots, \omega_g$ del espacio de 1-formas holomorfas de X, y sea $\delta_1, \ldots, \delta_{2g}$ una base de $H_1(X, \mathbb{Z})$. La *matriz de períodos* de X es la matriz de $g \times 2g$

$$\begin{pmatrix} \int_{\delta_1} \omega_1 & \ldots & \int_{\delta_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\delta_1} \omega_g & \ldots & \int_{\delta_{2g}} \omega_g \end{pmatrix}.$$

Los $2g$ vectores columna de esta matriz $\Pi_i = (\int_{\delta_i} \omega_1, \ldots, \int_{\delta_i} \omega_g) \in \mathbb{C}^g$ se llaman *períodos.* Tenemos que vale lo siguiente

Afirmación 3.3. *Los períodos $\{\Pi_i\}_{1 \leq i \leq 2g}$ forman un conjunto linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$. En otras palabras el conjunto*

$$\Lambda := \left\{ \sum_{i=0}^{2g} n_i \Pi_i \ : n_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

forma un reticulado *del espacio $\mathbb{C}^g$.*

Notemos que, mientras que la integral $\int_{p_0}^{p} \omega$ está bien definida módulo los $2g$ períodos de ω, que en general forman un conjunto denso en $\mathbb{C}$, el vector

$$\left(\int_{p_0}^{p} \omega_1, \ldots, \int_{p_0}^{p} \omega_g \right)$$

está bien definido módulo el reticulado $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Luego, eligiendo un punto $p_0 \in X$ arbitrario, tenemos que la fórmula

$$p \mapsto \left(\int_{p_0}^{p} \omega_1, \int_{p_0}^{p} \omega_2, \ldots, \int_{p_0}^{p} \omega_g \right)$$

define un morfismo de variedades holomorfas.

$$AJ_1 : X \longrightarrow \mathbb{C}^g / \Lambda.$$

Un poco más en general podemos definir, para todo $n \in \mathbb{N}$, morfismos

$$\begin{aligned} AJ_n : X^n &\longrightarrow \mathbb{C}^g / \Lambda. \\ (p_1, \ldots, p_n) &\longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{p_0}^{p_i} \omega_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \int_{p_0}^{p_i} \omega_g \right). \end{aligned}$$

Afirmación 3.4. *Si X es una curva proyectiva y regular la variedad $\mathbb{C}^g/\Lambda$ tiene estructura de variedad algebraica y los morfismos AJ_n son morfismos regulares de variedades algebraicas.*

La(s) demostración(es) de la afirmación de más arriba conforma(n) un hito en la geometría algebraica de segunda mitad del siglo XX. Muchas de las herramientas que conforman la geometría algebraica moderna juegan algún papel en la demostración de la forma más general de este teorema. Sin, embargo, mientras estemos trabajando con curvas proyectivas sobre los números complejos, no vamos a necesitar esta afirmación.

Vamos a usar los morfismos AJ_n para investigar las fórmulas de la suma de las funciones abelianas $\xi(z)$.

3.2. Divisores y equivalencia racional. Si bien no es como fue expresado originalmente, para hablar del teorema de Abel nos conviene usar la noción de divisores en curvas y la de equivalencia racional de divisores.

Definición 3.3. Sea X una curva algebraica. El *grupo de divisores de* X $\mathrm{Div}(X)$ es el grupo abeliano libre generado por los puntos de X. Típicamente notamos los elementos de $\mathrm{Div}(X)$ como $\sum_i n_i[p_i]$, a cada uno de estos elementos lo llamamos un *divisor*. El *grado* de un divisor $\sum_i n_i[p_i]$ es el número $\sum_i n_i \in \mathbb{Z}$. Llamamos *soporte* de D al conjunto de puntos $\{p_i\}$. Al subgrupo de divisores de grado 0 lo denotamos $\mathrm{Div}_0(X)$.

Ejemplo 3.4. Sea X una curva regular proyectiva y $f \in \mathbb{K}(X)$ una función meromorfa. El *divisor de ceros y polos de* f es el divisor $(f) = \sum_{p\in X} \mathrm{ord}_p(f)[p]$. Donde $\mathrm{ord}_p(f)$ es el orden de p como cero o polo de f. Notar que es un divisor bien definido ya que, al ser X proyectiva y regular, es compacta y una función meromorfa sólo puede tener entonces finitos ceros y polos, por lo que la suma es finita. Puede demostrarse que (f) siempre es un divisor de grado 0 (Ver [6] cap. IV.3.18, o [7] cap. 7).

Ejemplo 3.5. Asimismo tenemos, para toda forma meromorfa $\eta \in \Omega^1(X)$ el divisor de ceros y polos de la 1-forma $(\eta) = \sum_{p\in X} \mathrm{ord}_p(\eta)[p]$.

Definición 3.6. Dos divisores D y D' sobre una curva X son *racionalmente equivalentes* (o *linealmente equivalentes*, son sinónimos) si y sólo si existe una función racional f tal que $D - D' = (f)$. Lo denotamos $D \sim_{\mathrm{rat}} D'$.

Observación 3.7. Dos divisores racionalmente equivalentes tienen el mismo grado.

3.3. El teorema de Abel. Como bien señala Kleiman en [4] no existe un único teorema de Abel. Sin, embargo, a partir del libro [8] la siguiente afirmación fue conocida generalmente como EL teorema de Abel:

Teorema 3.8.

$$AJ_n(p_1,\ldots,p_n) = AJ_m(q_1,\ldots,q_m) \in \mathbb{C}^g/\Lambda \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}[p_i] - n[p_0] \sim_{\mathrm{rat}} \sum_{i=1}^{m}[q_i] - m[p_0].$$

Sólo vamos a describir la demostración de una de las implicaciones (la que efectivamente es debida a Abel) que es algo menos complicada y basta para dar "fórmulas de la suma" bastante generales.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Ver [3] cap. II.2.

($\Longleftarrow$) Definamos una función

$$\mu : \mathrm{Div}_0(X) \to \mathbb{C}^g/\Lambda$$
$$\mu(\sum_i [p_i] - [q_i]) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n}\int_{q_i}^{p_i}\omega_1,\ldots,\sum_{i=1}^{n}\int_{q_i}^{p_i}\omega_g\right)$$

(notar que esta función está bien definida, es decir que no depende del agrupamiento de las p_i con las q_i). Ahora, si $D = (f)$, tenemos un morfismo (ejercicio: verificar que la siguiente fórmula define un morfismo de variedades holomorfas)

$$\psi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^g/\Lambda,$$
$$(\lambda_0 : \lambda_1) \mapsto \mu((\lambda_0 \cdot f - \lambda_1)).$$

Si z_i son las coordenadas de $\mathbb{C}^g$, las formas dz_i, con $1 \le i \le g$ generan el espacio cotangente $T_p^*(\mathbb{C}^g/\Lambda)$ para todo p. Como $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ no tiene formas holomorfas globales (ver el ejercicio 4 de la sección anterior) entonces $\psi^*(dz_i) = 0$, luego ψ es constante, por lo tanto $\mu(D) = \psi((0:1)) = \psi((1:0)) = 0$. □

El teorema de Abel nos da un criterio para establecer cuándo tenemos igualdades entre sumas de la forma $\xi(s_1) + \cdots + \xi(s_n) = \xi(s'_1) + \cdots + \xi(s'_m)$ cuando podemos establecer $m = 1$ entonces tenemos una fórmula de la suma como quería Euler. En cualquier caso el teorema nos dice que es clave el estudio de los divisores de grado cero módulo equivalencia racional. De hecho, podemos interpretar parte del teorema de Abel sobre formulas de la suma para funciones abelianas como la siguiente:

Afirmación 3.5. *Sea D un divisor en una curva X (proyectiva, regular) de género g tal que $\deg(D) = 0$. Entonces para todo punto p_0 en un abierto denso U_D de X existen puntos $q_1, \dots, q_g$ tales que*

$$D \sim_{\text{rat}} \sum_{i=1}^{g} [q_i] - g[p_0].$$

Demostración. Ver [5] cap. II.2 Lemma 5. □

Ejercicios.

1. Dada X curva algebraica proyectiva regular. Tomemos dos bases distintas β y β' de $H_1(X, \mathbb{Z})$, y dos bases distintas Ω y Ω' de $\Omega^1[X]$. Mostrar que los cambios de base entre las matrices de períodos $\Pi_{\beta,\Omega}$ y $\Pi_{\beta',\Omega'}$ definen un isomorfismo de variedades holomorfas entre $\mathbb{C}^g/\Lambda$ y $\mathbb{C}^g/\Lambda'$, donde $\Lambda = \Pi_{\beta,\Omega} \cdot \mathbb{Z}^{2g}$ y $\Lambda' = \Pi_{\beta',\Omega'} \cdot \mathbb{Z}^{2g}$. A esta variedad la llamamos *variedad Jacobiana* de X y la denotamos $\mathrm{Jac}(X)$.
2. **(Descomposición de Hodge en curvas)** Dada una superficie de Riemann compacta sea $\mathcal{A}^i(X)$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de formas $\mathcal{C}^\infty$ sobre X, considerada como superficie diferencial. Sea δ la diferencial de de Rham usual y

$$0 \to \mathcal{A}^0(X) \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}^1(X) \xrightarrow{\delta} \mathcal{A}^2(X) \to 0 \tag{3.2}$$

   el complejo de de Rham diferencial, cuya homología es $H^i(X, \mathbb{R})$.
   a) Mostrar que si tomamos $\mathcal{A}^i_{\mathbb{C}}(X) = \mathcal{A}^i(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{A}^0_{\mathbb{C}}(X) \xrightarrow{\delta \otimes_{\mathbb{R}} 1} \mathcal{A}^1_{\mathbb{C}}(X) \xrightarrow{\delta \otimes_{\mathbb{R}} 1} \mathcal{A}^2_{\mathbb{C}}(X) \to 0$$

   la cohomología de esta sucesión es $H^i(X, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} = H^i(X, \mathbb{C})$.
   b) Sea $\mathcal{X}(X)$ el módulo de campos de vectores tangentes (diferenciales) sobre X, observar que $\hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}^1_{\mathbb{C}}(X), \mathbb{C}) \cong \mathcal{X}(X) \otimes \mathbb{C}$
   c) Sea $U \subseteq X$ un abierto coordenado y $(x, y) : U \to \mathbb{R}^2$ una carta. Probar que $dz := dx + idy$ y $d\overline{z} := dx - idy$ forman una base de $\mathcal{A}^1_{\mathbb{C}}(U)$ como $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulo.
   d) En particular si $z : U \to \mathbb{C}$ es una carta holomorfa, tomamos $x = \Re(z)$, $y = \Im(z)$. Ahora formamos dz y $d\overline{z}$ como en el punto anterior. Llamemos $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \in \mathcal{X}(X) \otimes \mathbb{C}$ a la base dual de $\{dz, d\overline{z}\}$. Probar que si $f \in \mathcal{C}^\infty(U) \otimes \mathbb{C}$ es una función diferencial que toma valores en $\mathbb{C}$, la expresión $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ tiene sentido y es equivalente a que f cumpla las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
   e) Sea $\omega \in \Omega^1[X]$ una 1-forma holomorfa, en particular $\omega \in \mathcal{A}^1_{\mathbb{C}}(X)$. Probar que ω es cerrada (i.e.: $\delta(\omega) = 0$), y que, si es exacta (i.e: si existe f tal que $\delta(f) = \omega$), entonces $\omega = 0$. En particular $\Omega^1[X] \subset H^1(X, \mathbb{C})$.
   f) Si $\omega \in \Omega^1[X]$ se expresa localmente como $f(z)dz$ definimos $\overline{\omega}$ localmente como $\overline{f}(z)d\overline{z}$. Mostrar que esto define una forma global $\overline{\omega} \in \mathcal{A}^1_{\mathbb{C}}(X)$. Más aún esta construcción nos da que $\Omega^1[X] \oplus \overline{\Omega^1[X]} \subseteq H^1(X, \mathbb{C})$.

Afirmación:(Teorema de Hodge para curvas)

$$H^1(X,\mathbb{C}) = \Omega^1[X] \oplus \overline{\Omega^1[X]}.$$

3. Usando el teorema de Hodge para curvas probar la Afirmación 3.3.
4. Sea X una curva algebraica proyectiva, f y $g \in \mathbb{K}(X)$ funciones racionales. Demostrar:
   a) $(fg) = (f) + (g)$.
   b) $(\frac{f}{g}) = (f) - (g)$.
   c) $(\frac{1}{f}) = -(f)$.
5. Sean p, $q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, entonces $[p] \sim_{\text{rat}} [q]$.
6. Interpretar la afirmación 3.5 en términos de sumas de funciones abelianas $\sum_i \xi(z_i)$.

4. El teorema de Riemann-Roch

A lo largo de esta sección X siempre va a ser una curva algebraica proyectiva regular e irreducible.

Definición 4.1. Decimos que un divisor $D = \sum_i n_i[p_i] \in \mathrm{Div}(X)$ es *positivo* (lo notamos $D > 0$) si $n_i \in \mathbb{N}$, para todo i. Esto define una relación de orden parcial, decimos que $D > D'$ si y sólo si $D - D' > 0$.

Observación 4.2. Notar que para cualquier par de funciones racionales $f, g \in \mathbb{K}(X)$ vale $\mathrm{ord}_p(f+g) \geq \mathrm{mín}\{\mathrm{ord}_p(f), \mathrm{ord}_p(g)\}$. Luego, si $(f) \geq D$ y $g \geq D$, vale $(f+g) \geq D$.

Definición 4.3. Dado un divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ definimos el espacio $\mathcal{L}(D)$ como el $\mathbb{C}$-espacio vectorial

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in \mathbb{K}(X) : (f) + D \geq 0\}.$$

Observación 4.4. Notar que, dado el divisor $D = \sum_i n_i[p_i] - \sum_j m_j[q_j]$, $m_j, n_i \in \mathbb{N}$; el espacio $\mathcal{L}(D)$ no es otra cosa que el espacio de funciones racionales con un cero de orden al menos m_j en cada q_j y un polo de orden a lo sumo n_i en cada punto p_i. En particular $\mathcal{L}(0) = \mathbb{C}$.

Observación 4.5. Si $D \leq D'$ entonces $\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(D')$.

Lema 4.6. *Sea $D \in \mathrm{Div}(X)$ y $p \in X$. Entonces $\mathcal{L}(D - [p]) = \mathcal{L}(D)$ ó $\mathcal{L}(D - [p])$ es un subespacio de codimensión 1 de $\mathcal{L}(D)$.*

Demostración. Elijamos una coordenada local z alrededor de p. Si $n_p \in \mathbb{Z}$ es el coeficiente que multiplica a $[p]$ en D entonces definimos un funcional $\alpha : \mathcal{L}(D) \to \mathbb{C}$ de la siguiente manera: a f una función racional le asignamos el coeficiente c_{n_p} en su desarrollo en serie de Laurent en coordenada z. Si $\alpha \equiv 0$ entonces $\mathcal{L}(D - [p]) = \mathcal{L}(D)$. Si $\alpha \neq 0$ entonces $\mathcal{L}(D - [p]) = \ker(\alpha)$ es un subespacio de codimensión 1. □

Proposición 4.7. *Sea $D \in \mathrm{Div}(X)$. El espacio $\mathcal{L}(D)$ es de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. De hecho, si escribimos $D = D^+ - D^-$ con D^+ y D^- divisores positivos (mayores que 0) soportados en subconjuntos disjuntos de puntos, tenemos que* $\dim(\mathcal{L}(D)) \leq 1 + \deg(D^+)$.

Demostración. Si $\deg(D^+) = 0$ entonces $D^+ = 0$ por lo que $\dim(\mathcal{L}(D^+)) = 1$. Como $D \leq D^+$ entonces $\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(D^+)$, en particular $\dim(\mathcal{L}(D)) \leq 1 + \deg(D^+)$.

Ahora procedemos por inducción en el grado de D^+. Supongamos entonces que la proposición es cierta para $\deg(D^+) \leq k-1$. Sea ahora D tal que $\deg(D^+) = k$. Tomemos un punto p del soporte de D^+ y consideremos el divisor $D - [p]$, su parte positiva es $D^+ - [p]$. Por hipótesis inductiva $\dim(\mathcal{L}(D-[p])) \leq 1 + \deg(D^+ - [p])$. Por el lema anterior $\mathcal{L}(D-[p])$ es igual a $\mathcal{L}(D)$ o es un hiperplano en $\mathcal{L}(D)$, lo que prueba la proposición. □

Observación 4.8. Notemos que por la demostración del Lema 4.6 y por la proposición anterior podemos más precisamente decir que, dado D, existen finitos puntos $q_1, \ldots, q_r$ tal que si $p \in X \setminus \{q_1, \ldots, q_r\}$ entonces $\mathcal{L}(D-[p])$ es una hipersuperficie de $\mathcal{L}(D)$. En los otros casos, tenemos $\mathcal{L}(D-[q_i]) = \mathcal{L}(D)$.

Notamos con $\ell(D)$ la dimensión del espacio $\mathcal{L}(D)$.

Definición 4.9. Dado un divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ definimos el espacio $K_X(D)$ como el $\mathbb{C}$-espacio vectorial

$$K_X(D) := \{\eta \in \Omega^1(X) : (\eta) + D \geq 0\}.$$

Similarmente a las demostraciones anteriores se pueden demostrar:

Lema 4.10. *Sea* $D \in \mathrm{Div}(X)$ *y* $p \in X$. *Entonces* $K_X(D-[p]) = K_X(D)$ *ó* $K_X(D-[p])$ *es un subespacio de codimensión* 1 *de* $K_X(D)$.

Proposición 4.11. *Sea* $D \in \mathrm{Div}(X)$. *El espacio* $K_X(D)$ *es de dimensión finita sobre* $\mathbb{C}$.

Notamos con $\delta(D)$ a la dimensión de $K_X(D)$.

Ahora podemos enunciar el teorema Riemann-Roch, vagamente es un resultado acerca de la relación entre la cantidad de funciones racionales con polos y ceros prescripto y la cantidad de 1-formas con polos y ceros prescriptos. Más precisamente:

Teorema 4.12 (Riemann-Roch)**.** *Sea* X *una curva regular y proyectiva, de género* $g = \dim \Omega^1[X]$. *Para todo divisor* D *sobre* X *se tiene*

$$\ell(D) - \delta(-D) = \deg(D) - g + 1.$$

Demostración. Ver [7] capitulo 7C. □

Corolario 4.13. *Dados puntos distintos* $p_1, \ldots, p_n \in X$ *y números complejos* $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ *tales que* $\sum_i r_i = 0$ *existe una* $\omega \in \Omega^1(X)$ *tal que* ω *es regular en* $X \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$, $\mathrm{ord}_{p_i}(\omega) = -1$ *para todo* $1 \leq i \leq n$, *y* $\mathrm{res}_{p_i}(\omega) = r_i$.

Demostración. Dados puntos distintos $p, q \in X$ existe $\omega \in \Omega^1(X)$ regular en $X \setminus \{p, q\}$ y tal que $\mathrm{res}_p(\omega) = 1$ y $\mathrm{res}_q(\omega) = 0$. Para ver esto, tenemos por Riemann-Roch que $\delta([p]+[q]) = \ell(-[p]-[q]) + 2 + g - 1 = g + 1$ y por el teorema de los residuos toda $\eta \in K_X(p+q)$ cumple $\mathrm{res}_p(\eta) + \mathrm{res}_q(\eta) = 0$. Tomando una $\eta \in K_X(p+q) \setminus \Omega^1[X]$ y tomando $\omega = \eta/\mathrm{res}_p(\eta)$ se tiene lo afirmado.

Ahora elijamos un punto $q \in X \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ y tomemos ω_i como arriba, regular en $X \setminus \{q, p_i\}$ y tal que $\mathrm{res}_{p_i}(\omega_i) = r_i$ y $\mathrm{res}_q(\omega_i) = -r_i$. Entonces $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i$ responde a la cuestión. □

Definición 4.14. En el espacio $\Omega^1(X)$ definimos tres sub-espacios vectoriales (sobre $\mathbb{C}$):

1. $I = I(X) = \Omega^1[X]$ el conjunto de 1-fromas holomorfas, que también llamamos (siguiendo la terminología clásica) *formas diferenciales de primera especie.*

2. $II = II(X) = \{\omega \in \Omega^1(X) : \mathrm{res}_p(\omega) = 0, \ \forall p \in X\}$ el espacio de *formas diferenciales de segunda especie.*
3. $III = III(X) = \{\omega \in \Omega^1(X) : \mathrm{ord}_p(\omega) \geq -1 \ \forall p \in X\}$ el espacio de *formas diferenciales de tercera especie.*

Observación 4.15. Notar que la condición $\omega \in III(X)$ significa que el desarrollo en serie de Laurent de ω alrededor un punto cualquiera es de tipo rdz/z con $r \in \mathbb{C}$.

Proposición 4.16. *Con la notación anterior, tenemos las siguientes relaciones:*

- $II \cap III = I$.
- $df \in II$, *para toda* $f \in \mathbb{K}(X)$.
- $d(\mathbb{K}(X)) \cap I = 0$.
- $d(\mathbb{K}(X)) \cap III = 0$.

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 4.17. $\Omega^1(X) = II + III$.

Demostración. Sea $\eta \in \Omega^1(X)$. Como el número de polos de η es finito, por el corolario 4.13, existe $\omega \in III$ tal que $\mathrm{res}_p(\omega) = \mathrm{res}_p(\eta)$ para todo $p \in X$. Entonces $\eta - \omega \in II$ y por lo tanto la descomposición $\eta = (\eta - \omega) + \omega$ satiface lo requerido. □

Esta descomposición nos da una forma de expresar integrales abelianas. En efecto si $\xi(p) = \int_{p_0}^{p} \omega$, con $\omega \in \Omega^1(X)$, podemos escribir a ω como una suma $\omega = df + \omega_2 + \omega_3$ con $\omega_2 \in II$ y $\omega_3 \in III$ (ojo, como II y III no están en suma directa esta escritura no es única). Con lo que, localmente alrededor de p_0, $\xi(p) = f(p) + \xi_2(p) + \log(g(p))$, con f y g algebraicas en X.

Ejercicios

1. Dado el siguiente teorema:

   Teorema 4.18 (Riemann). *Sea X una curva algebraica irreducible proyectiva y regular y $M(X)$ el cuerpo de funciones meromorfas en X, entonces $\mathbb{K}(X) = M(X)$.*

   Mostrar que para todo par de formas η y ω existe $f \in \mathbb{K}(X)$ tal que $\eta = f\omega$.
2. Mostrar que, si $D \sim D'$ entonces $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{L}(D')$.
3. Probar que existe un divisor K tal que $K_X(D) \cong \mathcal{L}(K - D)$ para todo $D \in \mathrm{Div}(X)$.

5. Lo que quedó en el tintero

5.1. Curvas singulares. Dijimos al principio que la teoría de formas diferenciales en curvas surgió a partir del estudio de funciones abelianas como por ejemplo

$$\phi(z) = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}}.$$

Esta función sería, en todo caso, la integral de una forma diferencial sobre la curva proyectiva $C(f)$ con $f = z^2y^2 - x^4$. Sin embargo $C(f)$ es una curva singular. La teoría para curvas singulares se apoya fuertemente en su contraparte para curvas no singulares, para cada curva X tenemos una curva no singular $\hat{X}$ (no necesariamente plana) y un morfismo $\hat{X} \to X$ que llamamos *resolución de singularidades* de X. Todos los teoremas mencionados aquí se generalizan a curvas singulares y la principal herramienta para generalizarlos es estudiar la resolución de singularidades de X.

5.2. La formulación algebraica. Todos los resultados vistos aquí tienen formulaciones algebraicas que son suceptibles de ser traducidos a curvas definidas sobre cuerpos que no son necesariamente $\mathbb{C}$. Se empieza por notar que el anillo de coordenadas de una curva afín regular es un ejemplo de *dominio de Dedekind* y se desarrolla una teoría análoga con *diferenciales de Kähler* en lugar de diferenciales holomorfas. La versión puramente algebraica del teorema de Abel, sin embargo, es un poco más larga de explicar que la que vimos acá, ya que no hace uso ni de integrales de 1-formas, ni de cocientes por reticulados como $\mathbb{C}^g/\Lambda$.

5.3. Teoría de Hodge en curvas. Muchas de las generalizaciones de los resultados vistos acá para varidades algebraicas de dimensión mayor pasan por la *descomposición de Hodge* de los grupos $H^i(X, \mathbb{C})$. Si bien la teoría de Hodge en general puede ser un tema arduo, el caso particular de curvas requiere menos herramientas y es un buen ejemplo para empezar a entender la teoría más general de la topología de las variedades algebraicas.

Referencias

[1] T. Apostol, *Calculus*, Wiley **Vol.1** (1967).
[2] F. Cukierman, *Notas sobre Integrales Abelianas*, Sociedad Matemática Peruana (2008).
[3] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Classics Library Edition (1994).
[4] S. Kleiman *The Picard scheme*, ICTP Lecture notes.
[5] S. Lang *Abelian Varieties*, Interscience tracts in pure and applied mathematics **Vol. 7** (1958).
[6] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces* , Graduate Studies in Mathematics **Vol. 5** (1995).
[7] D. Mumford, *Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **Vol. 221** (1995).
[8] H. Weyl, *Die Idee der Riemannsche Fläche*, Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen **Vol. 5** (1923).

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de matemática. Ciudad Universitaria, Pabellón 1, Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

E-mail address: fquallb@dm.ub.ar