Sobre la cantidad de ceros de un E-polinomio

María Laura Barbagallo
Departamento de Matemática, FCEN, UBA
IMAS, CONICET-UBA

Un E-polinomio en una variable con coeficientes enteros es una función de la forma

$$P(X, e^{h(X)}), \text{ donde } P(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y] \ y \ h \in \mathbb{Z}[X].$$

Estas funciones son una clase particular de las llamadas *funciones Pfaffianas* introducidas por Khovanskii a fines de los años '70 (ver [3]). Un problema fundamental en la teoría de funciones Pfaffianas es el de decidir la consistencia de un conjunto definido por igualdades y desigualdades a cero de estas funciones. Para la familia de los E-polinomios, este problema es algorítmicamente decidible (ver [4]). Surge entonces la pregunta de decidir sobre la finitud del conjunto y, en caso afirmativo, calcular la cantidad de puntos que lo forman.

En esta comunicación presentaremos un algoritmo para calcular la cantidad de ceros de un E-polinomio en un intervalo de $\mathbb{R}$ y en todo $\mathbb{R}$.

Para desarrollar este algoritmo nos inspiramos en el conocido Teorema de Sturm para polinomios, que afirma que construyendo cierta secuencia de polinomios a partir de un polinomio P y su derivado, y conociendo la cantidad de cambios de signo de esta secuencia evaluada en dos puntos $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, se puede hallar la cantidad de raíces de P en el intervalo (a, b) (ver, por ejemplo, [2]).

Nuestro método se basa en la construcción, a partir de los polinomios P y h, de una secuencia adecuada de E-polinomios en una variable, y la determinación del signo de estos E-polinomios evaluados en números reales algebraicos sobre $\mathbb{Q}$. Probamos que la cantidad de ceros de $P(X, e^{h(X)})$ puede calcularse a partir de las cantidades de cambios de signo de la secuencia evaluada en un conjunto finito de puntos calculados a lo largo de nuestra construcción. Con el objeto de determinar dichos cambios de signo, desarrollamos asimismo un procedimiento algorítmico para calcular el signo de un E-polinomio en un número real algebraico sobre $\mathbb{Q}$ dado por su *codificación de Thom* (ver [1, Definition 2.29]).

Estos resultados forman parte de un trabajo en preparación, en colaboración con Gabriela Jeronimo y Juan Sabia.

Referencias

[1] Basu, Saugata; Pollack, Richard; Roy, Marie-Francoise. *Algorithms in real algebraic geometry.* Second edition. Algorithms and Computation in Mathematics, 10. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[2] Bochnak, Jacek; Coste, Michel; Roy, Marie-Francoise. *Real Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.

[3] Khovanskii, A. *Fewnomials.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[4] Vorobjov, Nikolaj. The complexity of deciding consistency of systems of polynomials in exponent inequalities. J. Symbolic Comput. 13 (1992), 139–173.