

COLÍMITES HOMOTÓPICOS DE POSETS

XIMENA FERNÁNDEZ

RESUMEN

(Trabajo en colaboración con Gabriel Minian). Sea CAT la categoría de categorías pequeñas. Dada una categoría pequeña \mathcal{C} , la *construcción de Grothendieck* sobre un functor (diagrama) $X : \mathcal{C} \rightarrow \text{CAT}$, denotada por $\mathcal{C} \int X$, es la categoría cuyos objetos son los pares (c, x) , con c un objeto de \mathcal{C} y x un objeto de $X(c)$, y morfismos $(\alpha, \beta) : (c, x) \rightarrow (c', x')$ dados por morfismos $\alpha : c \rightarrow c'$ en \mathcal{C} y $\beta : X(\alpha)(x) \rightarrow x'$ en $X(c')$. Un teorema clásico de Thomason [Th] establece una equivalencia natural

$$\text{hocolim } \mathcal{N}X \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{C} \int X)$$

entre el colímite homotópico del nervio (o espacio clasificante) de X y el nervio de la construcción de Grothendieck.

La noción de colímite homotópico fue introducida por Bousfield y Kan [BK] y Vogt [V] como una variante de los colímites de espacios topológicos, dado que los colímites usuales no tienen buenas propiedades homotópicas.

Investigamos el caso especial de diagramas de posets finitos indexados por un poset finito P . Es decir funtores $X : P \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}$. A partir del Teorema de Thomason, resulta natural definir la noción de colímite homotópico de este tipo de funtores como la construcción de Grothendieck. Mostraremos una caracterización concreta y sencilla de esta construcción en este caso, y presentaremos algunos resultados que probamos recientemente y que permiten manipular, estudiar y calcular concretamente colímites homotópicos de poliedros utilizando técnicas y herramientas de la teoría de espacios finitos [B]. Veremos también cómo nuestros resultados generalizan versiones particulares del Teorema de McCord [McC] y el clásico Teorema A de Quillen [Q].

REFERENCIAS

- [B] Barmak, J.A. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2032 (2011).
- [BK] Bousfield, A. K.; Kan, D. M. *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. **304** (1972).
- [McC] McCord, M.C. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*. Duke Math. J. **33** (1966), 465-474.
- [Q] Quillen, D. *Higher algebraic K-theory, I: Higher K-theories*. Lect. Notes in Math. **341** (1972), 85-147.
- [Th] Thomason, R. W. *Homotopy colimits in the category of small categories*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **85** (1979), no. 1, 91-109.
- [V] Vogt, R. M. *Homotopy limits and colimits*. Math. Z., **134** (1973). 11-52.