Daniel Perrucci

Una cota recursiva elemental para el Problema 17 de Hilbert y el *Positivstellensatz.*

El Problema 17 de Hilbert plantea si dado $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_k]$ no negativo en $\mathbb{R}^k$, P puede reescribirse como una suma de cuadrados de funciones racionales; obteniendo así un certificado de la no negatividad de P. La respuesta afirmativa al problema 17 de Hilbert fue dada por Emil Artin en 1927; sin embargo, esta demostración es no constructiva y no brinda una cota para el grado de los numeradores y denominadores de las funciones racionales en la reescritura de P.

En el año 1961 Daykin logró obtener una versión constructiva de la demostración de Artin, la cual presentó en su tesis doctoral en la Universidad de Reading. Posteriormente se publicaron otras demostraciones constructivas que mejoraron las anteriores en diferentes aspectos; entre ellas, en [4] se dio una nueva demostración constructiva y una prueba de que los grados de los numeradores y denominadores obtenidos siguiendo esta construcción se encuentran acotados por una torre exponencial de altura igual al número de variables más una constante (luego, una función no recursiva elemental), siendo esta la mejor cota conocida para estos grados hasta el momento.

Otro resultado estrechamente relacionado con el Problema 17 de Hilbert, es el *Positivstellensatz*, atribuido en forma independiente a Krivine y Stengle ([1, 5]). Dado un sistema arbitrario de ecuaciones e inecuaciones polinomiales con la propiedad de no admitir solución en $\mathbb{R}^k$, el *Positivstellensatz* establece la existencia de una cierta identidad algebraica que torna evidente este hecho; razón por la cual esta identidad se considera un certificado de la vacuidad del conjunto de soluciones del sistema. La relación entre el Problema 17 de Hilbert y el *Positivstellensatz* es la siguiente: dado $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_k]$ no negativo en $\mathbb{R}^k$, a partir del certificado provisto para el *Positivstellensatz* para la vacuidad del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^k \mid P(x) < 0\}$, la obtención de la reescritura de P como una suma de cuadrados de funciones racionales es prácticamente inmediata.

Nuevamente, las demostraciones originales del *Positivstellensatz* son no constructivas y no brindan información sobre el grado de los polinomios involucrados en el certificado. La única demostración constructiva del *Positivstellensatz* conocida hasta el momento fue dada en [2]. Posteriormente, en [3] se probó que siguiendo la construcción dada en [2], los grados de los polinomios involucrados en el certificado obtenido se encuentran (nuevamente) acotados por una torre exponencial de altura igual al número de variables más una constante.

En esta comunicación, presentaremos una nueva demostración constructiva del *Positivstellensatz* tal que, siguiendo esta construcción, los grados de los polinomios involucrados en el certificado obtenido se encuentran acotados por una función recursiva elemental dada por una torre exponencial de altura 5. Consecuentemente, esto brinda una nueva demostración constructiva para el Problema 17 de Hilbert, que proporciona también como cota para los grados de los numeradores y denominadores una función recursiva elemental dada por una torre exponencial de altura 5.

Esta comunicación esta basada en un trabajo conjunto con Henri Lombardi y Marie-Françoise Roy, disponible en `http://arxiv.org/abs/1404.2338`

Referencias

[1] Krivine, J.-L. Anneaux préordonnés. *J. Analyse Math.* 12 (1964), 307–326.

[2] Lombardi, H. Effective real Nullstellensatz and variants. Effective methods in algebraic geometry, 263–288, Progr. Math., 94, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.

[3] Lombardi, H. Une borne sur les degrés pour le Théorème des zéros réel effectif. 323–345. In: Real Algebraic Geometry. Proccedings, Rennes 1991, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1992.

[4] J. Schmid, On the degree complexity of Hilbert's 17th problem and the Real Nullstellensatz. Habilitación, Universidad de Dortmund, 1998.

[5] Stengle, G. A nullstellensatz and a positivstellensatz in semialgebraic geometry. *Math. Ann.* 207 (1974), 87–97.