Título: De álgebras de Lie a formas modulares y curvas elípticas.

Autor: Reimundo Heluani

Resumen: Desde los tiempos de Frobenius y Schur es conocido que caracteres de representaciones de grupos y álgebras son funciones especiales. Todas las familias conocidas de polinomios ortogonales, de funciones de Bessel, de funciones esféricas y similares aparecen de este modo. Durante las décadas del 70 y 80 un nuevo fenómeno comenzó a ser dilucidado: los caracteres de representaciones de ciertos grupos de dimensión infinita son invariantes por el grupo modular. Durante aquellos años fueron producidos muchos ejemplos motivados principalmente por la física teórica (donde estos caracteres eran llamados de "funciones de partición") y por el desarrollo de la teoría de álgebras afines de Kac y Moody. A pesar de contar con muchos ejemplos, no fue sino hasta mediados de los 90 en que Zhu finalmente dio una explicación rigurosa para este fenómeno traduciendo para matemática las ideas originales de teoría de cuerdas: estos caracteres pueden ser vistos naturalmente como secciones (planas) de ciertos fibrados vectoriales con conexión en el espacio de moduli de curvas elípticas.
Como corolario obtenemos la modularidad de estos caracteres dado que una versión "coarse" de este espacio es el cociente del semiplano complejo H por el grupo SL(2,Z).
Durante estos últimos 20 años varios ejemplos fueron agregados, notablemente basados en super álgebras de Lie. En todos estos ejemplos podemos encontrar una versión extendida de la modularidad encontrada en el caso usual. En un trabajo conjunto con Jethro Van Ekeren mostramos que bajo ciertas condiciones técnicas (poseer supersimetría N=2) estos caracteres son formas de Jacobi (invariantes para el grupo SL(2,Z) \ltimes Z^2). El método de la prueba es geométrico por naturaleza como en el caso de Zhu: probamos que estos caracteres son secciones de fibrados naturalmente definidos en el espacio de moduli de super curvas elípticas.
La reducción de este espacio (olvidando la parte "super") simplemente clasifica pares de curvas elípticas y fibrados de lineas: es la Jacobiana de la curva elíptica universal. Sin embargo, existen sutilezas interesantes cuando se consideran familias de supercurvas sobre anillos super-conmutativos.