elENA VII

VII Encuentro Nacional de Álgebra

Curso de Nivel Básico

Introducción a las álgebras de Lie

Vanesa Meinardi

Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

VII Encuentro Nacional de Álgebra

La Falda, Sierras de Córdoba, Argentina

4 al 8 de Agosto de 2014

www.famaf.unc.edu.ar/~ciem/elena7

INTRODUCCIÓN A LAS ÁLGEBRAS DE LIE

VANESA MEINARDI

Índice

Introducción

Los objetivos de este curso son introducir las nociones básicas de álgebras de Lie. El mismo consta de dos partes. En la primer parte se introducen las definiciones, nociones básicas y ejemplos de álgebras de Lie. En la segunda parte, se presenta el teorema de Weyl, que establece la completa reducibilidad de las representaciones de dimensión finita. Cabe destacar que en algunos casos sólo se hará mención de los enunciados de ciertos Teoremas sin su prueba correspondiente, con el objetivo de dejar sólo una noción de la importancia de los mismo en los alumnos. Las demostraciones de ellos podrán ser encontradas fácilmente en la bibliografía citada.

1. Nociones básicas de álgebras de Lie

1.1. Definiciones y primeros ejemplos de álgebras de Lie.

Definición 1.1. Sea k un anillo conmutativo con unidad con característica cero. Un *álgebra* sobre k es un par (V, μ) donde V es un módulo sobre k y $\mu : V \times V \to V$ es una aplicación bilineal.

(Denotaremos, de ahora en más, de la misma manera a una aplicación bilineal y a la correspondiente aplicación lineal desde el producto tensorial).

Un *ideal a izquierda* de (V, μ) (respectivamente *ideal a derecha*) es un k-submódulo W de V tal que $\mu(W \otimes V) \subseteq W$ (resp. $\mu(V \otimes W) \subseteq W$). Una *subálgebra* de (V, μ) es un k-submódulo W de V tal que $\mu(W \otimes W) \subseteq W$. Un *morfismo de álgebras* es un morfismo de k-módulos $f : (V, \mu) \to (V', \mu')$ tal que $f(\mu(v, w)) = \mu'(f(v), f(w))$ para todo $v, w \in V$.

Definición 1.2. Un *álgebra de Lie* sobre k es un álgebra $\mathfrak{g}$ con una operación $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ denotada por $(x, y) \to [x, y]$ llamada *corchete o conmutador* de x e y, tal que satisface los siguientes axiomas:

(L_1) La operación es antisimétrica, i.e. $[x,\, y] = -[y, x]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.
(L_2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Date: 17 de Julio del 2014.
2010 *Mathematics Subject Classification.* 17B05.
CIEM&CONICET.

El axioma (L_2) es llamado la *identidad de Jacobi*. Notar que $(\mathfrak{g}, [\,,])$ es un álgebra. Luego las nociones de ideal, subálgebras y morfismos se siguen de las definiciones previas.

Si A, B son submódulos de $\mathfrak{g}$ denotaremos $[A, B]$ el submódulo generado por los elementos de la forma $[a, b]$ con $a \in A, b \in B$.

Definición 1.3. Sea $(\mathfrak{g}, [\,,])$ un álgebra de Lie, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{a}$ un submódulo de $\mathfrak{g}$, se define el *normalizador* de $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{h}$ como

$$\mathrm{norm}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{h} : [x, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}\}$$

y el *centralizador* de $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{h}$ como

$$\mathrm{cent}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{h} : [x, \mathfrak{a}] = 0\}.$$

Ambas son subálgebras de $\mathfrak{g}$ mientras que $\mathrm{cent}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$ es un ideal de $\mathrm{norm}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$.

Ejemplo 1.4. (i) Si V es un k-módulo y $[\,,]$ es la aplicación bilineal nula, $(V, [\,,])$ es un álgebra de Lie. Tales álgebras de Lie son llamadas *abelianas*.

(ii) A cada álgebra asociativa A sobre k le asociamos una estructura de álgebra de Lie definiendo $[x, y] = xy - yx$. Por ejemplo si $A = \mathrm{End}_k(V)$ es el algebra de endomorfismos de un módulo V sobre k (el producto es la composición), se obtiene un álgebra de Lie que denotaremos $\mathfrak{gl}(V)$ y se llama *algebra lineal general.* En particular denotaremos $\mathfrak{gl}(n, k)$ a $\mathfrak{gl}(k^n)$.

(iii) Sea (V, μ) un álgebra, $T \in \mathrm{End}(V)$ se dice una *derivación* de (V, μ) si

$$T(\mu(x, y)) = \mu(T(x), y) + \mu(x, T(y));$$

denotaremos $\mathrm{Der}(V, \mu) = \mathrm{Der(V)}$ al espacio vectorial de todas las derivaciones de (V, μ). $\mathrm{Der}(V)$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

(iv) Sean V un k-módulo libre de rango finito y tr la forma lineal traza en End (V). Se define

$$\mathfrak{sl}(V) = \{T \in \mathrm{End}\ (V) : \ \mathrm{Tr}(T) = 0\}$$

es un ideal de $\mathfrak{gl}(V)$. De hecho, se puede probar que $[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V)$, pues $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ si $A, B \in \mathrm{End}(V)$.

(v) Sean V un k-módulo y $b : V \otimes V \to k$ una forma bilineal. Se define

$$\mathfrak{g}(b) = \{T \in \mathrm{End(V)} : \ b(T(v), w) + b(v, T(w)) = 0 \,\forall\, v, w \in V\}.$$

Entonces $\mathfrak{g}(V)$ es un álgebra de Lie.

(vi) Describamos las 4 familias clásicas de álgebras de Lie:
A_N : es la notación correspondiente a $\mathfrak{sl}(N + 1, k)$.
B_N : son las álgebras de Lie ortogonales correspondientes a $b : k^{2N+1} \otimes k^{2N+1} \to k$, $b(v, w) = {}^t vSw$, donde identificamos los vectores de k^{2N+1} con vectores columnas y

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_N \\ 0 & \mathrm{id}_N & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2N+1}(k);$$

id_N es la matriz identidad de $\mathrm{Mat}_N(k)$.
En este caso denotaremos $\mathfrak{g}(b) = so(2N + 1, k)$. No es difícil ver que

$$so(2N + 1, k) = \{x \in \mathfrak{gl}(2N + 1, k) : xS + S^t x = 0\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2N + 1, k) : \begin{array}{lll} c_2 = -{}^t b_1, & c_1 = -{}^t b_2, & \\ q = -{}^t m, & n = -{}^t n & p = -{}^t p \end{array} \right\}.$$

C_N : son las álgebras de Lie simplécticas correspondientes a $b : k^{2N} \otimes k^{2N} \to k$, $b(v,w) = {}^t vQw$, donde

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_N \\ -\mathrm{id}_N & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2N}(k).$$

Estas álgebras de Lie serán denotadas $sp(2N,k)$. Como antes no es difícil ver que

$$sp(2N,k) = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2N,k) : q = -{}^t m,\ n \text{ y} p \text{ son simétricas} \right\}.$$

D_N : son las álgebras de Lie ortogonales correspondientes a $b : k^{2N} \otimes k^{2N} \to k$, $b(v,w) = {}^t vPw$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_N \\ \mathrm{id}_N & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2N}(k);$$

Estas álgebras de Lie serán denotadas $so(2N,k)$. Explícitamente

$$so(2N,k) = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2N,k) : q = -{}^t m,\ n \text{ y} p \text{ son antisimétricas} \right\}.$$

(vii) Construiremos álgebras de Lie nuevas a partir de álgebras de Lie dadas
  (a) Sea $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ una familia de álgebras de Lie, *el producto directo* $\prod \mathfrak{g}_i$ es un álgebra de Lie con el corchete definido coordenada a coordenada (análogamente la suma directa).
  (b) Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ álgebras de Lie y $\theta : \mathfrak{b} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ un morfismo de álgebras de Lie. Sea $\mathfrak{g}$ el k-módulo $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Entonces $\mathfrak{g}$ admite una única estructura de álgebras de Lie dada por $[x,a] = \theta(x)a$, con $x \in \mathfrak{b}$ y $a \in \mathfrak{a}$. Tal que $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{b}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.
  (c) Sea $(\mathfrak{g}, [\,,])$ un álgebra de Lie se define $[a,b]_{op} = -[a,b]$ entonces $(\mathfrak{g}, [\,,]_{op})$ es un álgebra de Lie llamada *álgebra de Lie opuesta.*
  (d) Sea $(\mathfrak{g}, [\,,])$ un álgebra de Lie y A una k-álgebra asociativa, entonces $(\mathfrak{g} \otimes_k A, [\,,]_A)$ es un álgebra de Lie con $[x \otimes a, y \otimes b]_A = [x,y] \otimes ab$, para todo $x, y \in \mathfrak{g},\ a, b \in A$.

1.2. Ejercicios. En los siguientes ejercicios sea $(\mathfrak{g}, [\,,])$ un álgebra de Lie, probar que;

1. *a*) Los axiomas (L_1) y la bilinealidad del corchete es equivalente a $[x,x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$;
   b) Ideal a izquierda es ideal a derecha y viceversa.
2. *a*) Si $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$ son ideales de $\mathfrak{g}$, entonces $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}']$ también lo es;
   b) Sea $\mathfrak{h}$ un ideal $\mathfrak{g}$ entonces el cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ tiene una estructura de álgebra de Lie tal que la *proyección canónica* $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es un morfismo de álgebras de Lie.
3. Sean $\mathfrak{h}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{a}$ un submódulo de $\mathfrak{g}$
   a) verificar que $\mathrm{norm}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$ y el $\mathrm{cent}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$ son subálgebras de $\mathfrak{g}$;
   b) el $\mathrm{cent}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$ es un ideal de $\mathrm{norm}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$. Si $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, entonces el $\mathrm{cent}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ es el centro de $\mathfrak{g}$ y será denotado por $\mathrm{cent}(\mathfrak{g})$.
4. Si $\phi : A \to B$ es un morfismo de álgebras asociativas entonces ϕ es un morfismo de álgebras de Lie.
5. *a*) Sea (V, μ) un álgebra, probar que $\mathrm{Der}(V)$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

   b) Sea $(\mathfrak{g}, [\,,])$ un álgebra de Lie, el corchete $[\,,]$ induce una transformación lineal $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ dada por $\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y]$. Probar que $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es una derivación para cada $x \in \mathfrak{g}$.
6. Sean V un k-módulo y $b : V \otimes V \to k$ una forma bilineal probar que,
   a) el álgebra $\mathfrak{g}(b)$ asociada a la forma bilineal b definida en el ejemplo (v) es un álgebra de Lie.
   b) Si b y b' son formas bilineales conjugadas por un automorfismo de V entonces $\mathfrak{g}(b)$ y $\mathfrak{g}(b')$ son isomorfas.
7. Probar que $[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V)$ y que $\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{sl}(V) + kId$.
8. Considerar el ejemplo (vii) inciso (b), probar que $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{b}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.
9. Sea $(\mathfrak{g} \otimes_k A, [\,,]_A)$ como en el ejemplo (vii) inciso (d), probar que con esta estructura $\mathfrak{g} \otimes_k A$ es un álgebra de Lie.

1.3. Módulos y representaciones. En lo que sigue $\mathfrak{g}$ será un álgebra de Lie sobre k.

Definición 1.5. Un $\mathfrak{g}$-*módulo* es un par $(V, \cdot)$ donde V es un k-módulo y $\cdot : \mathfrak{g} \otimes V \to V$ es una aplicación bilineal tal que

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v), \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{g},\ v \in V.$$

Una noción equivalente a la de $\mathfrak{g}$-módulo es la de representación. Una *representación* de $\mathfrak{g}$ en V es un morfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Las nociones de subrepresentación, submódulo, morfismo de módulos, representaciones o submódulos cociente, etc. se definen como es usual.

Definición 1.6. Un módulo no nulo se dice *irreducible* si no admite submódulos propios (i.e. submódulos distintos de si mismo y de 0).

Un módulo se dice *completamente reducible* si es suma de submódulos simples.

Ejemplo 1.7. (i) Se deduce de la identidad de Jacobi que $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es una representación que llamaremos la *representación adjunta.*

(ii) Llamaremos *representaciones naturales de las álgebras de Lie clásicas* a las respectivas inclusiones que aparecen en su definición: por ejemplo la representación natural de C_N es en k^{2N}.

(iii) Sea $\epsilon : \mathfrak{g} \to k$ la aplicación nula, es un morfismo de álgebras de Lie respecto del cual k se dice el $\mathfrak{g}$ módulo trivial.

(iv) Sean $V, W \mathfrak{g}$-módulos $V \oplus W$ es un $\mathfrak{g}$-módulo con la acción

$$x(v \oplus w) = xv \oplus xw, \quad x \in \mathfrak{g},\ v \in V,\ w \in W.$$

(v) Sean $V, W \mathfrak{g}$-módulos $V \otimes W$ es un $\mathfrak{g}$-módulo con la acción

$$x(v \otimes w) = xv \otimes w + v \otimes xw, \quad x \in \mathfrak{g},\ v \in V,\ w \in W.$$

(vi) Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo, entonces $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ el dual de V es un $\mathfrak{g}$-módulo con la acción

$$(xT)(v) = -T(xv), \quad T \in V^*,\ x \in \mathfrak{g},\ v \in V.$$

(vii) Sean V, W $\mathfrak{g}$-módulos $\mathrm{Hom}(V, W)$ es un $\mathfrak{g}$-módulo con la acción

$$(xT)(v) = x(T(v)) - T(xv), \quad T \in \mathrm{Hom}(V, W),\ x \in \mathfrak{g},\ v \in V.$$

1.4. Ejercicios.

1. Probar que módulo sobre una álgebra de Lie es equivalente a tener una representación.
2. Dar las definiciones precisas de subrepresentación, submódulo, morfismo de módulos, representaciones o submódulos cociente.
3. Probar que las subrepresentaciones de la representación adjunta son los ideales de $\mathfrak{g}$.
4. Verificar que los ejemplos (iii)-(vii) definen representaciones.

2. Álgebras de Lie nilpotentes y solubles

En esta sección k denota un cuerpo. Solo consideraremos álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita

Definición 2.1. Introduciremos las siguientes series de ideales de $\mathfrak{g}$

Serie derivada:

$$D^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \quad D^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad D^n(\mathfrak{g}) = [D^{n-1}(\mathfrak{g}), D^{n-1}(\mathfrak{g})].$$

Serie central descendente:

$$C^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \quad C^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad C^n(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^{n-1}(\mathfrak{g})].$$

Definición 2.2. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *soluble* (respectivamente *nilpotente*) si existe un entero i tal que $D^i(\mathfrak{g}) = 0$ (resp. $C^i(\mathfrak{g}) = 0$)).

Lema 2.3. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $\mathfrak{g}$ *es nilpotente*

(ii) *Existe un natural n, tal que para toda n-tupla $(x_1, \cdots, x_n)$ de elementos de $\mathfrak{g}$, se satisface*

$$[x_1, [x_2, [\cdots, x_n] \cdots]] = adx_1 adx_2 \cdots adx_{n-1} x_n = 0$$

(iii) $\mathfrak{g}$ *es una sucesión de extensiones centrales de álgebras de Lie abelianas. En otras palabras, existe una cadena de ideales $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_n = 0$, tal que $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ es el centro de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_{i+1}$.*

La demostración se deja como ejercicio al lector.

Ejemplo 2.4. (i) Toda álgebra de Lie abeliana es nilpotente y soluble.

(ii) $t(n, k) = \{(a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathfrak{gl}(n, k) : a_{ij} = 0, i > j\} \subseteq \mathfrak{gl}(n, k)$ *subálgebras de matrices triangulares superiores estrictas* de $\mathfrak{gl}(n, k)$ es nilpotente.

(iii) $\eta(n, k) = \{(a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathfrak{gl}(n, k) : a_{ij} = 0, i \ge j\} \subseteq \mathfrak{gl}(n, k)$ *subálgebras de matrices triangulares* de $\mathfrak{gl}(n, k)$ es soluble.

(iv) $\mathfrak{F} = (V_i)$ una *bandera* en un espacio vectorial V, es decir una cadena ascendente de subespacios $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ tal que la $\dim V_i = i$. Sea

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{F}) = \{T \in \mathrm{End}(V) : T(V_i) \subset V_{i-1}\}.$$

Entonces $\mathfrak{u}(\mathfrak{F})$ es una subálgebra de Lie nilpotente de $\mathfrak{gl}(V)$. En efecto sea $\mathfrak{u}(\mathfrak{F})_k = \{T \in \mathrm{End}(V) : T(V_i) \subset V_{i-k}\}$; es fácil ver que es un ideal de $\mathfrak{u}(\mathfrak{F})$. Más aún $[\mathfrak{u}(\mathfrak{F}), \mathfrak{u}(\mathfrak{F})_k] = \mathfrak{u}(\mathfrak{F})_{k+1}$. Como $\mathfrak{u}(\mathfrak{F})_k = 0$ para $k \gg 0$, se sigue que $\mathfrak{u}(\mathfrak{F})$ es nilpotente.

(iv) Sea $\mathfrak{F}$ una bandera en V. Sea $\mathfrak{b}(\mathfrak{F}) = \{T \in \mathrm{End}(V) : T(V_i) \subset V_i\}$ es soluble como subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. Pues $\mathfrak{u}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{b}(\mathfrak{F})$ es un ideal de $\mathfrak{b}(\mathfrak{F})$ y $\mathfrak{b}(\mathfrak{F})/\mathfrak{u}(\mathfrak{F})$ es abeliana dado que si $T, S \in \mathfrak{b}(\mathfrak{F})$, entonces $[T, S] \in \mathfrak{U}(\mathfrak{F})$. Por lo tanto $[\mathfrak{b}(\mathfrak{F}), \mathfrak{b}(\mathfrak{F})] \subset \mathfrak{u}(\mathfrak{F})$ y $\mathfrak{u}(\mathfrak{F})$ es nilpotente i.e. $\mathfrak{b}(\mathfrak{F})$ es soluble.

2.1. Ejercicios.

1. *a*) Probar que toda álgebra nilpotente es soluble. Es cierta la recíproca?
   b) Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie tal que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ es nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.
   c) Si $\mathfrak{g}/\mathrm{Cent}(\mathfrak{g})$ es nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

2.1.1. Teoremas básicos para álgebras nilpotentes.

Teorema 2.5. *(ENGEL) $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y solo si $adx \in End(\mathfrak{g})$ es una transformación nilpotente, para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Para probar el teorema de Engel, consideramos el enunciado siguiente:

Teorema 2.6. *Sea $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$ una representación tal que $\rho(x) \in End(V)$ es una transformación nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$. Entonces existe una bandera $\mathfrak{F}$ en V tal que $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{u}(\mathfrak{F})$.*

El teorema 2.6 es equivalente a

Teorema 2.7. *Sea $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$ una representación tal que $\rho(x) \in End(V)$ es una transformación nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$. Entonces existe $v \in V, v \neq 0$ tal que $\rho(x)v = 0$ para cada $x \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. En primer lugar, podemos suponer, reemplazando $\mathfrak{g}$ por su imagen, que $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$.

Se sigue que ad$x$ es nilpotente para cada $x \in \mathfrak{g}$, (se deja como ejercicio al lector).

Probaremos el teorema por inducción en la dimensión de $\mathfrak{g}$. Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$, dim$\mathfrak{h}$ < dim$\mathfrak{g}$. Entonces $\mathrm{norm}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \supset \mathfrak{h}$. En efecto, se considera la representación de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$: por el teorema para $\mathfrak{h}$, existe $\bar{v} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ tal que $x \cdot \bar{v} = 0$, para todo $x \in \mathfrak{h}$. Así, todo representante v de $\bar{v}$ pertenece a $\mathrm{norm}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) - \mathfrak{h}$.

Deducimos que $\mathfrak{g}$ tiene un ideal de codimensión 1. Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$, maximal entre las subálgebras distintas de $\mathfrak{g}$. Como $\mathrm{norm}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ contiene propiamente a $\mathfrak{h}$, es igual a $\mathfrak{g}$, es decir $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Si $y \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$, se sigue que $\mathfrak{h} \oplus k \cdot y$ es una subálgebra: luego $\mathfrak{h}$ tiene codimensión 1.

Fijemos entonces $\mathfrak{h}$ un ideal de codimensión 1, $y \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$. Sea $W = \{v \in V : x \cdot v = 0, \text{ para todo } x \in \mathfrak{h}\}$. Por hipótesis inductiva, $W \neq 0$. Siendo $\mathfrak{h}$ un ideal, W es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V. En particular, como y es nilpotente, existe $v \in W - 0$ tal que $y \cdot v = 0$, v es entonces anulado por todos los elementos de $\mathfrak{g}$. □

Demostración del Teorema 2.5. : Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, se sigue de (ii) en el Lema que ad$x$ es nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$. Recíprocamente, si ad$x$ es nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$, por el Teorema 2.6, existe una bandera $\mathfrak{F}$ en $\mathfrak{g}$ estable por la representación adjunta de $\mathfrak{g}$. Por (iii) del Lema, $\mathfrak{g}$ es nilpotente. □

2.2. Ejercicios.

1. Probar que el Teorema 2.6 es equivalente al Teorema 2.7
2. Probar que ad$x$ es nilpotente para cada $x \in \mathfrak{g}$.
3. Sea $\mathfrak{g}$ nilpotente, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces si $\mathfrak{h} \neq 0$, entonces $\mathfrak{h} \cap \mathrm{cent}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

2.2.1. Teoremas básicos sobre álgebras solubles. En lo que sigue supondremos k algebraicamente cerrado y de característica cero.

Teorema 2.8. *(LIE) Si $\mathfrak{g}$ es soluble y $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$ es una representación de dimensión finita entonces existe una bandera $\mathfrak{F}$ en V tal que $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{b}(\mathfrak{F})$.*

El Teorema 2.8 es equivalente a

Teorema 2.9. *Si* $\mathfrak{g}$ *es soluble y* $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$ *es una representación irreducible de dimensión finita entonces* V *contiene una subrepresentación de dimensión* 1, *por lo tanto existe* $v \neq 0$, $v \in V$ *que es autovector simultaneo de* $\rho(x)$ *para todo* x.

2.3. Ejercicios.

1. Probar que el Teorema 2.8 es equivalente al Teorema 2.9.
2. *a*) Probar que si $\mathfrak{g}$ es soluble y $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ es una representación irreducible de dimensión finita entonces la $\dim V = 1$.
   b) Sea $\mathfrak{g}$ soluble entonces existe una bandera de ideales de $\mathfrak{g}$.

2.3.1. Criterio de Cartan. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. Supongamos $\mathrm{tr}(XY) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.

2.4. Ejercicios.

1. Probar la recíproca del criterio de Cartan.

3. Álgebras de Lie semisimple

3.1. Caracterización de las álgebras de Lie semisimples.

Es esta sección $\mathfrak{g}$ será un álgebra de Lie de dimensión finita.

Definición 3.1. $\mathfrak{g}$ se dice *simple* si tiene exactamente dos ideales: $\mathfrak{g}$ y el 0, y si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$. Se dice *semisimple* si es suma directa de una familia de ideales simples.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Si $x, y \in \mathfrak{g}$ se define $K_\mathfrak{g}(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\, \mathrm{ad}y)$. Entonces $K_\mathfrak{g}$ es una forma bilineal simétrica en $\mathfrak{g}$, llamada la *forma de Killing* de $\mathfrak{g}$, $K_\mathfrak{g}$ es también asociativa en el siguiente sentido $K_\mathfrak{g}([x, y], x) = K_\mathfrak{g}(x, [y, z])$.

Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ se define el ortogonal de $\mathfrak{a}$ respecto de la forma de Killing como

$$\mathfrak{a}^\perp = \{x \in \mathfrak{g} : k(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{a}\}.$$

Lema 3.2. *Si* $\mathfrak{h}$ *es un ideal de* $\mathfrak{g}$ *entonces* $K_\mathfrak{h} = K_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$.

Demostración. Se sabe que si $W \subset V$ es un subespacio vectorial de dimensión finita y ϕ es un endomorfismo de V tal que mapea V en W, entonces $\mathrm{tr}\phi = \mathrm{tr}\phi\mid_W$. Luego si $x, y \in \mathfrak{h}$ $(\mathrm{ad}x\, \mathrm{ad}y) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, por lo tanto $K_\mathfrak{g} \mid_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\, \mathrm{ad}y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\, \mathrm{ad}y)|_\mathfrak{h} = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{h}x\, \mathrm{ad}_\mathfrak{h}y) = K_\mathfrak{h}(x, y)$. □

Teorema 3.3. *Son equivalentes*

(i) $\mathfrak{g}$ *es semisimple.*
(ii) *rad*$(\mathfrak{g}) = 0$, *donde rad*$(\mathfrak{g})$ *es el ideal soluble maximal de* $\mathfrak{g}$.
(iii) *La forma de Killing es no degenerada.*

Demostración. (i)⇒(ii): Supongamos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, donde $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales de $\mathfrak{g}$. Es fácil ver que $\mathrm{rad}\,(\mathfrak{g}) = \mathrm{rad}\,(\mathfrak{a}) \oplus \mathrm{rad}\,(\mathfrak{b})$. De modo que basta ver que si $\mathfrak{g}$ es simple entonces $\mathrm{rad}\,(\mathfrak{g}) = 0$. Observemos que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ pues $\mathfrak{g}$ es no abeliana. Por ende $\mathfrak{g}$ es no soluble y así su radical debe ser 0. (ii)⇒(iii): Sea $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}^\perp$; es un ideal de $\mathfrak{g}$ pues es el núcleo de la aplicación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}^*$ inducida por la forma de Killing. Ahora $K_\mathfrak{s}(\mathfrak{s}, [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]) = K_\mathfrak{g}(\mathfrak{s}, [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]) = 0$. Sea $\tilde{\mathfrak{s}}$ la imagen de $\mathfrak{s}$ en $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g}) : \tilde{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s}/\mathrm{cent}(\mathfrak{g})$. Por el criterio de Cartan, $\tilde{\mathfrak{s}}$ (y por ende $\mathfrak{s}$) es soluble. De modo que $\mathfrak{s} \subset \mathrm{rad}\,(\mathfrak{g}) = 0$ y K es no degenerada. (iii)⇒ (i): Veamos primero que (iii)⇒(ii): si $\mathrm{rad}\,(\mathfrak{g}) \neq 0$, existe un ideal abeliano no nulo $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Si $x \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{g}$, es fácil ver que $(\mathrm{ad}x\, \mathrm{ad}y)^2 = 0$ por ende $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\, \mathrm{ad}y) = 0$, i.e. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^\perp = 0$, absurdo. Ahora probemos que (ii)⇒ (*i*): Si $\mathfrak{g}$

es simple no hay nada que probar. Sino sea $\mathfrak{h}$ un ideal propio de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, soluble por el criterio de Cartan, por lo tanto nulo. De modo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$ y podemos aplicar la hipótesis inductiva en la dimensión de $\mathfrak{g}$. $\square$

3.1.1. Completa reducibilidad de representaciones.

Definición 3.4. Sea V un $\mathfrak{g}$-módulo, V se dice completamente reducible si es suma directa de $\mathfrak{g}$-submódulos irreducibles.

Teorema 3.5 (WEYL)**.** *Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonces todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita es completamente reducible.*

Usando el Teorema de Weyl se prueba:

Teorema 3.6 (LEVI)**.** *Toda álgebra de Lie de dimensión finita se descompone en suma directa de su radical y de una subálgebra de Lie semisimple.*

3.2. Ejercicios.

1. Probar que V es un $\mathfrak{g}$-módulo completamente reducible si cada $\mathfrak{g}$-submódulo $W \subset V$ tiene un complemento W', i.e. $V = W \oplus W'$.
2. *a*) Si $\mathfrak{h}$ es un ideal semisimple de un álgebra de Lie de dimensión finita entonces existe un único ideal $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{b}$.
   b) Si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces la aplicación adjunta es inyectiva.

Referencias

[1] J. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, 3rd. printing, Springer-Verlag, (1980).
[2] N. Jacobson, *Lie algebras*, Wile Intersciences, New York-London, (1962).
[3] H. Samelson, *Notes on Lie algebras*, Springer-Verlag.
[4] J.-P. Serre, *Algébres de Lie semisimples complexes*, Benjamin, New York-Amsterdam, (1966).
[5] Varadarajan, *Algébres de Lie semisimples complexes*, Springer-Verlag, (1966).
[6] N. Bourbaki, *Groupes et algébres de Lie*, Chapitres 1, 2, 4, 5 et 6, Hermann, Paris, (1968).
[7] N. Andruskiewitsch, *Álgebras de Lie Semisimples y Representaciones de dimensión finita*, (1994).

FaMAF- Universidad Nacional de Córdoba, Medina Allende s/n-Ciudad Universitaria, CP:X5000HUA-Córdoba, Argentina.

E-mail address: vanemeinardi@gmail.com