INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE FORMAS MODULARES

MARTÍN MEREB

RESUMEN. Tomando como motivación el problema de la representación de un número como suma de cuadrados, introduciremos las formas modulares y la geometría de las superficies de Riemann subyacentes. Probaremos varias identidades entre funciones aritméticas provistos de resultados de dimensión finita y ciertos operadores lineales diagonalizables. Serán necesarios algunos resultados de análisis complejo y topología.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.

0.1. Problema: Sumas de cuadrados. Sea $r_k(n)$ la cantidad de soluciones enteras de la ecuación

$$n = x_1^2 + \ldots + x_k^2$$

con n y k enteros positivos fijos. Buscamos expresiones sencillas para $r_k(n)$. Para simplificar esta exposición nos restringiremos a los k pares.

Veremos cómo encontrar de manera sistemática fórmulas como

$$r_2(n) = 4\sum_{d|n}\left(\frac{-1}{d}\right) \tag{0.1}$$

$$r_4(n) = 8\sum_{d|n, 4\nmid d} d \tag{0.2}$$

$$r_6(n) = \left(\left(\frac{-1}{g}\right)2^{2\nu+4} - 4\right)\sum_{d|n}\left(\frac{-1}{d}\right)d^2 \tag{0.3}$$

y

$$r_8(n) = 16 \begin{cases} \sum_{d|n} d^3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sum_{d|n} d^3 - 2\sum_{d|g} d^3 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \tag{0.4}$$

donde $n = 2^\nu g$ con g impar y $\nu \geq 0$, y el símbolo de Jacobi $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{(n-1)/2}$ si n es impar y $\left(\frac{-1}{n}\right) = 0$ para n par.

Considerando funciones generatrices, para $\tau \in \mathbb{C}$ definimos

$$\Theta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \tag{0.5}$$

donde $q = \exp(2\pi i\tau)$. Esta serie converge uniforme y absolutamente sobre compactos del semiplano de Poincaré

$$\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C}/\mathrm{Im}(\tau) > 0\}.$$

Se tiene pues que

$$(\Theta(\tau))^k = \sum_{n\geq 0} r_k(n) q^n$$

transformando el problema a hallar nuevas expresiones para Θ y extraer luego los coeficientes.

Sucede que las funciones Θ^k satisfacen ciertas ecuaciones funcionales que limitan enormemente la dimensión del espacio donde viven, permitiendo escribirlas como combinación lineal de otras cuyos coeficientes son fáciles de calcular.

Ejercicios.

1. Probar que $\Theta(\tau) + \Theta(\tau + 1/2) = 2\Theta(4\tau)$.
2. Probar
$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-q^k}\right)$$
donde $p(n)$ es el número de maneras de escribir a n como suma de enteros positivos, sin importar el orden de los mismos.

0.2. Un poco de Fourier. Para $f \in L^1(\mathbb{R})$ se define la *transformada de Fourier* como

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}\, x$$

y la transformada inversa de f como

$$\check{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{2\pi i \xi x}\, \mathrm{d}\, \xi.$$

Cuando f y $\hat{f}$ pertenecen a $L^1(\mathbb{R})$ se tiene que $\check{\hat{f}} = f$ en casi todo punto.

Afirmación 0.1. *Entre las propiedades de la transformada podemos mencionar*

- *Si* $g(x) = f(x+a)$, $\hat{g}(\xi) = e^{2\pi i a\xi}\hat{f}(\xi)$.
- *Si* $g(x) = f(bx)$ *con* $b > 0$, *entonces* $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{b}\hat{f}(\xi/b)$.
- *Sea* $f(x) = \exp(-\pi x^2)$, *entonces* $\hat{f} = f$.

La fórmula de Poisson (ver ejercicio 0.2 abajo)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) \tag{0.6}$$

aplicada a $g(x) = f(\sqrt{t}x)$, nos da

$$\Theta\left(\frac{-1}{4\tau}\right) = \sqrt{\frac{2\tau}{i}}\Theta(\tau)$$

para todo $\tau \in H$. Es esta propiedad, junto a $\Theta(\tau) = \Theta(\tau+1)$, la que limitará las dimensiones.

Para más detalles sobre transformadas y series de Fourier, ver [11].

Ejercicios.

- Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Probar que $g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+x)$ es periódica y pertenece a $L^1([0,1])$.
- Sea $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}$ el desarrollo en serie de Fourier de $g(x)$. Probar que $c_n = \hat{f}(n)$.
- Probar que si $f(x) = O(|x|^{-2})$ y $\hat{f}(\xi) = O(|\xi|^{-2})$ son continuas, entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

0.3. La curva modular $X(1)$. Estudiemos una ecuación funcional mas simple

$$f(\tau) = f(\tau+1) \text{ y } f(\tau) = f(-1/\tau). \tag{0.7}$$

Para $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ notamos

$$\gamma\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Dado que $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ está generado por $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y por $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, las ecuaciones (0.7) equivalen a

$$f(\gamma\tau) = f(\tau),\ \forall\, \gamma \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}). \tag{0.8}$$

Lo que nos lleva a estudiar el espacio $Y(1) := \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}$, junto con sus funciones meromorfas.

Un dominio fundamental estándar para la acción de $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ en $\mathcal{H}$ es

$$D = \left\{ \tau \in \mathcal{H} /\ \frac{-1}{2} \leq \Re(\tau) \leq \frac{1}{2},\ |\tau| \geq 1 \right\}. \tag{0.9}$$

Es conveniente considerar una compactificación $X(1)$ de $Y(1)$ dada por

$$X(1) := \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})\backslash\overline{\mathcal{H}}$$

donde $\overline{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, denominada *curva modular.* Consideramos en $\overline{\mathcal{H}}$ la topología de las bolas tangentes, donde $\mathcal{H} \subseteq \overline{\mathcal{H}}$ es abierto, una base de entornos para $x \in \mathbb{Q}$ es

$$U_x(r) = \left\{ \tau \in \overline{\mathcal{H}} /\ |x + ir - \tau| \leq r \right\}$$

y una para ∞ es

$$U_\infty(R) = \{\tau \in \mathcal{H} /\ \mathrm{Im}(\tau) \geq R\} \cup \{\infty\}.$$

Observemos que con esta topología $\overline{D} = D \cup \{\infty\}$ resulta compacto y por lo tanto $X(1)$ también.

Ejercicios.

1. Probar que $\mathrm{Im}(\gamma\tau) = \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2}$ con $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$.
2. Probar que $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$ actúa transitivamente en $\mathcal{H}$. Hallar el estabilizador de $i \in \mathcal{H}$.
3. Probar que la medida $\frac{\mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y}{y^2}$ es invariante por $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$.
4. Probar que en $\mathcal{H}$, la métrica $(\mathrm{d}\, s)^2 = \frac{(\mathrm{d}\, x)^2 + (\mathrm{d}\, y)^2}{y^2}$ es invariante por la acción de $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$.
5. Para la acción de $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ en $\overline{\mathcal{H}}$, probar que
   a) el estabilizador de ∞ es $\left\{\pm T^k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,
   b) el estabilizador de i es $\left\{S^k,\ k = 0,1,2,3\right\}$,
   c) el estabilizador de ω es $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^k,\ k = 0,1,2,3,4,5\right\}$,
   d) cualquier punto de $\overline{\mathcal{H}}$ con estabilizador más grande que $\pm\,\mathrm{Id}$ es equivalente a uno de los anteriores.

0.4. Superficies de Riemann. Una *superficie de Riemann* es un espacio topológico Hausdorff X con una estructura compleja, es decir, tal que para todo punto $x \in X$ existe un entorno abierto $x \in U \subseteq X$, un $V \subseteq \mathbb{C}$ abierto y un homeomorfismo $z : U \to V$, de manera tal que los entornos coordenados (U, z) sean compatibles. Entendemos aquí por "compatibles" que los cambios de coordenadas

$$z_2(z_1)^{-1} : z_1(U_1 \cap U_2) \to z_2(U_1 \cap U_2)$$

son funciones holomorfas, para todo par de entornos coordenados $(U_1, z_1 : U_1 \to V_1)$, y $(U_2, z_2 : U_2 \to V_2)$.

La función $f : X \to \mathbb{C}$ es holomorfa si lo es localmente, es decir, si las composiciones $fz : V \to \mathbb{C}$ son holomorfas para todos los $(U, z : U \to V)$ entornos coordenados.

También tiene sentido hablar de funciones meromorfas, órdenes de anulación y de polos y aplicaciones holomorfas $F : X \to Y$ entre dos superficies de Riemann, tomando entornos coordenados de la manera usual.

La superficie $Y(1)$ hereda de manera natural la estructura holomorfa de $\mathcal{H}$.

Sea $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa que satisface la primera de las ecuaciones (0.7), es decir $f(\tau) = f(\tau + 1)$. Por ser periódica admite un desarrollo en series de Fourier

$$f(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^n.$$

Diremos que f es *meromorfa en* ∞ si hay a lo sumo un número finito de $a_n \neq 0$ con $n < 0$, y que es *holomorfa en* ∞ si $a_n = 0$ para todo $n < 0$.

Observación 0.1. $X(1)$ es topológicamente una esfera.

Para más detalles sobre superficies de Riemann, recomendamos [9], [6] o [10].

Ejercicios.

1. Sea X una superficie de Riemann. Probar que las funciones meromorfas de X se corresponden con aplicaciones holomorfas de X en la esfera de Riemann que no son constantemente ∞.
2. Sea $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann con X conexa. Probar que F es abierta.
3. Sea $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann con X compacta e Y conexa. Probar que F es sobreyectiva.
4. Sea X una superficie de Riemann compacta. Probar que las únicas funciones holomorfas de X en $\mathbb{C}$ son las constantes. Comparar con Teorema de Liouville.
5. Sean X una superficie de Riemann compacta y $x_1, \ldots, x_k \in X$ puntos diferentes. Sean $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Probar que el espacio de funciones meromorfas de X con polos únicamente en x_i de orden a lo sumo n_i tiene dimensión a lo sumo $1 + n_1 + \ldots + n_k$. (Nota: hay que agregar la función 0 para que formen un espacio vectorial.)
6. Sea X la esfera de Riemann. Probar que las funciones meromorfas de X son funciones racionales. Probar además que si $f : X \to \mathbb{C}$ sólo tiene un polo en ∞ entonces f es un polinomio cuyo grado coincide con el orden del polo. Comparar con el ejercicio anterior.
7. ¿Cómo deberían definirse los entornos coordenados de la clase de ∞ en $X(1)$?

1. Formas Modulares.

Definición 1.1. Sea f meromorfa en $\mathcal{H}$ y $k \in \mathbb{Z}$. Supongamos que f satisface

$$f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau), \ \forall\, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

y meromorfa en ∞. Entonces, se dice que f es una *función modular de peso k para* $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$.

Las funciones modulares se corresponden con formas diferenciales en $X(1)$ (ver ejercicio 16 de la sección 2 más abajo).

Proposición 1.2. *Sea $f(\tau)$ una función modular no nula de peso k para $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Para cada $P \in \mathcal{H}$ notamos $\nu_P(f)$ al orden de anulación (o menos el orden del polo) de $f(\tau)$ en P. Sea $\nu_\infty(f)$ el subíndice del primer término no nulo en la q-expansión de f. Entonces*

$$\nu_\infty(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\omega(f) + \sum_{\substack{P \in Y(1) \\ P \neq i,\omega}} \nu_P(f) = \frac{k}{12} \tag{1.2}$$

donde la suma se hace tomando un punto $P \in \mathcal{H}$ por cada clase de equivalencia, salvo la de $\omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ y la de i.

Demostración. Para simplificar la demostración, supongamos que f no tiene ni ceros ni polos en el borde del dominio fundamental D, salvo quizás en i y en ω que es equivalente a $-\overline{\omega}$.

Integrando $\frac{1}{2\pi i}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau$ a lo largo de un lazo que encierre a todos los ceros y polos de f del interior de D, recorrido en sentido antihorario, se obtiene la sumatoria del miembro izquierdo de (1.2).

Observar que $\nu_i(f)$ es la integral de $\frac{1}{2\pi i}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau$ a lo largo de una circunferencia suficientemente pequeña alrededor de i recorrida en sentido antihorario. Por (1.3) del siguiente ejercicio 4 (con $\gamma = S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$) la integral a lo largo del arco de la curva contenido en D recorrido en sentido horario tiende a $\frac{-1}{2}\nu_i(f)$ cuando el radio tiende a 0.

Análogamente, las integrales de los arcos dentro de D de circunferencias centradas en ω y $-\overline{\omega}$ tienden a $\frac{-1}{6}\nu_\omega(f) = \frac{-1}{6}\nu_{-\overline{\omega}}(f)$ (tomar γ recorriendo $\mathrm{Id}, TS, (TS)^2, \ldots, (TS)^5$, el estabilizador de ω).

La integral de $\frac{1}{2\pi i}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau$ a lo largo de

$$C_N(t) = \frac{1}{2} - t + iN, \quad t \in [0,1]$$

tiende a $-\nu_\infty(f)$ cuando $N \to \infty$.

Integrando sobre el borde de:

$$D \cap \{\mathrm{Im}(\tau) \leq N\} - (\{|\tau - i| < \epsilon\} \cup \{|\tau - \omega| < \epsilon\} \cup \{|\tau + \overline{\omega}| < \epsilon\})$$

con $N \to \infty$ y $\epsilon \to 0$, obtenemos (gracias a (1.3) del ejercicio 4)

$$\sum_{\substack{P \in Y(1) \\ P \neq i,\omega}} \nu_P(f) = \frac{-1}{2}\nu_i(f) + \frac{-1}{6}\nu_\omega(f) + \frac{-1}{6}\nu_{-\overline{\omega}}(f) - \nu_\infty(f) - k\frac{1}{2\pi i}\int_{-\overline{\omega}}^{i} \frac{\mathrm{d}\,\tau}{\tau}$$

donde la última integral se recorre sobre $\{|\tau| = 1\}$. Calculando la integral (ver ejercicio 5) y reagrupando términos se obtiene (1.2) □

Definición 1.3. Sea f una función modular de peso k para $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Si además f es holomorfa en $\mathcal{H}$ y en ∞, decimos que es una *forma modular de peso k para* $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Notamos al conjunto de tales funciones como $\mathrm{M}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$.

Ejercicios.

1. Probar que $\mathrm{M}_0(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}$.
2. Probar que si k es impar $\mathrm{M}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})) = 0$.
3. Probar que si k es negativo o 2 entonces $\mathrm{M}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})) = 0$.
4. Sea $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ y sea $f(\tau)$ meromorfa en $\mathcal{H}$ sin ceros ni polos en una curva $C \subseteq \mathcal{H}$. Supongamos que $f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau)$. Probar que

$$\int_C \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau - \int_{\gamma C} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau = -k\int_C c\frac{\mathrm{d}\,\tau}{c\tau + d}. \tag{1.3}$$

5. Sea $C(t)=\exp(-2\pi i t)$, $t\in[-1/3,-1/4]$ el arco de la circunferencia $\{|\tau|=1\}$ recorrida en sentido horario desde $-\overline{\omega}$ hasta i. Probar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\mathrm{d}\,\tau}{\tau} = -\frac{1}{12}. \tag{1.4}$$

6. Sea $f\in \mathrm{M}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$ no nula. Probar que
   - Si $k=4$, entonces $\nu_\omega(f)=1$, y $\nu_P(f)=0$ para los demás P.
   - Si $k=6$, entonces $\nu_i(f)=1$, y $\nu_P(f)=0$ para los demás P.
   - Si $k=8$, entonces $\nu_\omega(f)=2$, y $\nu_P(f)=0$ para los demás P.
   - Si $k=10$, entonces $\nu_\omega(f)=\nu_i(f)=1$, y $\nu_P(f)=0$ para los demás P.
   - Si $k=14$, entonces $\nu_\omega(f)=2$, $\nu_i(f)=1$, y $\nu_P(f)=0$ para los demás P.

1.1. Series de Eisenstein. A continuación definiremos una familia clásica de formas modulares de gran utilidad.

Sea $k\geq 4$ un entero par. La función

$$G_k(\tau) := \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m\tau+n)^k} \tag{1.5}$$

es una forma modular de peso k para $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$, llamada *serie de Eisenstein*, que verifica

$$\lim_{\tau\to i\infty} G_k(\tau) = 2\zeta(k), \tag{1.6}$$

donde $\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$, es la función zeta de Riemann.

Se define la *serie normalizada de Eisenstein* como

$$E_k(\tau) := \frac{G_k(\tau)}{2\zeta(k)}.$$

Proposición 1.4. *La expansión de Fourier de $E_k(\tau)$ es*

$$E_k(\tau) = 1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n \tag{1.7}$$

donde los B_k son los números de Bernoulli, definidos por

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m\frac{t^m}{m} \tag{1.8}$$

y

$$\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k.$$

Demostración. Se tiene que

$$\pi\cot(\pi\tau) = \frac{1}{\tau}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau+n}+\frac{1}{\tau-n}\right), \quad \tau\in\mathcal{H}. \tag{1.9}$$

También vale que

$$\pi\cot(\pi\tau) = \pi\frac{\cos(\pi\tau)}{\sin(\pi\tau)} = i\pi-\frac{2i\pi}{1-q} = i\pi-2i\pi\sum_{n=0}^{\infty}q^n.$$

Igualando ambas expresiones y derivando $k-1$ veces término a término obtenemos la *fórmula de Lipschitz*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n+\tau)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}q^n. \tag{1.10}$$

El resultado se obtiene sumando esta fórmula en $m\tau$ con $m \in \mathbb{Z}$ no nulo, más

$$\sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^k} = 2\zeta(k),$$

junto con

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k B_k}{k!2} \tag{1.11}$$

para $k > 0$ par. □

Ejercicios.

1. Probar que para $k \in \{4, 6, 8, 10, 14\}$ el espacio $\mathrm{M}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$ está generado por E_k.
2. Usando que $\dim(\mathrm{M}_8(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))) = 1$ probar que $E_4^2 = E_8$. Concluir que
$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_3(i)\sigma_3(n-i).$$
3. Usando que $\dim(\mathrm{M}_{10}(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))) = 1$ probar que
$$11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040 \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_3(i)\sigma_5(n-i).$$
4. Probar que $E_6E_8 = E_4E_{10} = E_{14}$.
5. Probar (1.6).
6. Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ un reticulado (i.e.: un $\mathbb{Z}-$módulo discreto de rango 2). Probar que la serie
$$\sum_{0 \neq \rho \in \Lambda} \frac{1}{|\rho|^t}$$
es absolutamente convergente para $t > 2$.
7. Probar que
$$E_k(\tau) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ \gcd(m,n)=1}} \frac{1}{(m\tau + n)^k}.$$
8. Usando (1.8), probar (1.11).
9. Probar (1.9) a partir de la fórmula de Euler:
$$\sin(\tau) = \tau \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau^2}{(n\pi)^2}\right). \tag{1.12}$$
10. Deducir (1.9) de la fórmula de Poisson (0.6), usando que si $f(x) = e^{-|x|}$, la transformada $\hat{f}(\xi) = \dfrac{2}{1 + 4\pi^2\xi^2}$.

1.2. Peso 2. Cabe preguntarse qué sucede con la serie de Eisenstein en el caso $k = 2$. Aquí hace falta algo de cuidado con el orden de las series, puesto que dejan de converger de manera absoluta. Definimos

$$G_2(\tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n} \frac{1}{(m\tau + n)^2} \tag{1.13}$$

donde el subíndice de la segunda suma recorre todos los enteros, salvo cuando $m = 0$ en cuyo caso $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Con este orden de los sumandos se tiene, al igual que antes

$$E_2(\tau) := \frac{G_2(\tau)}{2\zeta(2)} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n.$$

Proposición 1.5. *La serie de Eisenstein G_2 satisface la ecuación funcional*

$$\tau^{-2}G_2\left(-1/\tau\right) = G_2(\tau) - \frac{2\pi i}{\tau}. \tag{1.14}$$

Demostración. De (1.13) se obtiene

$$\tau^{-2}G_2(-1/\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m}\frac{1}{(m\tau+n)^2} = 2\zeta(2) + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{(m\tau+n)^2} \tag{1.15}$$

donde la suma del medio recorre todo $\mathbb{Z}^2$ salvo el término $(m,n)=(0,0)$.

Restando

$$\sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m\tau+n)(m\tau+n+1)} = 0 \tag{1.16}$$

a $G_2 = 2\zeta(2) + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(m\tau+n)^{-2}$ obtenemos

$$G_2(\tau) = 2\zeta(2) + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m\tau+n)^2(m\tau+n+1)}.$$

Observemos que ahora la serie del miembro derecho es absolutamente convergente. Invirtiendo el orden de estas sumatorias y restandoselo a (1.15) tenemos

$$G_2(\tau) = \tau^{-2}G_2(-1/\tau) - \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{(m\tau+n)(m\tau+n+1)}.$$

La demostración termina usando

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N-1}\sum_{m\neq 0}\left(\frac{1}{(m\tau+n)} - \frac{1}{(m\tau+n+1)}\right) = \lim_{N\to\infty}\frac{2}{\tau}\pi\cot\left(\frac{\pi N}{\tau}\right) - \frac{2}{\tau} = \frac{2\pi i}{\tau} \tag{1.17}$$

para $\tau\in\mathcal{H}$. □

Ejercicios.

1. Probar (1.16).
2. Completar los detalles de (1.17).
3. Probar que la función $G_2(\tau)-\pi/\mathrm{Im}(\tau)$ satisface (1.1) pero no es holomorfa.
4. Sea $f\in \mathrm{M}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$. Sean
$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi i}f'(\tau) - \frac{k}{12}E_2(\tau)f(\tau).$$
Probar que $g\in \mathrm{M}_{k+2}(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$.
5. Probar que $E_6 = E_4E_2 - \frac{3}{2\pi i}E_4'$ y $E_8 = E_6E_2 - \frac{1}{\pi i}E_6'$. Deducir las correspondientes relaciones de σ_5 en términos de σ_1 y σ_3, y σ_7 en términos de σ_1 y σ_5.
6. Probar que
$$E_2(\tau+1/2) - E_2(\tau) = 48\sum_{\substack{n>0\\ n\text{ impar}}}\sigma_1(n)q^n.$$
7. Sean $k\geq 2$ un entero y p un número primo. Probar que
$$E_k(\tau) - (1+p^{k-1})E_k(p\tau) + p^{k-1}E_k(p^2\tau) = -\frac{2k}{B_k}\sum_{p\nmid n}\sigma_{k-1}(n)q^n.$$
8. Probar que $E_2(\tau) - 3E_2(2\tau) + 2E_2(4\tau) = \frac{1}{2}\left(E_2(\tau) - E_2(\tau+1/2)\right)$.

1.3. Función eta de Dedekind. La ecuación funcional (1.14) sugiere la siguiente

Definición 1.6. Para $\tau \in \mathcal{H}$ el producto infinito

$$\eta(\tau) := e^{2\pi i\tau/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i n\tau}) \tag{1.18}$$

converge a una función holomorfa, llamada *función eta de Dedekind.*

Proposición 1.7. *La eta de Dedekind satisface*

$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau) \tag{1.19}$$

donde la raíz cuadrada corresponde a la rama que toma valores con parte real no negativa.

Demostración. Ambos miembros de (1.19) coinciden en $\tau = i$. Tomando derivada logarítmica el problema se reduce a probar

$$\frac{\eta'(-1/\tau)}{\eta(-1\tau)}\tau^{-2} = \frac{1}{2\tau} + \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)}.$$

La derivada logarítmica de (1.18) nos da

$$\begin{aligned}\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} &= \frac{2\pi i}{24}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}\right) = \frac{2\pi i}{24}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right)\\ &= \frac{2\pi i}{24}E_2(\tau).\end{aligned}$$

Por lo que el resultado se obtiene de (1.14). □

Observación 1.8. La función eta de Dedekind y (1.19) juegan un rol crucial en la demostración de la fórmula de Rademacher para el cálculo de la función $p(n)$ del ejercicio 2 de la Introducción. Para más detalles ver [1].

Ejercicios.

1. Probar que $\eta(\tau + 1/2) = e^{2\pi i/48}\eta^3(2\tau)/\eta(\tau)\eta(4\tau)$.

1.4. Formas cuspidales.

Definición 1.9. Sea $f \in \mathrm{M}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$ tal que se anula en ∞, es decir $a_0 = 0$ en la q-expansión $f(\tau) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$. Entonces f se dice *cuspidal,* y al espacio de formas cuspidales lo notamos $\mathrm{S}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$.

Ejemplo: (*Función discriminante*). Dado que $E_4(\tau) = 1 + 240q + O(q^2) \in \mathrm{M}_4(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$ y $E_6(\tau) = 1 - 504q + O(q^2) \in \mathrm{M}_6(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$, la función

$$\Delta(\tau) := \frac{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2}{1728} = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \dots \tag{1.20}$$

resulta ser una forma cuspidal de peso 12.

Ejemplo: La función

$$\eta^{24}(\tau) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = q - 24q^2 + \dots$$

también es una forma cuspidal de peso 12, gracias a (1.19). Por tratarse de un producto absolutamente convergente se tiene que η^{24} no se anula en $\mathcal{H}$.

Entonces el cociente Δ/η^{24} es una forma modular de peso 0 que en ∞ vale 1. Las formas modulares de peso 0 son funciones holomorfas de $X(1)$, o sea constantes. Concluimos pues que $\Delta = \eta^{24}$, es decir

$$\frac{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2}{1728} = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}.$$

Definición 1.10. Al cociente

$$j(\tau) := \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots \tag{1.21}$$

se lo conoce como *invariante modular* j.

Proposición 1.11. *El invariante modular j induce una biyección entre $X(1)$ y la esfera de Riemann.*

Demostración. Sea $c \in \mathbb{C}$ arbitrario. La función $j - c$ es función modular de peso 0, con un único polo simple en ∞. Por la proposición 1.2 se tiene que $\nu_P(j - c) > 0$ para un único P, es decir, j es biyectiva. □

Observación 1.12. Por propiedades de aplicaciones holomorfas se puede ver que j induce un isomorfismo entre ambas superficies de Riemann.

Proposición 1.13. *Sea f una forma cuspidal de peso k con expansión de Fourier $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$. Entonces existe $C > 0$ (dependiente de f) tal que $|a_n| \leq Cn^{k/2}$ para todo n.*

Demostración. La función $\tau \mapsto y^{k/2}|f(\tau)|$ es $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$-invariante y tiende rápidamente a 0 cuando $y \to \infty$, por lo que permanece acotada en el dominio fundamental D. Se tiene pues que

$$|f(\tau)| \leq cy^{-k/2}$$

para cierta $c > 0$. La representación integral

$$a_n = e^{2\pi ny} \int_0^1 f(x + iy) e^{-2\pi inx} \, \mathrm{d}\, x$$

váilda para $y > 0$, prueba que $|a_n| \leq cy^{-k/2} e^{2\pi ny}$. Tomando $y = 1/n$ se obtiene el resultado. □

Ejercicios.

1. Probar que $\mathrm{S}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})) = 0$ si $k < 12$ o $k = 14$.
2. Probar que $\mathrm{S}_{12}(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}\Delta$.
3. Probar que $\mathrm{S}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})) = \Delta \,\mathrm{M}_{k-12}(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$ para $k > 14$.
4. Probar que $\mathrm{M}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})) = \mathrm{S}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})) \oplus \mathbb{C}E_k$ para $k > 2$.
5. Sea $k > 0$ un entero par. Probar que
$$\dim(\mathrm{M}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))) = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & k \not\equiv 2 \bmod(12) \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & k \equiv 2 \bmod(12). \end{cases}$$
6. Sea $f \in \mathrm{M}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$ una forma modular. Probar que existen $\alpha_{a,b} \in \mathbb{C}$ tales que
$$f = \sum_{\substack{a,b \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ 4a+6b=k}} \alpha_{a,b} E_4^a E_6^b.$$
7. Probar que las funciones modulares de peso 0 para $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ son precisamente las funciones racionales en j.
8. Probar el enunciado de 1.12.
9. Probar que en el ejercicio 4 de sección 1.2, la g construida resulta cuspidal si y sólo si la f lo es.
10. Probar que los coeficientes de la q-expansión (1.21) de j son enteros.

1.5. Interpretación modular. Las formas modulares pueden pensarse como funciones en el espacio de reticulados de $\mathbb{C}$. Dado un reticulado $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$, se puede hallar una base $z_1, z_2 \in \Lambda$ tales que $z_1/z_2 = \tau \in \mathcal{H}$, por lo que Λ resulta homotético a otro reticulado $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$. De ahí que el cociente del espacio de reticulados por la relación de equivalencia

$$\Lambda_1 \sim \Lambda_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ \Lambda_1 = \lambda\Lambda_2$$

resulta ser $Y(1) = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}$.

Las funciones $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ que satisfacen (1.1) pueden pensarse como funciones *de peso* k en el espacio de reticulados, es decir, funciones F que verifican

$$F(\lambda\Lambda) = \lambda^{-k} F(\Lambda),$$

via $F(z_1\mathbb{Z} \oplus z_2\mathbb{Z}) = z_2^{-k} f(z_1/z_2)$.

Se definen los *operadores de Hecke* T_n como

$$T_n(F)(\Lambda) := \sum_{[\Lambda:\Lambda']=n} F(\Lambda')$$

donde la suma recorre los subreticulados de Λ de índice n.

Con esta interpretación, los T_n definen operadores en los $\mathrm{M}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$, preservan los $\mathrm{S}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$ (ver ejercicio 8 de la sección 2.4) y satisfacen

1. $T_n T_m = T_{mn}$ si m y n son coprimos,
2. $T_{p^{r+1}} = T_p T_{p^r} - p^{k-1} T_{p^{r-1}}$,
3. son autoadjuntos para un producto interno (ver sección 2.3 más adelante),
4. conmutan entre sí.

Resulta entonces que los T_n son simultáneamente diagonalizables. Llamamos *autoforma* a un autovector común a todos los operadores de Hecke. Si $f = \sum a_n q^n \in \mathrm{S}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$ es una autoforma, sus coeficientes verifican

$$a_n = \lambda_n a_1 \tag{1.22}$$

donde $T_n(f) = \lambda_n f$ (ver proposición 2.23 más adelante), de donde se deduce que $a_1 \neq 0$.

Decimos que tal f está *normalizada* si $a_1 = 1$.

Proposición 1.14. *Sea $f = \sum a_n q^n \in \mathrm{S}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$ una autoforma normalizada. Entonces, los coeficientes verifican*

1. $a_n a_m = a_{mn}$ *si m y n son coprimos,*
2. $a_{p^{r+1}} = a_p a_{p^r} - p^{k-1} a_{p^{r-1}}$,

y la función $L(f,s) := \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ admite un producto de Euler

$$L(f,s) = \prod_p \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s}} \tag{1.23}$$

donde p recorre los números primos positivos.

Demostración. Las identidades entre los coeficientes se deducen de las análogas para operadores de Hecke, observando que para una f normalizada los coeficientes coinciden con los autovalores. Para el producto de Euler, observemos primero que por la propiedad multiplicativa de los a_n se tiene que

$$L(f,s) = \prod_p \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_p p^{-ns} \right)$$

y distribuyendo

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_p p^{-ns} \right) \left(1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s} \right) = 1$$

se obtiene (1.23). $\square$

Observación 1.15. Hecke demostró que $L(f,s)$ se extiende de manera analítica a una función meromorfa de $\mathbb{C}$, y que

$$\Lambda_f(s) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s)$$

verifica una ecuación funcional

$$\Lambda_f(s) = (-1)^{k/2}\Lambda_f(k-s).$$

(aquí $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ es la función gamma de Euler).

Ejemplo 1.16. Como $\dim(\mathrm{S}_{12}(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))) = 1$, la función $\Delta = q\prod(1-q^n)^{24}$ resulta ser una autoforma normalizada. Luego sus coeficientes satisfacen las identidades de la proposición 1.14. Dicha propiedad fue observada originalmente por Ramanujan (ver [13]).

Observación 1.17. La conjetura de Ramanujan-Petersson, probada por Deligne como consecuencia de su demostración de las conjeturas de Weil, establece que si f es una autoforma cuspidal normalizada de peso k para $\Gamma_1(N)$ entonces $|a_n| \leq n^{(k-1)/2}\sigma_0(n)$, resultado mucho más fuerte que la proposición 1.13 (debida al mismo Hecke). De donde también se tiene que los coeficientes a_n de Δ satisfacen $|a_p| \leq 2p^{11/2}$ con p primo.

Ejercicios.

1. Probar que $\phi(s) = \sum a_n n^{-s}$ converge en algún semiplano si y sólo si $a_n = O(n^c)$, para alguna constante c.
2. Supongamos
$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$
es analítica en $\mathcal{H}$.
   a) Si $a_n = O(n^c)$, entonces $f(\tau) = O(y^{-c-1})$, uniformemente x, cuando $y \to 0^+$.
   b) Si $f(\tau) = O(y^{-c})$, uniformemente en x, entonces $a_n = O(n^c)$.
3. Sea $c > 0$. Probar que
$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)x^{-s}\,\mathrm{d}\,s$$
para $x > 0$.
4. (Transformada de Mellin) Sean $a_n = O(n^M)$ para algún M, números complejos. Sea $f(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-nx}$ y $\phi(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$. Probar que
$$\Gamma(s)\phi(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,\mathrm{d}\,x$$
para $\Re(s) > \text{máx}\{0, M+1\}$, y
$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \phi(s)\Gamma(s)x^{-s}\,\mathrm{d}\,s$$
para $c > \text{máx}\{0, M+1\}$ y $\Re(s) > 0$.

2. Formas modulares para subgrupos de congruencia.

Sea N un entero positivo. Se define el *grupo de congruencia principal de nivel* N como

$$\Gamma(N) := \left\{\gamma \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) :\ \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod(N)\right\}.$$

Un subgrupo de $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ se dice *de congruencia* si contiene a algún $\Gamma(N)$. Llamamos *cúspides* a las clases de equivalencia de $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

Definición 2.1. Sean $k \in \mathbb{Z}$ y $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Definimos $[\gamma]_k$, el *operador de peso* k, en el espacio de funciones meromorfas de $\mathcal{H}$ a $\mathbb{C}$ como

$$(f[\gamma]_k)(\tau) := (c\tau + d)^k f(\gamma\tau). \tag{2.1}$$

Observación 2.2. Notar que

$$f[\gamma_1\gamma_2]_k = (f[\gamma_1]_k)[\gamma_2]_k \tag{2.2}$$

para todo par de matrices $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Basta escribir $(c\tau+d)^{-k}$ como $(\mathrm{d}\,\gamma\tau/\,\mathrm{d}\,\tau)^{k/2}$ y usar regla de la cadena.

Definición 2.3. Sea Γ un subgrupo de congruencia conteniendo a $\Gamma(N)$ y $k \in \mathbb{Z}$. Decimos que una función $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ es una *función modular de peso k para* Γ si

1. f es meromorfa en $\mathcal{H}$,
2. $f[\gamma]_k = f$ para toda $\gamma \in \Gamma$,
3. $f[\gamma]_k$ es meromorfa en ∞ para toda $\gamma \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$.

Análogamente, diremos que una tal f es una *forma modular* para Γ si es holomorfa en $\mathcal{H}$, y $f[\gamma]_k$ es holomorfa en ∞ para toda $\gamma \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$, y que es *cuspidal* si además las $f[\gamma]_k$ se anulan en ∞. A los espacios de formas modulares y cuspidales de peso k para Γ, los notamos $\mathrm{M}_k(\Gamma)$ y $\mathrm{S}_k(\Gamma)$, respectivamente.

Aquí entendemos por *meromorfa en* ∞ que aparecen a lo sumo finitos términos negativos en el desarrollo en series de potencias de $q_N := \exp(2\pi i\tau/N)$, que es *holomorfa en* ∞ si no aparecen términos negativos, y que *se anula en* ∞ si sólo aparecen términos positivos.

Tal expansión existe dado que al tomar $\left(\begin{smallmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(N)$ en la condición 2 se tiene que

$$f(\tau + N) = f(\tau),$$

y por lo tanto f admite un desarrollo en serie de potencias de $q_N = \exp(2\pi i/N)$.

Observación 2.4. Como $\Gamma(N)$ es normal en $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$, $f[\gamma]_k$ es también N-periódica, para toda $\gamma \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$.

Observación 2.5. A diferencia de lo que sucede en el caso de nivel 1, para que una forma modular sea cuspidal no alcanza con chequear un sólo coeficiente. Existen formas no cuspidales f que se anulan en ∞ pero alguna $f[\gamma]_k$ no (ver ejercicio 17).

Observación 2.6. Como Γ tiene índice finito en $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$, sólo hace falta verificar la condición 3 para un conjunto finito de γ's, más precisamente, basta con un conjunto de representantes de las Γ-coclases.

Proposición 2.7. *La condición 3 y sus análogas para formas modulares y cuspidales sólo dependen de la Γ-clase de equivalencia de $\gamma\infty$. Más precisamente, si $\gamma_1\infty = \gamma'\gamma_2\infty$ para $\gamma' \in \Gamma$, entonces la menor potencia de q_N que aparece en la expansión de Fourier de $f[\gamma_1]_k$ coincide con la de $f[\gamma_2]_k$.*

Demostración. Como $\gamma_1^{-1}\gamma'\gamma_2$ pertenece al estabilizador de ∞, entonces es de la forma $\pm T^j$ (ver ejercicio 5 de la sección 0.3).

Entonces $\gamma_2 = \pm\gamma'^{-1}\gamma_1 T^j$ y

$$f[\gamma_2]_k = f[\pm\,\mathrm{Id}]_k[\gamma'^{-1}]_k[\gamma_1]_k[T^j]_k = (\pm 1)^k f[\gamma'^{-1}]_k[\gamma_1]_k[T^j]_k = (\pm 1)^k f[\gamma_1]_k[T^j]_k.$$

Escribiendo $g(\tau) = f[\gamma_1]_k = \sum_n a_n q_N^n$ tenemos que

$$f[\gamma_2]_k = (\pm 1)^k g(\tau + j) = (\pm)^k \sum_n a_n e^{2\pi i n j/N} q_N^n,$$

de donde se deducen las afirmaciones del enunciado. □

El siguiente lema suele ser de utilidad

Lema 2.8. *Sea f holomorfa en $\mathcal{H}$ que verifica la condición 2 de la definición 2.3 para Γ un subgrupo de congruencia denivel N. Supongamos que la expansión de Fourier $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_N^n$ satisface*

$$|a_n| \leq C n^r, \quad n > 0$$

para ciertas constantes positivas C y r. Entonces f satisface también la condición 3.

Demostración. La función $f[\gamma]_k$ es invariante por la acción de los operadores $[\gamma']_k$ con $\gamma' \in \gamma^{-1}\Gamma\gamma$ que también es un subgrupo de congruencia de nivel N. Para ver que la serie $f[\gamma]_k(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a'_n q_N^n$ no tiene términos negativos alcanza con probar que

$$\lim_{q_N\to 0} (f[\gamma]_k(\tau)q_N) = 0. \tag{2.3}$$

Si γ fija al ∞ esto es inmediato (ver proposición 2.7).

Supongamos que γ no fija al ∞.

Como $|a_n| \leq Cn^r$, escribiendo $\tau = x + iy$ se tiene que

$$|f(\tau)| \leq C_1 + \frac{C_2}{y^r} \tag{2.4}$$

cuando $y \to \infty$, para ciertas constantes $C_1, C_2 > 0$ (ver ejercicio 15).

De donde

$$\lim_{q_N\to 0} |f[\gamma]_k(\tau)q_N| \leq C_3 \lim_{q\to 0} y^{r-k}|q_N| = 0 \tag{2.5}$$

dado que $|q_N|$ es exponencial en y. $\square$

Afirmación 2.1. *Sea* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ *de índice finito* n, *y*

$$\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i\Gamma$$

una descomposición en coclases disjuntas. Si D *es un dominio fundamental para* $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}$, *entonces* $D' = \cup_{i=1}^{n}\alpha_i^{-1}D$ *es un dominio fundamental para* $\Gamma\backslash\mathcal{H}$.

Al igual que en el caso de nivel 1, *el espacio* $\Gamma\backslash\overline{\mathcal{H}}$ *tiene estructura de superficie de Riemann compacta, las únicas formas modulares de peso* 0 *son las constantes, y los espacios* $\mathrm{M}_k(\Gamma)$ *resultan de dimensión finita (ver ejercicio 5 de la sección 0.4).*

La siguiente *cota de Sturm* resulta muy útil para acotar dimensiones de espacios de formas modulares.

Proposición 2.9. *Sea* Γ *un subgrupo de congruencia de índice* M *y sea* $f \in \mathrm{M}_k(\Gamma)$ *una forma modular. Si*

$$\nu_\infty(f) > M.\frac{k}{12} \tag{2.6}$$

entonces $f = 0$.

Demostración. Para $\Gamma = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ alcanza con recordar que en (1.2) todos los términos son negativos para concluir que f es nula.

En el caso general escribimos

$$\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_{i=1}^{M} \Gamma\gamma_i$$

para γ_i apropiados, con $\gamma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. La función

$$F := f\prod_{i=2}^{M} f[\gamma_i]_k$$

resulta ser una forma modular de peso Mk para $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ que satisface el enunciado de la proposición y el resultado se deduce del caso ya probado. $\square$

Observación 2.10. El orden de anulación $\nu_\infty(f)$ de (2.6) puede no ser entero, f podría necesitar términos que sean potencias de q_N pero no de q.

Ejercicios.

1. Sea Γ un subgrupo de congruencia. Probar que $\mathrm{M}_0(\Gamma) = \mathbb{C}$.
2. Sea Γ un grupo de congruencia y $P = \left\{\pm T^k\right\}$ el estabilizador del ∞. Probar que la aplicación
$$\Gamma \backslash \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})/P \to \{ \text{ cúspides de } \Gamma\}$$
dada por
$$\Gamma\alpha P \mapsto \Gamma\alpha(\infty)$$
es una biyección.
3. Sea $\alpha \in \mathrm{Gl}_2^+(\mathbb{Q})$, y Γ un subgrupo de congruencia. Probar que $\Gamma_\alpha := \Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha$ también resulta de congruencia, no necesariamente del mismo nivel.
4. Deducir de la cota de Sturm que $\dim(\mathrm{M}_k(\Gamma)) < \infty$ para cualquier subgrupo de congruencia Γ.
5. Probar que $441E_4E_8 + 250E_6^2 = 691E_{12}$.
6. Sea Γ un subgrupo de congruencia.
   a) Probar que toda función modular para Γ satisface una ecuación polinomial de grado $[\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}(j)$ de funciones modulares de peso 0 para $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$.
   b) Probar que si Γ es normal y f es Γ-invariante, entonces lo es también $f[\alpha]_0$ para toda $\alpha \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$.
   c) Probar que el cuerpo de funciones modulares de peso 0 para Γ es una extensión de Galois de $\mathbb{C}(j)$ con grupo de Galois igual a $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})/\Gamma$.
7. Encontrar formas modulares de peso fijo con ν_∞ arbitrariamente grande.
8. Encontrar formas modulares para un subgrupo de congruencia fijo con ν_∞ arbitrariamente grande.
9. Sea $\mathrm{Gl}_2^+(\mathbb{Q})$ el subgrupo de matrices de determinante positivo de $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Q})$. Extendemos la definición 2.1 como $(f[\gamma]_k)(\tau) := (\det\gamma)^{k/2}(c\tau + d)^{-k} f(\tau)$. Probar que también vale (2.2) de la Observación 2.2.
10. Sea p un primo y $e \geq 1$
    a) Hallar el orden de $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ y $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
    b) Hallar el núcleo del homomorfismo $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}) \to \mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
    c) Hallar el orden de $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})$ y $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})$.
11. Sea $N = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ la factorización en primos de N. Usando el Teorema Chino del Resto hallar el orden de $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.
12. Probar que $[\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = N^3 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$.
13. Probar que (2.3) implica $f[\gamma]_k$ holomorfa en ∞.
14. Completar los detalles de (2.5).
15. El objetivo de este ejercicio es demostrar la cota (2.4) a partir de las hipótesis del lema 2.8.
    a) Probar que $g(t) = t^r e^{-2\pi t y/N}$ es creciente en $[0, \frac{rN}{2\pi y}]$ y decreciente en $[\frac{rN}{2\pi y}, \infty]$.
    b) Probar que
$$|f(\tau)| \leq |a_0| + C \sum_{n=1}^{\infty} n^r e^{-2\pi n y/N} \leq C_1 + C_0 \left(\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}\,t + \frac{1}{y^r} \right).$$
    c) Concluir.
16. Probar que la condición 2 equivale a pedir que la forma $f(\tau)(\mathrm{d}\,\tau)^k$ sea Γ-invariante.
17. Adaptar el argumento de la proposición 1.13 para probar que $\mathrm{S}_k(\Gamma)$ se puede definir como aquellas $f \in \mathrm{M}_k(\Gamma)$ tales que $y^{k/2} f(x + iy)$ permanece acotada.
18. Sea
$$\lambda(\tau) := \left(\frac{\eta(\tau/2)\eta^2(2\tau)}{\eta^3(\tau)} \right)^8.$$

a) Usando la cota de Sturm para $\Gamma(2)$, probar que
$$j(\tau) = 256\frac{(1-\lambda(\tau)+\lambda(\tau)^2)}{\lambda(\tau)^2(1-\lambda(\tau))^2}.$$
b) Probar que λ es inyectiva restringida al interior de un dominio fundamental para $\Gamma(2)$.
c) Probar que la imagen de λ es $\mathbb{C} - \{0,1\}$.
d) Construir un revestimiento $p : B(0,1) \to \mathbb{C} - \{0,1\}$.
e) (Pequeño Teorema de Picard) Sea f una función entera que omite dos valores. Probar que f es constante.

2.1. El subgrupo de congruencia $\Gamma_0(N)$. Como veremos más adelante, el siguiente subgrupo de congruencia es de particular interés
$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) : \; c \equiv 0 \mod(N) \right\}.$$
Al cociente $\Gamma_0(N)\backslash\overline{\mathcal{H}}$ se lo conoce como *curva modular clásica* y se la nota $X_0(N)$.

Ejemplo 2.11. Veamos que la función Θ^4 es una forma modular de peso 2 para $\Gamma_0(4)$.

La matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ que manda τ a $-1/(4\tau)$, no tiene determinante 1, pero sí lo tiene
$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$
que manda τ a $\tau/(4\tau+1)$.

De ahí se tiene que
$$\Theta\left(\frac{\tau}{4\tau+1}\right) = \sqrt{4\tau+1}\Theta(\tau),$$
por lo que $\Theta^4[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)]_2 = \Theta^4$. También se tiene que $\Theta^4[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]_2 = \Theta^4$. Como $\Gamma_0(4)$ está generado por $\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right), \pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, concluimos que Θ^4 es una función modular de peso 2 para $\Gamma_0(4)$.

Resta chequear que es holomorfa en las cúspides $\infty, 0$ y $-1/2$.

De la definición 0.5 de Θ se tiene que es holomorfa en ∞ y por lo tanto también lo es Θ^4.

Por el lema 2.8 se ve que también es holomorfa en 0 y $-1/2$.

Ejercicios.

1. Hallar $[\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]$.
2. Hallar $[\Gamma_0(N) : \Gamma(N)]$.
3. Encontrar un isomorfismo entre $\Gamma(N)$ y un subgrupo de $\Gamma_0(N^2)$ de índice $\varphi(N)$. Concluir que $\Gamma_0(4)$ es isomorfo a $\Gamma(2)$.
4. Probar que si $f \in \mathrm{M}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$ entonces $g(\tau) := f(N\tau) \in \mathrm{M}_k(\Gamma_0(N))$.
5. Sea k par y f una función que verifica $f(\tau) = f(\tau+1)$ y $f(-1/4\tau) = (-4t^2)^{k/2} f(\tau)$. Probar que $f[\gamma]_k = f$ para toda $\gamma \in \Gamma_0(4)$.
6. Probar que la siguiente es una lista completa de representantes para $\Gamma_0(p^e)$ con p primo
$$\mathrm{Id}; \quad T^{-k}S,\ k = 0,1,\ldots,p^e-1; \quad ST^{kp}S,\ k = 1,2,\ldots,p^{e-1}-1.$$
7. Probar que las cúspides para $\Gamma_0(p)$ son 0 e ∞, y que para $\Gamma_0(p^2)$ son $0, \infty$, y $-1/kp$ con $k = 1,\ldots,p-1$.
8. Probar que $\eta^8(4\tau)/\eta^4(2\tau) \in \mathrm{M}_2(\Gamma_0(4))$.
9. Probar que $E_2(\tau) - 3E_2(2\tau) + 2E_2(4\tau) \in \mathrm{M}_2(\Gamma_0(4))$.
10. Probar la identidad
$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})^4(1+q^{2n})^4 = \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ impar}}} \sigma_1(n)q^n.$$
11. Probar que $E_2(\tau) - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} E_2(\tau + j/N) \in \mathrm{M}_2(\Gamma_0(N^2))$.

12. Sea N un entero positivo. Probar que $G_{2,N}(\tau) := G_2(\tau) - NG_2(N\tau) \in \mathrm{M}_2(\Gamma_0(N))$.
13. Probar que
$$G_{2,2} = -\frac{\pi^2}{3}\left(1 + 24\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n\ ,\ 2\nmid d} d\right)q^n\right).$$
14. Probar que
$$G_{2,4} = -\pi^2\left(1 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n\ ,\ 4\nmid d} d\right)q^n\right).$$
15. Sabiendo que $\dim(\mathrm{M}_2(\Gamma_0(4))) = 2$, probar que $G_{2,2}(\tau)$ y $G_{2,4}(\tau)$ son una base de $\mathrm{M}_2(\Gamma_0(4))$.
16. Probar (0.2) y (0.4).
17. Sea $k \geq 4$ y p un primo. Probar que $E_k(\tau) - E_k(p\tau) \in \mathrm{M}_k(\Gamma_0(p))$ pero no es una forma cuspidal, a pesar de no tener término constante en su q-expansión.
18. Probar que la única forma cuspidal normalizada de $\mathrm{S}_2(\Gamma_0(32))$ es $\eta^2(4\tau)\eta^2(8\tau)$.

2.2. El subgrupo de congruencia $\Gamma_1(N)$. Otro subgrupo de congruencia de interés es
$$\Gamma_1(N) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) :\ a \equiv d \equiv 1,\ c \equiv 0 \mod(N)\right\}.$$
Al cociente $\Gamma_1(N)\backslash\overline{\mathcal{H}}$ se lo nota $X_1(N)$.

Observación 2.12. Sea $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} N & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Si $f \in \mathrm{M}_k(\Gamma(N))$, entonces
$$f[\alpha]_k \in \mathrm{M}_k(\alpha\Gamma(N)\alpha^{-1}) \subseteq \mathrm{M}_k(\Gamma_1(N^2)).$$
Es decir, a las formas modulares de peso k para $\Gamma(N)$ las podemos pensar dentro de $\mathrm{M}_k(\Gamma_1(N^2))$. Esto suele resultar cómodo dado que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ pertenece a $\Gamma_1(N^2)$ pero no a $\Gamma(N)$ cuando $N > 1$, permitiendo desarrollar en series de q, en lugar de recurrir a q_N.

Definición 2.13. Se tiene que $\Gamma_1(N)$ es normal en $\Gamma_0(N)$ y su cociente es $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Llamamos *carácter de Dirichlet* a un homomorfismo de grupos $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ extendido a $\mathbb{Z}$ de manera natural como $\chi(n) = 0$ para $\gcd(n, N) > 1$. Decimos que $f \in \mathrm{M}_k(\Gamma_1(N))$ es una *forma modular de peso k para $\Gamma_0(N)$ con carácter χ* si satisface
$$f[\gamma]_k = \chi(d)f \quad \text{para toda } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma_0(N).$$
Notamos $\mathrm{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ al espacio de tales funciones y $\mathrm{S}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ al subespacio de formas cuspidales.

Descomponiendo en autoespacios la acción natural de
$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* = \Gamma_0(N)/\Gamma_1(N)$$
en $\mathrm{M}_k(\Gamma_1(N))$ se obtiene
$$\mathrm{M}_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi} \mathrm{M}_k(\Gamma_0(N), \chi). \tag{2.7}$$

Ejercicios.

1. Probar que $[\Gamma_1(N) : \Gamma(N)] = N$
2. Probar que $[\Gamma_0(N) : \Gamma_1(N)] = \varphi(N)$.
3. Completar los detalles de la Observación 2.12.
4. Probar que si $\chi(-1) \neq (-1)^k$ entonces $\mathrm{M}_k(\Gamma_0(N), \chi) = 0$.
5. Sea χ_4 el carácter no trivial de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$. Probar que
$$\mathrm{M}_k(\Gamma_1(4)) = \begin{cases} \mathrm{M}_k(\Gamma_0(4)) & \text{si } k \text{ es par} \\ \mathrm{M}_k(\Gamma_0(4), \chi_4) & \text{si } k \text{ es impar.}\end{cases}$$

6. Probar que $S_5(\Gamma_1(4))$ está generado por $\eta^4(\tau)\eta^2(2\tau)\eta^4(4\tau)$.
7. Probar que $S_8(\Gamma_1(4))$ está generado por $f(\tau) := (\eta(\tau)\eta(2\tau))^8$ y $g(\tau) = f(2\tau)$.
8. Sean N y k enteros positivos tales que $k(N+1) = 24$. Probar que $(\eta(\tau)\eta(N\tau))^k \in S_k(\Gamma_0(N))$, salvo para $k = 1$ o $k = 3$ en cuyo caso $(\eta(\tau)\eta(N\tau))^k \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$, con χ de orden 2.

2.3. Producto escalar de Petersson. Si $f, g \in M_k(\Gamma)$, la función $f(\tau)\overline{g(\tau)}y^k$ resulta invariante por $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}.)$ Cuando al menos una de ambas es cuspidal, definimos el *producto escalar de Petersson* como

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{[\mathrm{PSl}_2(\mathbb{Z}) : \mathrm{PSl}_2(\mathbb{Z}) \cap \Gamma]} \iint_{D'} f(\tau)\overline{g(\tau)}y^k \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{y^2} \tag{2.8}$$

donde D' es un dominio fundamental para la acción de Γ en $\mathcal{H}$. Dicho producto interno está bien definido, la integral converge y no depende del dominio fundamental elegido. Si f y g también pertenecen a $M_k(\Gamma')$ para otro subgrupo de congruencia Γ', el producto así definido no depende del espacio en el que se las considere.

Para $\alpha \in \mathrm{Gl}_2^+(\mathbb{Q})$, el subgrupo $\Gamma_\alpha := \Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha$ también resulta de congruencia (cf. ejercicio 3 de la sección 2) y, pensando a $f[\alpha]_k$ y $g[\alpha]_k$ en $M_k(\Gamma_\alpha)$, se tiene que

$$\langle f[\alpha]_k, g[\alpha]_k\rangle = \langle f, g\rangle$$

y que $\langle f[\alpha]_k, g\rangle$ sólo depende de la coclase doble de α módulo Γ.

Ejercicios.

1. Sean $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ y $g \in M_k(\Gamma_0(N), \mu)$ formas modulares para distintos caracteres χ, μ con al menos una de ellas cuspidal. Probar que $\langle f, g\rangle = 0$.

2.4. Operadores de Hecke. A continuación estudiaremos operadores análogos a los T_n de la sección 1.5, dando fórmulas que permitan calcularlos en q-expansiones.

Definición 2.14. Para $\alpha \in \mathrm{Gl}_2^+(\mathbb{Q})$, Γ_1 y Γ_2 dos subgrupos de congruencia, y $f \in M_k(\Gamma_1)$, definimos el *operador de coclase doble* como

$$f[\Gamma_1\alpha\Gamma_2]_k := \sum_j f[\beta_j]_k,$$

donde los β_j son un conjunto de representantes de las órbitas de $\Gamma_1\backslash\Gamma_1\alpha\Gamma_2$, es decir

$$\Gamma_1\alpha\Gamma_2 = \cup_j \Gamma_1\beta_j.$$

El operador está bien definido, no depende de la elección de los representantes β_j, su imagen está contenida en $M_k(\Gamma_2)$, manda formas cuspidales en formas cuspidales y además

1. si $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$ y $\alpha = \mathrm{Id}$ se tiene la inclusión natural de $M_k(\Gamma_1)$ en $M_k(\Gamma_2)$,
2. si $\alpha^{-1}\Gamma_1\alpha = \Gamma_2$ se tiene $f[\Gamma_1\alpha\Gamma_2]_k = f[\alpha]_k$, el isomorfismo natural entre $M_k(\Gamma_1)$ y $M_k(\Gamma_2)$,
3. si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ y $\alpha = \mathrm{Id}$ se tiene el *operador traza* que proyecta $M_k(\Gamma_1)$ sobre $M_k(\Gamma_2)$.

Observación 2.15. Todos los operadores de coclases dobles son una composición de operadores de estas formas. Dados Γ_1, Γ_2 y α, basta con tomar $\Gamma_3 = \alpha^{-1}\Gamma_1\alpha \cap \Gamma_2$, $\Gamma_3' = \alpha\Gamma_3\alpha^{-1}$ y los operadores correspondientes a $\Gamma_3' \subseteq \Gamma_1$, $\Gamma_3 = \alpha^{-1}\Gamma_3'\alpha$ y $\Gamma_3 \subseteq \Gamma_2$.

Como casos particulares tenemos los siguientes operadores

Definición 2.16. Sean $f \in M_k(\Gamma_1(N))$ y $d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. El *operador diamante* $\langle d\rangle$ se define como

$$\langle d\rangle : f \mapsto f[\Gamma_1(N)\alpha\Gamma_1(N)]_k$$

para cualquier $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$.

Observación 2.17. Si $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$, entonces $\langle d\rangle$ actúa como multiplicación por $\chi(d)$.

Definición 2.18. Sea N un entero positivo y p un número primo. El *operador de Hecke* T_p se define por la acción de $[\Gamma_1(N)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\Gamma_1(N)]_k$ en $\mathrm{M}_k(\Gamma_1(N))$.

Observación 2.19. Se tiene que

$$T_p(f) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{p-1} f[\begin{pmatrix}1&j\\0&p\end{pmatrix}]_k & \text{si } p \mid N \\ \sum_{j=0}^{p-1} f[\begin{pmatrix}1&j\\0&p\end{pmatrix}]_k + f[\left(\begin{smallmatrix}m&n\\N&p\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)]_k & \text{si } p \nmid N \end{cases} \tag{2.9}$$

donde m, n son enteros tales que $mp - Nn = 1$.

Observación 2.20. Cambiando $\Gamma_1(N)$ por $\Gamma_0(N)$ se definen los T_p de manera análoga y en la fórmula (2.9) se puede omitir $\left(\begin{smallmatrix}m&n\\N&p\end{smallmatrix}\right)$ por estar en $\Gamma_0(N)$.

Definición 2.21. Los operadores de Hecke con índices compuestos se definen de manera inductiva por

$$T_{p^{r+1}} := T_p T_{p^r} - p^{k-1}\langle p\rangle T_{p^{r-1}} \tag{2.10}$$

para $r \geq 1$ y para m, n coprimos

$$T_{mn} := T_m T_n.$$

Observación 2.22. Sean n coprimo con N. La acción de T_n en una forma modular $f \in \mathrm{M}_k(\Gamma_0(N))$ no coincide con la acción de T_n en f considerada en $\mathrm{M}_k(\Gamma_0(nN))$.

Proposición 2.23. *Sea $f \in \mathrm{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ una forma modular con expansión de Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ y m un entero positivo. La acción del operador de Hecke T_m en los coeficientes de Fourier de f está dada por*

$$(T_m f)(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n,$$

donde

$$b_n = \sum_{1\leq d \mid \gcd(m,n)} \chi(d) d^{k-1} a_{mn/d^2}. \tag{2.11}$$

Demostración. Supongamos $m = p$ un número primo. Para $0 \leq j < p$ tenemos

$$f[\begin{pmatrix}1&j\\0&p\end{pmatrix}]_k(\tau) = p^{k-1}(0\tau + p)^{-k} f\left(\frac{\tau + j}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty} a_n q_p^n \zeta_p^{nj}$$

con $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$ una raíz de la unidad de orden p. De donde

$$\sum_{j=0}^{p-1} f[\begin{pmatrix}1&j\\0&p\end{pmatrix}]_k(\tau) = \sum_{n=0} a_{np} q^n.$$

Si $p \nmid N$ se tiene el término extra

$$f[\left(\begin{smallmatrix}m&n\\N&p\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)]_k(\tau) = (\langle p\rangle f)[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)]_k(\tau) = p^{k-1}\chi(p)\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{np},$$

de donde se prueba (2.11). El caso m compuesto se demuestra por inducción a partir de la definición 2.21. □

Observación 2.24. Sea N un entero positivo y $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ un carácter de Dirichlet. Sea n un entero positivo coprimo con N. Si $f, g \in \mathrm{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ (con al menos una cuspidal) entonces

$$\langle T_n f, g\rangle = \chi(n)\langle f, T_n g\rangle. \tag{2.12}$$

Tomando c_n cualquier raíz cuadrada de $\chi(n)$ se tiene

$$\langle c_n T_n f, g\rangle = \langle f, c_n T_n g\rangle. \tag{2.13}$$

Es decir, los operadores $c_n T_n$ de $\mathrm{S}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ son hermitianos.

Proposición 2.25. *Sea N un entero positivo y $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ un carácter de Dirichlet. El espacio $\mathrm{S}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ admite una base de autovectores para todos los operadores de Hecke T_n con N y n coprimos.*

Demostración. Tales T_n resultan diagonalizables por la observación 2.24, y conmutan entre sí, de donde existe una base de autovectores comunes. □

Observación 2.26. Al ser $\mathrm{S}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ de dimensión finita, sólo hace falta diagonalizar un número finito de operadores de Hecke.

Ejemplo 2.27. El espacio $\mathrm{S}_{28}(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$ tiene dimensión 2 y está generado por $f_1 = \Delta E_4^4$ y $f_2 = \Delta^2 E_4$.

Sus q-expansiones son

$$f_1 = q + 936q^2 + 331452q^3 + 53282368q^4 + O(q^5)$$

y

$$f_2 = q^2 + 192q^3 - 8280q^4 + O(q^5).$$

Se tiene que

$$T_2(f_1) = 936q + 187500096q^2 + O(q^3) = 936f_1 + 18662400f_2$$

y

$$T_2(f_1) = q + 8280q^2 + O(q^3) = f_1 - 9216f_2.$$

Diagonalizando

$$\begin{pmatrix} 936 & 18662400 \\ 1 & -9216 \end{pmatrix}$$

obtenemos la siguiente base de autoformas

$$f_1 + (-5076 \pm 108\sqrt{18209})f_2.$$

Ejercicios.

1. Probar que el cociente $Y_0(N) := \Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}$ clasifica clases de equivalencia de pares (Λ, S) con $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ un reticulado y $S \subseteq \mathbb{C}/L$ de orden N.
2. Probar que el cociente $Y_1(N) := \Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}$ clasifica clases de equivalencia de pares (Λ, P) con $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ un reticulado y $P \in \mathbb{C}/L$ de orden N.
3. Probar que los operadores T_{p^r} son polinomios en T_p y $\langle p \rangle$.
4. Sean $p \nmid N$ y m, n tales que $mp - nN = 1$. Probar que
$$\Gamma_1(N) \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \Gamma_1(N) = \Gamma_1(N) \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \Gamma_1(N) \left(\begin{smallmatrix} p & n \\ N & m \end{smallmatrix}\right).$$
5. Probar (2.12).
6. Sea ζ_n una raíz primitiva de la unidad de orden n. Probar que
$$\sum_{i=1}^{n} \zeta_n^k = \begin{cases} n & \text{si } n|k \\ 0 & \text{si } n \nmid k. \end{cases}$$
7. Sea $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ una función holomorfa en un entorno del cero y ζ_n como en el ejercicio anterior. Probar que
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_n^k z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z^{nk}.$$
8. Probar que los operadores de Hecke preservan al espacio de formas cuspidales (comparar con ejercicio 17 de la sección 2).
9. Probar las afirmaciones de la primera oración del Ejemplo 2.27.
10. Probar que $\mathrm{S}_k(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$ tiene una base de autoformas cuyos coeficientes de Fourier son enteros algebraicos reales pertenecientes a una extensión finita de $\mathbb{Q}$.
11. Sea $f = \Delta E_4 \in S_{16}(\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}))$. Probar que es un autovector para todos los T_n. Probar que no es autovector de T_2 en $M_k(\Gamma_0(2))$.

12. Sea $n \geq 1$ un entero y sea $f \in \mathrm{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ un autovector para T_n. Supongamos que el término constante de la q-expansión de f es no nulo. Probar que el correspondiente autovalor de T_n es
$$\lambda_n = \sum_{1 \leq d | n} \chi(d) d^{k-1}.$$
13. Probar que existe una forma modular de peso 1 para $\Gamma_0(4)$ con carácter χ_4 cuya q-expansión comienza de la siguiente manera
$$\frac{1}{4} + q + q^2 + q^4 + 2q^5 + q^8 + \dots .$$
14. Probar que $\Theta^2 \in \mathrm{M}_1(\Gamma_0(4), \chi_4)$.
15. Probar (0.1) y (0.3).

3. Por último.

Mencionamos brevemente algunos temas relacionados a los vistos anteriormente, en los que no hemos tenido tiempo de profundizar. Mucho hay hecho sobre el problema de expresar un número como suma de cuadrados. Con técnicas similares se puede encarar el caso de una cantidad impar de cuadrados, considerando las llamadas *formas modulares de peso medio entero.* La definición es un poco más técnica, pero los resultados son similares. Un ejemplo de forma modular de peso medio entero es casualmente Θ y sus potencias impares. Para ver más sobre dicho problema recomendamos [5]. Un lindo texto introductorio sobre formas modulares de peso medio entero y curvas elípticas con multiplicación compleja es el [7], donde dichos temas son estudiados para encarar el problema de los *números congruentes* (i.e.: decidir si un número dado es o no el área de un triángulo rectángulo de lados racionales). Para una exposición accesible de la relación entre formas modulares, curvas elípticas y funciones L se puede consultar [8]. Un clásico bastante completo para estudiar formas modulares es [14], y uno más moderno es [4] donde, entre otras cosas, se abordan los teoremas de modularidad. Para saber más sobre los aspectos computacionales se puede consultar [15]. Recomendamos SAGE (`http://www.sagemath.org/`) como herramienta esencial. Puede usarse online aunque a la larga conviene instalarlo. En [2] hay muchísimos ejemplos de aplicaciones de formas modulares clásicas, formas de Siegel y de Hilbert. Para un recorrido interesante dentro de la Teoría de Números, pasando por la teoría de cuerpos de clases, funciones elípticas y formas modulares, el [3] no puede faltar. En [12] se construyen familias de grafos de Ramanujan, se estudia el problema de Rusiewisz sobre medidas invariantes de la esfera y el problema de Linnik sobre la distribución de representaciones de enteros como suma de tres cuadrados. Esperamos haber generado en el lector dudas suficientes como para seguir estudiando el tema.

Cerramos con algunos ejercicios surtidos para pensar en casa.

Ejercicios.

1. Probar que
$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + q^k t) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k$$
donde $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ es el coeficiente q-binomial dado por la fórmula
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1}) \cdots (1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^k)}.$$
2. Usando el ejercicio anterior, probar la siguiente identidad (*producto triple de Jacobi*)
$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - x^{2m}\right) \left(1 + x^{2m-1} y^2\right) \left(1 + x^{2m-1} y^{-2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2} y^{2n}.$$

3. Probar que
$$\Theta(\tau) = \frac{\eta^5(2\tau)}{\eta^2(\tau)\eta^2(4\tau)}.$$
4. Sean $\Theta_M(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}$ y $\Theta_F(\tau) := \sum_{m\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} q^{m^2}$. Probar que
$$\Theta_M(\tau) = \frac{\eta^2(\tau)}{\eta(2\tau)}$$
y que
$$\Theta_F(\tau) = 2\frac{\eta^2(4\tau)}{\eta(2\tau)}.$$
5. Probar que $\Theta^4 = \Theta_M^4 + \Theta_F^4$.
6. Sea $\Theta_Q(\tau) := \sum_{x,y\in\mathbb{Z}} q^{Q(x,y)}$ para $Q(x,y) = ax^2+bxy+cy^2$. Consideramos $Q_0(x,y) = x^2+xy+6y^2$, $Q_1(x,y) = 2x^2+xy+3y^2$ y $Q_2(x,y) = 2x^2-xy+3y^2$.
   a) Probar que cualquier forma $ax^2+bxy+cy^2$ con discriminante $D := b^2-4ac$ igual a -23 es de la forma $Q_i \circ \gamma$ con $\gamma \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ e $i = 0, 1$ o 2.
   b) Probar que $\Theta_{Q_1} = \Theta_{Q_2}$.
   c) Probar que
$$\frac{1}{2}\left(\Theta_{Q_0} + 2\Theta_{Q_1}\right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}\left(\frac{-23}{d}\right)\right)q^n$$
   donde $\left(\frac{-23}{d}\right)$ es el símbolo de Jacobi.
   d) Probar que
$$f := \frac{1}{2}\left(\Theta_{Q_0} - \Theta_{Q_1}\right)$$
   es una autoforma normalizada de $\mathrm{S}_1(\Gamma_0(23), \left(\frac{-23}{\cdot}\right))$, por lo tanto coincide con $\eta(\tau)\eta(23\tau)$ (ver ejercicio 8 de la sección 2.2).
   e) Probar que la L-serie de la f anterior se factoriza como
$$L(f,s) = \prod_p \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + \left(\frac{-23}{p}\right)p^{-2s}}$$
   donde
$$a_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 23, \\ 0 & \text{si } \left(\frac{p}{23}\right) = -1, \\ 2 & \text{si } \left(\frac{p}{23}\right) = 1 \text{ y } p \text{ es de la forma } x^2+xy+6y^2, \\ -1 & \text{si } \left(\frac{p}{23}\right) = 1 \text{ y } p \text{ es de la forma } 2x^2+xy+3y^2. \end{cases}$$

Referencias

[1] Tom M. Apostol. *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, volume 41 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.
[2] Jan Hendrik Bruinier, Gerard van der Geer, Günter Harder, and Don Zagier. *The 1-2-3 of modular forms*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Lectures from the Summer School on Modular Forms and their Applications held in Nordfjordeid, June 2004, Edited by Kristian Ranestad.
[3] David A. Cox. *Primes of the form x^2+ny^2*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989. Fermat, class field theory and complex multiplication.
[4] Fred Diamond and Jerry Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005.
[5] Emil Grosswald. *Representations of integers as sums of squares*. Springer-Verlag, New York, 1985.
[6] Frances Kirwan. *Complex algebraic curves*, volume 23 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
[7] Neal Koblitz. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, volume 97 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1984.

[8] Álvaro Lozano-Robledo. *Elliptic curves, modular forms, and their L-functions*, volume 58 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 2011. IAS/Park City Mathematical Subseries.

[9] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[10] David Mumford. *Algebraic geometry. I*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. Complex projective varieties, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 221.

[11] Allan Pinkus and Samy Zafrany. *Fourier series and integral transforms*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[12] Peter Sarnak. *Some applications of modular forms*, volume 99 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[13] J.-P. Serre. *A course in arithmetic*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Translated from the French, Graduate Texts in Mathematics, No. 7.

[14] Goro Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*. Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Kanô Memorial Lectures, No. 1.

[15] William Stein. *Modular forms, a computational approach*, volume 79 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. With an appendix by Paul E. Gunnells.

Universidad de Buenos Aires, FCEyN, Departamento de Matemáticas.
E-mail address: mmereb@gmail.com