Representación de Productos Tensoriales Torcidos

Jack Arce Flores[1]

[1] PUCP

VII eIENA
La Falda, Cordoba / 7 de Agosto de 2014

Contenido

1. Definición
2. Ejemplos
3. Representación

Observación

Sean A y B dos K-álgebras.
El producto tensorial $A \otimes B$ es una K-álgebra

1. El producto es la aplicación:

$$\mu_{A \otimes B} := (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (id_A \otimes \sigma \otimes id_B)$$

   donde $\sigma : B \otimes A \to A \otimes B \quad : \quad \sigma(b \otimes a) = a \otimes b.$

2. La unidad es $1_{A \otimes B} = 1_A \otimes 1_B$

Definición

Diremos que una aplicación K-lineal

$$\chi : B \otimes A \to A \otimes B$$

es una aplicación de torcimiento si satisface:

1. $\chi(1 \otimes a) = a \otimes 1$.
2. $\chi \circ (id_B \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes id_B) \circ (id_A \otimes \chi) \circ (\chi \otimes id_A)$.
3. $\chi(b \otimes 1) = 1 \otimes b$.
4. $\chi \circ (\mu_B \otimes id_A) = (id_A \otimes \mu_B) \circ (\chi \otimes id_B) \circ (id_B \otimes \chi)$

Theorem

La aplicación

$$\mu_\chi = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (id_A \otimes \chi \otimes id_B)$$

define un producto asociativo con unidad para $A \otimes B$ *si y solo si* χ *es una aplicación de torcimiento.*

Skew group algebra

Si G es un grupo discreto actuando a izquierda por automorfismo sobre el álgebra A. Se tiene el torcimiento natural

$$\begin{array}{rcl} \chi\colon kG \otimes A & \to & A \otimes kG \\ g \otimes a & \mapsto & g \cdot a \otimes g \end{array}$$

Se tiene $A \otimes_\chi kG = A * G$

Producto Bicruzado de Grupos [Takeuchi]

Si $H \bowtie G$ es el producto bicruzado de H y G, se tiene la aplicación de torcimiento natural

$$\begin{aligned} \chi : kG \otimes kH &\to kH \otimes kG \\ g \otimes h &\mapsto g \triangleright h \otimes g \triangleleft h \end{aligned}$$

Se tiene $kH \otimes_\chi kG = k[H \bowtie G]$

Ejemplos en álgebras de Hopf

1. Smash Product.
2. Crossed product.
3. Bialgebras (Hopf algebras) quasitriangulares.
4. Drinfled double.

Representación

Si A es una K-álgebra con $\dim_K A = n$ y fijemos la base $\mathcal{B} = \{a_1, \ldots, a_n\}$.
Las constantes de estructura λ_{ij}^k de A ($1 \leq i, j, k \leq n$) son los escalares determinados por las igualdades

$$a_i a_j = \sum_k \lambda_{ij}^k a_k.$$

Como la multiplicación de A es asociativa, los λ_{ij}^k's satisfacen

$$\sum_l \lambda_{ij}^l \lambda_{lk}^m = \sum_l \lambda_{jk}^l \lambda_{il}^m.$$

Además, como A es unitaria, si $1 = \sum_j \alpha_j a_j$, entonces

$$\sum_j \alpha_j \lambda_{ji}^k = \sum_j \alpha_j \lambda_{ij}^k = \delta_{ki}.$$

Una aplicación de torcimiento

$$\chi\colon B \otimes A \to A \otimes B$$

define aplicaciones lineales $\gamma_j^i : B \to B$ tales que

$$\chi(b \otimes a_i) = \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes \gamma_i^j(b)$$

Theorem

χ es una aplicación de torcimiento si y solo si las funciones γ_j^i tienen las siguientes propiedades:

1. $\gamma_i^j(1) = \delta_{ij} 1$,
2. $\gamma_i^k(bb') = \sum_j \gamma_j^k(b)\gamma_i^j(b')$,
3. $\alpha_k = \sum_i \alpha_i \gamma_i^k$,
4. $\sum_k \lambda_{ij}^k \gamma_k^m = \sum_k \sum_l \lambda_{kl}^m \gamma_j^l \circ \gamma_i^k$.

Las condiciones 1 y 2 se satisfacen si y solo si la aplicación

$$\varphi_\chi \colon B \to M_n(B)$$

definida por

$$\varphi_\chi(b) := \begin{pmatrix} \gamma_1^1(b) & \dots & \gamma_n^1(b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1^n(b) & \dots & \gamma_n^n(b) \end{pmatrix}$$

es un morfismo de álgebras.

Las condiciones 3 y 4 se satisfacen si y solo si la aplicación

$$\hat{\rho}_A \colon A^{\mathrm{op}} \to M_n(\mathrm{End}_K B)$$

definida por

$$\hat{\rho}_A(a_k^{\mathrm{op}}) = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{n} \lambda_{1l}^{1} \gamma_k^l & \cdots & \sum_{l=1}^{n} \lambda_{nl}^{1} \gamma_k^l \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^{n} \lambda_{1l}^{n} \gamma_k^l & \cdots & \sum_{l=1}^{n} \lambda_{nl}^{n} \gamma_k^l \end{pmatrix}$$

es un morfismo de álgebras

Theorem

Si χ es una aplicación de torcimiento, entonces las fórmulas

$$\varphi_\chi(b) := \begin{pmatrix} \gamma_1^1(b) & \dots & \gamma_n^1(b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1^n(b) & \dots & \gamma_n^n(b) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_\chi(a_k) := \begin{pmatrix} \lambda_{k1}^1 \cdot 1_B & \dots & \lambda_{kn}^1 \cdot 1_B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{k1}^n \cdot 1_B & \dots & \lambda_{kn}^n \cdot 1_B \end{pmatrix},$$

para todo $b \in B$ y $1 \leq k \leq n$, definen una representación fiel $\varphi_\chi \colon A \otimes_\chi B \to M_n(B)$.