Sobre los ceros de un E-polinomio

Laura Barbagallo

Trabajo en colaboración con
Gabriela Jeronimo y Juan Sabia

IMAS-CONICET
Universidad de Buenos Aires

5 de Agosto de 2014

Contexto

Las funciones Pfaffianas.

- Son funciones analíticas.
- Satisfacen sistemas triangulares de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes polinomiales.
- A partir de ellas se definen los conjuntos Pfaffianos, semi-Pfaffianos, sub-Pfaffianos...

Interesa decidir sobre la consistencia y finitud de estos conjuntos.

Contexto

Las funciones Pfaffianas.

- Son funciones analíticas.
- Satisfacen sistemas triangulares de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes polinomiales.
- A partir de ellas se definen los conjuntos Pfaffianos, semi-Pfaffianos, sub-Pfaffianos...

Interesa decidir sobre la consistencia y finitud de estos conjuntos.

Contexto

Las funciones Pfaffianas.

- Son funciones analíticas.
- Satisfacen sistemas triangulares de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes polinomiales.
- A partir de ellas se definen los conjuntos Pfaffianos, semi-Pfaffianos, sub-Pfaffianos...

Interesa decidir sobre la consistencia y finitud de estos conjuntos.

Contexto

Las funciones Pfaffianas.

- Son funciones analíticas.
- Satisfacen sistemas triangulares de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes polinomiales.
- A partir de ellas se definen los conjuntos Pfaffianos, semi-Pfaffianos, sub-Pfaffianos...

Interesa decidir sobre la consistencia y finitud de estos conjuntos.

Contexto

Las funciones Pfaffianas.

- Son funciones analíticas.
- Satisfacen sistemas triangulares de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes polinomiales.
- A partir de ellas se definen los conjuntos Pfaffianos, semi-Pfaffianos, sub-Pfaffianos...

Interesa decidir sobre la consistencia y finitud de estos conjuntos.

Problema

Hallar, algorítmicamente, la cantidad de soluciones en $\mathbb{R}$ de:

$$P\left(X, e^{h(X)}\right) = 0,$$

donde:

- con $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$, $gr_Y(P) > 0$ y
- $h \in \mathbb{Z}[X]$ no constante.

Las expresiones de esta forma se llaman E-polinomios.

Problema

Hallar, algorítmicamente, la cantidad de soluciones en $\mathbb{R}$ de:

$$P\left(X, e^{h(X)}\right) = 0,$$

donde:

- con $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$, $gr_Y(P) > 0$ y
- $h \in \mathbb{Z}[X]$ no constante.

Las expresiones de esta forma se llaman E-polinomios.

Problema

Hallar, algorítmicamente, la cantidad de soluciones en $\mathbb{R}$ de:

$$P\left(X, e^{h(X)}\right) = 0,$$

donde:

- con $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$, $gr_Y(P) > 0$ y
- $h \in \mathbb{Z}[X]$ no constante.

Las expresiones de esta forma se llaman E-polinomios.

Definición. (Heindel, 71)

Sea $f_0 : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua.

Una *Secuencia de Sturm para f_0 en el intervalo (a, b)* es una secuencia de funciones continuas $f_0, \dots, f_N$ que verifica que:

1. Si $f_0(y) = 0$, $y \in (a, b)$, existe $\epsilon > 0$ tal que:
   - $f_1(x) \neq 0$ para todo $x \in (y - \epsilon, y + \epsilon) \subseteq (a, b)$, $x \neq y$,
   - $f_0(x)f_1(x) < 0$ para $y - \epsilon < x < y$ y $f_0(x)f_1(x) > 0$ si $y < x < y + \epsilon$.
2. $\forall\ 0 < i \leq N - 1$: Si existe $x \in (a, b)$ $f_i(x) = 0$, entonces $f_{i-1}(x)f_{i+1}(x) < 0$.
3. $f_N(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Definición. (Heindel, 71)

Sea $f_0 : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua.

Una *Secuencia de Sturm para f_0 en el intervalo (a, b)* es una secuencia de funciones continuas $f_0, \ldots, f_N$ que verifica que:

1. Si $f_0(y) = 0$, $y \in (a, b)$, existe $\epsilon > 0$ tal que:
   - $f_1(x) \neq 0$ para todo $x \in (y - \epsilon, y + \epsilon) \subseteq (a, b)$, $x \neq y$,
   - $f_0(x) f_1(x) < 0$ para $y - \epsilon < x < y$ y $f_0(x) f_1(x) > 0$ si $y < x < y + \epsilon$.
2. $\forall\ 0 < i \leq N - 1$: Si existe $x \in (a, b)$

   $f_i(x) = 0$, entonces $f_{i-1}(x) f_{i+1}(x) < 0$.
3. $f_N(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Definición. (Heindel, 71)

Sea $f_0 : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua.

Una *Secuencia de Sturm para f_0 en el intervalo (a, b)* es una secuencia de funciones continuas $f_0, \ldots, f_N$ que verifica que:

1. Si $f_0(y) = 0$, $y \in (a, b)$, existe $\epsilon > 0$ tal que:
   - $f_1(x) \neq 0$ para todo $x \in (y - \epsilon, y + \epsilon) \subseteq (a, b)$, $x \neq y$,
   - $f_0(x)f_1(x) < 0$ para $y - \epsilon < x < y$ y $f_0(x)f_1(x) > 0$ si $y < x < y + \epsilon$.
2. $\forall\ 0 < i \leq N - 1$: Si existe $x \in (a, b)$ $f_i(x) = 0$, entonces $f_{i-1}(x)f_{i+1}(x) < 0$.
3. $f_N(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Definición. (Heindel, 71)

Sea $f_0 : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua.

Una *Secuencia de Sturm para f_0 en el intervalo (a, b)* es una secuencia de funciones continuas $f_0, \ldots, f_N$ que verifica que:

1. Si $f_0(y) = 0$, $y \in (a, b)$, existe $\epsilon > 0$ tal que:
   - $f_1(x) \neq 0$ para todo $x \in (y - \epsilon, y + \epsilon) \subseteq (a, b)$, $x \neq y$,
   - $f_0(x)f_1(x) < 0$ para $y - \epsilon < x < y$ y $f_0(x)f_1(x) > 0$ si $y < x < y + \epsilon$.
2. $\forall\ 0 < i \leq N - 1$: Si existe $x \in (a, b)$

   $f_i(x) = 0$, entonces $f_{i-1}(x)f_{i+1}(x) < 0$.
3. $f_N(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Definición. (Heindel, 71)

Sea $f_0 : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua.

Una *Secuencia de Sturm para f_0 en el intervalo (a, b)* es una secuencia de funciones continuas $f_0, \ldots, f_N$ que verifica que:

1. Si $f_0(y) = 0$, $y \in (a, b)$, existe $\epsilon > 0$ tal que:
   - $f_1(x) \neq 0$ para todo $x \in (y - \epsilon, y + \epsilon) \subseteq (a, b)$, $x \neq y$,
   - $f_0(x)f_1(x) < 0$ para $y - \epsilon < x < y$ y $f_0(x)f_1(x) > 0$ si $y < x < y + \epsilon$.
2. $\forall\ 0 < i \leq N - 1$: Si existe $x \in (a, b)$

   $f_i(x) = 0$, entonces $f_{i-1}(x)f_{i+1}(x) < 0$.
3. $f_N(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Notando $v(f_0, x)$ a la cantidad de cambios de signo de la upla $(f_0(x), \dots, f_N(x))$.

Teorema. Si $f_0 : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua y $f_0, \dots, f_N$ es una Secuencia de Sturm para f_0 en el intervalo $(c, d] \subseteq (a, b)$,

la cantidad de soluciones de $f_0(X) = 0$ en el intervalo $(c, d]$ es

$$v(f_0, c) - v(f_0, d).$$

Notando $v(f_0, x)$ a la cantidad de cambios de signo de la upla $(f_0(x), \ldots, f_N(x))$.

Teorema. Si $f_0 : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua y $f_0, \ldots, f_N$ es una Secuencia de Sturm para f_0 en el intervalo $(c, d] \subseteq (a, b)$,

la cantidad de soluciones de $f_0(X) = 0$ en el intervalo $(c, d]$ es

$$v(f_0, c) - v(f_0, d).$$

Notando $v(f_0, x)$ a la cantidad de cambios de signo de la upla $(f_0(x), \ldots, f_N(x))$.

Teorema. Si $f_0 : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua y $f_0, \ldots, f_N$ es una Secuencia de Sturm para f_0 en el intervalo $(c, d] \subseteq (a, b)$,

la cantidad de soluciones de $f_0(X) = 0$ en el intervalo $(c, d]$ es

$$v(f_0, c) - v(f_0, d).$$

Construcción de una Secuencia de Sturm

Dado el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$, construimos primero una secuencia de polinomios en forma recurrente:

- $P_0(X,Y) = P(X,Y)$.
- $P_1(X,Y) = \frac{\partial P_0}{\partial X}(X,Y) + \frac{\partial P_0}{\partial Y}(X,Y)h'(X)Y$.

  Notar que $P_1\left(X, e^{h(X)}\right) = \left(P\left(X, e^{h(X)}\right)\right)'$.
- Si $P_i \neq 0$:
  - $a_{i-1}, a_i \in \mathbb{Z}[X]$ los coeficientes principales de $P_{i-1}, P_i \in \mathbb{Z}[X][Y]$ resp. y
  - $d_i = gr_Y(P_i)$ y $d_{i-1} = gr_Y(P_{i-1})$.

$$P_{i+1} = \begin{cases} -a_i^2 P_{i-1} + a_i a_{i-1} P_i Y^{d_{i-1}-d_i} & \text{si } d_{i-1} \geq d_i \\ -a_i^2 P_{i-1} Y^{d_i - d_{i-1}} + a_i a_{i-1} P_i & \text{si no.} \end{cases}$$

Construcción de una Secuencia de Sturm

Dado el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$, construimos primero una secuencia de polinomios en forma recurrente:

- $P_0(X,Y) = P(X,Y)$.
- $P_1(X,Y) = \frac{\partial P_0}{\partial X}(X,Y) + \frac{\partial P_0}{\partial Y}(X,Y)h'(X)Y$.

  Notar que $P_1\left(X, e^{h(X)}\right) = \left(P\left(X, e^{h(X)}\right)\right)'$.
- Si $P_i \neq 0$:
  - $a_{i-1}, a_i \in \mathbb{Z}[X]$ los coeficientes principales de $P_{i-1}, P_i \in \mathbb{Z}[X][Y]$ resp. y
  - $d_i = gr_Y(P_i)$ y $d_{i-1} = gr_Y(P_{i-1})$.

$$P_{i+1} = \begin{cases} -a_i^2 P_{i-1} + a_i a_{i-1} P_i Y^{d_{i-1}-d_i} & \text{si } d_{i-1} \geq d_i \\ -a_i^2 P_{i-1} Y^{d_i - d_{i-1}} + a_i a_{i-1} P_i & \text{si no.} \end{cases}$$

Construcción de una Secuencia de Sturm

Dado el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$, construimos primero una secuencia de polinomios en forma recurrente:

- $P_0(X,Y) = P(X,Y)$.
- $P_1(X,Y) = \frac{\partial P_0}{\partial X}(X,Y) + \frac{\partial P_0}{\partial Y}(X,Y)h'(X)Y$.

  Notar que $P_1\left(X, e^{h(X)}\right) = \left(P\left(X, e^{h(X)}\right)\right)'$.
- Si $P_i \neq 0$:
  - $a_{i-1}, a_i \in \mathbb{Z}[X]$ los coeficientes principales de $P_{i-1}, P_i \in \mathbb{Z}[X][Y]$ resp. y
  - $d_i = gr_Y(P_i)$ y $d_{i-1} = gr_Y(P_{i-1})$.

$$P_{i+1} = \begin{cases} -a_i^2 P_{i-1} + a_i a_{i-1} P_i Y^{d_{i-1}-d_i} & \text{si } d_{i-1} \geq d_i \\ -a_i^2 P_{i-1} Y^{d_i - d_{i-1}} + a_i a_{i-1} P_i & \text{si no.} \end{cases}$$

Construcción de una Secuencia de Sturm

Dado el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$, construimos primero una secuencia de polinomios en forma recurrente:

- $P_0(X, Y) = P(X, Y)$.
- $P_1(X, Y) = \frac{\partial P_0}{\partial X}(X, Y) + \frac{\partial P_0}{\partial Y}(X, Y)h'(X)Y$.

  Notar que $P_1\left(X, e^{h(X)}\right) = \left(P\left(X, e^{h(X)}\right)\right)'$.
- Si $P_i \neq 0$:
  - $a_{i-1}, a_i \in \mathbb{Z}[X]$ los coeficientes principales de $P_{i-1}, P_i \in \mathbb{Z}[X][Y]$ resp. y
  - $d_i = gr_Y(P_i)$ y $d_{i-1} = gr_Y(P_{i-1})$.

$$P_{i+1} = \begin{cases} -a_i^2 P_{i-1} + a_i a_{i-1} P_i Y^{d_{i-1}-d_i} & \text{si } d_{i-1} \geq d_i \\ -a_i^2 P_{i-1} Y^{d_i - d_{i-1}} + a_i a_{i-1} P_i & \text{si no.} \end{cases}$$

Construcción de una Secuencia de Sturm

Dado el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$, construimos primero una secuencia de polinomios en forma recurrente:

- $P_0(X, Y) = P(X, Y)$.
- $P_1(X, Y) = \frac{\partial P_0}{\partial X}(X, Y) + \frac{\partial P_0}{\partial Y}(X, Y)h'(X)Y$.

  Notar que $P_1\left(X, e^{h(X)}\right) = \left(P\left(X, e^{h(X)}\right)\right)'$.
- Si $P_i \neq 0$:
  - $a_{i-1}, a_i \in \mathbb{Z}[X]$ los coeficientes principales de $P_{i-1}, P_i \in \mathbb{Z}[X][Y]$ resp. y
  - $d_i = gr_Y(P_i)$ y $d_{i-1} = gr_Y(P_{i-1})$.

$$P_{i+1} = \begin{cases} -a_i^2 P_{i-1} + a_i a_{i-1} P_i Y^{d_{i-1}-d_i} & \text{si } d_{i-1} \geq d_i \\ -a_i^2 P_{i-1} Y^{d_i - d_{i-1}} + a_i a_{i-1} P_i & \text{si no.} \end{cases}$$

Construcción de una Secuencia de Sturm

Dado el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$, construimos primero una secuencia de polinomios en forma recurrente:

- $P_0(X, Y) = P(X, Y)$.
- $P_1(X, Y) = \frac{\partial P_0}{\partial X}(X, Y) + \frac{\partial P_0}{\partial Y}(X, Y)h'(X)Y$.

  Notar que $P_1\left(X, e^{h(X)}\right) = \left(P\left(X, e^{h(X)}\right)\right)'$.
- Si $P_i \neq 0$:

  - $a_{i-1}, a_i \in \mathbb{Z}[X]$ los coeficientes principales de $P_{i-1}, P_i \in \mathbb{Z}[X][Y]$ resp. y
  - $d_i = gr_Y(P_i)$ y $d_{i-1} = gr_Y(P_{i-1})$.

$$P_{i+1} = \begin{cases} -a_i^2 P_{i-1} + a_i a_{i-1} P_i Y^{d_{i-1}-d_i} & \text{si } d_{i-1} \geq d_i \\ -a_i^2 P_{i-1} Y^{d_i - d_{i-1}} + a_i a_{i-1} P_i & \text{si no.} \end{cases}$$

Construcción de una Secuencia de Sturm

Dado el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$, construimos primero una secuencia de polinomios en forma recurrente:

- $P_0(X, Y) = P(X, Y)$.
- $P_1(X, Y) = \frac{\partial P_0}{\partial X}(X, Y) + \frac{\partial P_0}{\partial Y}(X, Y)h'(X)Y$.

  Notar que $P_1\left(X, e^{h(X)}\right) = \left(P\left(X, e^{h(X)}\right)\right)'$.
- Si $P_i \neq 0$:
  - $a_{i-1}, a_i \in \mathbb{Z}[X]$ los coeficientes principales de $P_{i-1}, P_i \in \mathbb{Z}[X][Y]$ resp. y
  - $d_i = gr_Y(P_i)$ y $d_{i-1} = gr_Y(P_{i-1})$.

$$P_{i+1} = \begin{cases} -a_i^2 P_{i-1} + a_i a_{i-1} P_i Y^{d_{i-1}-d_i} & \text{si } d_{i-1} \geq d_i \\ -a_i^2 P_{i-1} Y^{d_i - d_{i-1}} + a_i a_{i-1} P_i & \text{si no.} \end{cases}$$

Construcción de una Secuencia de Sturm

Dado el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$, construimos primero una secuencia de polinomios en forma recurrente:

- $P_0(X, Y) = P(X, Y)$.
- $P_1(X, Y) = \frac{\partial P_0}{\partial X}(X, Y) + \frac{\partial P_0}{\partial Y}(X, Y)h'(X)Y$.

  Notar que $P_1\left(X, e^{h(X)}\right) = \left(P\left(X, e^{h(X)}\right)\right)'$.
- Si $P_i \neq 0$:
  - $a_{i-1}, a_i \in \mathbb{Z}[X]$ los coeficientes principales de $P_{i-1}, P_i \in \mathbb{Z}[X][Y]$ resp. y
  - $d_i = gr_Y(P_i)$ y $d_{i-1} = gr_Y(P_{i-1})$.

$$P_{i+1} = \begin{cases} -a_i^2 P_{i-1} + a_i a_{i-1} P_i Y^{d_{i-1}-d_i} & \text{si } d_{i-1} \geq d_i \\ -a_i^2 P_{i-1} Y^{d_i - d_{i-1}} + a_i a_{i-1} P_i & \text{si no.} \end{cases}$$

Construcción de una Secuencia de Sturm

Dado el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$, construimos primero una secuencia de polinomios en forma recurrente:

- $P_0(X,Y) = P(X,Y)$.
- $P_1(X,Y) = \frac{\partial P_0}{\partial X}(X,Y) + \frac{\partial P_0}{\partial Y}(X,Y)h'(X)Y$.

  Notar que $P_1\left(X, e^{h(X)}\right) = \left(P\left(X, e^{h(X)}\right)\right)'$.
- Si $P_i \neq 0$:
  - $a_{i-1}, a_i \in \mathbb{Z}[X]$ los coeficientes principales de $P_{i-1}, P_i \in \mathbb{Z}[X][Y]$ resp. y
  - $d_i = gr_Y(P_i)$ y $d_{i-1} = gr_Y(P_{i-1})$.

$$P_{i+1} = \begin{cases} -a_i^2 P_{i-1} + a_i a_{i-1} P_i Y^{d_{i-1}-d_i} & \text{si } d_{i-1} \geq d_i \\ -a_i^2 P_{i-1} Y^{d_i - d_{i-1}} + a_i a_{i-1} P_i & \text{si no.} \end{cases}$$

Algunas propiedades:

1. Si $P_{i+1} \neq 0$,

$$\text{máx}(d_i, d_{i+1}) < \text{máx}(d_{i-2}, d_{i-1}).$$

2. Existe $N \in \mathbb{N}$, $N \leq 2d_0 + 1$ tal que

$$P_0, \ldots, P_N \neq 0 \quad y \quad P_{N+1} = 0.$$

3. Si $Res_Y(P_0, P_1) \neq 0$:

$$P_N(X) = a_N(X) Y^{d_N}.$$

Algunas propiedades:

1. Si $P_{i+1} \neq 0$,

$$\text{máx}(d_i, d_{i+1}) < \text{máx}(d_{i-2}, d_{i-1}).$$

2. Existe $N \in \mathbb{N}$, $N \leq 2d_0 + 1$ tal que

$$P_0, \ldots, P_N \neq 0 \quad y \quad P_{N+1} = 0.$$

3. Si $Res_Y(P_0, P_1) \neq 0$:

$$P_N(X) = a_N(X) Y^{d_N}.$$

Algunas propiedades:

1. Si $P_{i+1} \neq 0$,

$$\max(d_i, d_{i+1}) < \max(d_{i-2}, d_{i-1}).$$

2. Existe $N \in \mathbb{N}$, $N \leq 2d_0 + 1$ tal que

$$P_0, \ldots, P_N \neq 0 \quad y \quad P_{N+1} = 0.$$

3. Si $Res_Y(P_0, P_1) \neq 0$:

$$P_N(X) = a_N(X)Y^{d_N}.$$

Algunas propiedades:

1. Si $P_{i+1} \neq 0$,

$$\max(d_i, d_{i+1}) < \max(d_{i-2}, d_{i-1}).$$

2. Existe $N \in \mathbb{N}$, $N \leq 2d_0 + 1$ tal que

$$P_0, \ldots, P_N \neq 0 \quad y \quad P_{N+1} = 0.$$

3. Si $Res_Y(P_0, P_1) \neq 0$:

$$P_N(X) = a_N(X) Y^{d_N}.$$

Algunas propiedades:

1. Si $P_{i+1} \neq 0$,
$$\max(d_i, d_{i+1}) < \max(d_{i-2}, d_{i-1}).$$
2. Existe $N \in \mathbb{N}$, $N \leq 2d_0 + 1$ tal que
$$P_0, \ldots, P_N \neq 0 \;\; y \;\; P_{N+1} = 0.$$
3. Si $Res_Y(P_0, P_1) \neq 0$:
$$P_N(X) = a_N(X) Y^{d_N}.$$

Teorema. Dados el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$

- con $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$, $gr_Y(P) > 0$,
- P sin factor en X de grado positivo y
- $h \in \mathbb{Z}[X]$ no constante,

y $P_0, \ldots, P_N$ los polinomios definidos según la recurrencia anterior.

Si $Res_Y(P_0, P_1) \neq 0$,

$$f_i(X) = P_i\left(X, e^{h(X)}\right), \; 0 \leq i \leq N,$$

es una Secuencia de Sturm para $P(X, e^{h(X)})$ en cualquier intervalo (a, b) que no contenga raíces reales del polinomio

$$dcm\Big(h, P(X,1)\Big) a_N(X).$$

Podría pasar que a o b sean raíces de este polinomio.

Teorema. Dados el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$

- con $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$, $gr_Y(P) > 0$,
- P sin factor en X de grado positivo y
- $h \in \mathbb{Z}[X]$ no constante,

y $P_0, \ldots, P_N$ los polinomios definidos según la recurrencia anterior.

Si $Res_Y(P_0, P_1) \neq 0$,

$$f_i(X) = P_i\left(X, e^{h(X)}\right), \ 0 \leq i \leq N,$$

es una Secuencia de Sturm para $P(X, e^{h(X)})$ en cualquier intervalo (a, b) que no contenga raíces reales del polinomio

$$dcm\Big(h, P(X, 1)\Big)a_N(X).$$

Podría pasar que a o b sean raíces de este polinomio.

Teorema. Dados el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$

- con $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$, $gr_Y(P) > 0$,
- P sin factor en X de grado positivo y
- $h \in \mathbb{Z}[X]$ no constante,

y $P_0, \ldots, P_N$ los polinomios definidos según la recurrencia anterior.

Si $Res_Y(P_0, P_1) \neq 0$,

$$f_i(X) = P_i\left(X, e^{h(X)}\right), \; 0 \leq i \leq N,$$

es una Secuencia de Sturm para $P(X, e^{h(X)})$ en cualquier intervalo (a, b) que no contenga raíces reales del polinomio

$$dcm\Big(h, P(X, 1)\Big) a_N(X).$$

Podría pasar que a o b sean raíces de este polinomio.

Teorema. Dados el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$

- con $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$, $gr_Y(P) > 0$,
- P sin factor en X de grado positivo y
- $h \in \mathbb{Z}[X]$ no constante,

y $P_0, \ldots, P_N$ los polinomios definidos según la recurrencia anterior.

Si $Res_Y(P_0, P_1) \neq 0$,

$$f_i(X) = P_i\left(X, e^{h(X)}\right), \; 0 \leq i \leq N,$$

es una Secuencia de Sturm para $P(X, e^{h(X)})$ en cualquier intervalo (a, b) que no contenga raíces reales del polinomio

$$dcm\left(h, P(X, 1)\right) a_N(X).$$

Podría pasar que a o b sean raíces de este polinomio.

Teorema. Dados el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$

- con $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$, $gr_Y(P) > 0$,
- P sin factor en X de grado positivo y
- $h \in \mathbb{Z}[X]$ no constante,

y $P_0, \ldots, P_N$ los polinomios definidos según la recurrencia anterior.

Si $Res_Y(P_0, P_1) \neq 0$,

$$f_i(X) = P_i\left(X, e^{h(X)}\right), \ 0 \leq i \leq N,$$

es una Secuencia de Sturm para $P(X, e^{h(X)})$ en cualquier intervalo (a, b) que no contenga raíces reales del polinomio

$$dcm\Big(h, P(X,1)\Big) a_N(X).$$

Podría pasar que a o b sean raíces de este polinomio.

Teorema. Dados el E-polinomio $P\left(X, e^{h(X)}\right)$

- con $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$, $gr_Y(P) > 0$,
- P sin factor en X de grado positivo y
- $h \in \mathbb{Z}[X]$ no constante,

y $P_0, \ldots, P_N$ los polinomios definidos según la recurrencia anterior.

Si $Res_Y(P_0, P_1) \neq 0$,

$$f_i(X) = P_i\left(X, e^{h(X)}\right)\,,\ 0 \leq i \leq N,$$

es una Secuencia de Sturm para $P(X, e^{h(X)})$ en cualquier intervalo (a, b) que no contenga raíces reales del polinomio

$$dcm\Big(h, P(X,1)\Big)a_N(X).$$

Podría pasar que a o b sean raíces de este polinomio.

Llamando $r_a = mult(a, f_i)$ y $r_b = mult(b, f_i)$,

definimos las $(N+1) - uplas$:

- β con $\beta_i = \begin{cases} sg\Big(f_i(a)\Big) & \text{si } f_i(a) \neq 0 \\ sg\Big(f_i^{(r_a)}(a)\Big) & \text{si } f_i(a) = 0. \end{cases}$

  Observar que:

  $sg\Big(f_i^{(r_a)}(a)\Big) = sg\Big(f_i(x)\Big)$, con x cerca de a por derecha.

- λ con $\lambda_i = \begin{cases} sg\Big(f_i(b)\Big) & \text{si } f_i(b) \neq 0 \\ sg\Big((-1)^{r_b} f_i^{(r_b)}(b)\Big) & \text{si } f_i(b) = 0. \end{cases}$

  Observar que:

  $sg\Big((-1)^{r_b} f_i^{(r_b)}(b)\Big) = sg\Big(f_i(x)\Big)$, con x cerca de b por izquierda.

Llamando $r_a = mult(a, f_i)$ y $r_b = mult(b, f_i)$, definimos las $(N+1) - uplas$:

- β con $\beta_i = \begin{cases} sg\left(f_i(a)\right) & \text{si } f_i(a) \neq 0 \\ sg\left(f_i^{(r_a)}(a)\right) & \text{si } f_i(a) = 0. \end{cases}$

  Observar que:

  $sg\left(f_i^{(r_a)}(a)\right) = sg\left(f_i(x)\right)$, con x cerca de a por derecha.

- λ con $\lambda_i = \begin{cases} sg\left(f_i(b)\right) & \text{si } f_i(b) \neq 0 \\ sg\left((-1)^{r_b} f_i^{(r_b)}(b)\right) & \text{si } f_i(b) = 0. \end{cases}$

  Observar que:

  $sg\left((-1)^{r_b} f_i^{(r_b)}(b)\right) = sg\left(f_i(x)\right)$, con x cerca de b por izquierda.

Llamando $r_a = mult(a, f_i)$ y $r_b = mult(b, f_i)$, definimos las $(N+1) - uplas$:

- β con $\beta_i = \begin{cases} sg\Big(f_i(a)\Big) & \text{si } f_i(a) \neq 0 \\ sg\Big(f_i^{(r_a)}(a)\Big) & \text{si } f_i(a) = 0. \end{cases}$

  Observar que:

  $sg\Big(f_i^{(r_a)}(a)\Big) = sg\Big(f_i(x)\Big)$, con x cerca de a por derecha.

- λ con $\lambda_i = \begin{cases} sg\Big(f_i(b)\Big) & \text{si } f_i(b) \neq 0 \\ sg\Big((-1)^{r_b} f_i^{(r_b)}(b)\Big) & \text{si } f_i(b) = 0. \end{cases}$

  Observar que:

  $sg\Big((-1)^{r_b} f_i^{(r_b)}(b)\Big) = sg\Big(f_i(x)\Big)$, con x cerca de b por izquierda.

Llamando $r_a = mult(a, f_i)$ y $r_b = mult(b, f_i)$,

definimos las $(N+1)-uplas$:

- β con $\beta_i = \begin{cases} sg\Big(f_i(a)\Big) & \text{si } f_i(a) \neq 0 \\ sg\Big(f_i^{(r_a)}(a)\Big) & \text{si } f_i(a) = 0. \end{cases}$

  Observar que:

  $sg\Big(f_i^{(r_a)}(a)\Big) = sg\Big(f_i(x)\Big)$, con x cerca de a por derecha.

- λ con $\lambda_i = \begin{cases} sg\Big(f_i(b)\Big) & \text{si } f_i(b) \neq 0 \\ sg\Big((-1)^{r_b} f_i^{(r_b)}(b)\Big) & \text{si } f_i(b) = 0. \end{cases}$

  Observar que:

  $sg\Big((-1)^{r_b} f_i^{(r_b)}(b)\Big) = sg\Big(f_i(x)\Big)$, con x cerca de b por izquierda.

Llamando $r_a = mult(a, f_i)$ y $r_b = mult(b, f_i)$,

definimos las $(N+1) - uplas$:

- β con $\beta_i = \begin{cases} sg\Big(f_i(a)\Big) & \text{si } f_i(a) \neq 0 \\ sg\Big(f_i^{(r_a)}(a)\Big) & \text{si } f_i(a) = 0. \end{cases}$

  Observar que:

  $sg\Big(f_i^{(r_a)}(a)\Big) = sg\Big(f_i(x)\Big)$, con x cerca de a por derecha.

- λ con $\lambda_i = \begin{cases} sg\Big(f_i(b)\Big) & \text{si } f_i(b) \neq 0 \\ sg\Big((-1)^{r_b} f_i^{(r_b)}(b)\Big) & \text{si } f_i(b) = 0. \end{cases}$

  Observar que:

  $sg\Big((-1)^{r_b} f_i^{(r_b)}(b)\Big) = sg\Big(f_i(x)\Big)$, con x cerca de b por izquierda.

Llamando $r_a = mult(a, f_i)$ y $r_b = mult(b, f_i)$,

definimos las $(N+1) - uplas$:

- β con $\beta_i = \begin{cases} sg\Big(f_i(a)\Big) & \text{si } f_i(a) \neq 0 \\ sg\Big(f_i^{(r_a)}(a)\Big) & \text{si } f_i(a) = 0. \end{cases}$

  Observar que:

  $sg\Big(f_i^{(r_a)}(a)\Big) = sg\Big(f_i(x)\Big)$, con x cerca de a por derecha.

- λ con $\lambda_i = \begin{cases} sg\Big(f_i(b)\Big) & \text{si } f_i(b) \neq 0 \\ sg\Big((-1)^{r_b} f_i^{(r_b)}(b)\Big) & \text{si } f_i(b) = 0. \end{cases}$

  Observar que:

  $sg\Big((-1)^{r_b} f_i^{(r_b)}(b)\Big) = sg\Big(f_i(x)\Big)$, con x cerca de b por izquierda.

Teorema. La cantidad de soluciones reales de

$$P\left(X, e^{h(X)}\right) = 0 \text{ en } (a, b) \text{ es } v(\beta) - v(\lambda),$$

donde $v(\beta), v(\lambda)$ son la cantidad de cambios de signo en las uplas β y λ resp.

Puede generalizarse a intervalos que:

- contengan raíces reales del polinomio $dcm\left(h, P(X,1)\right) a_N(X)$ y
- no acotados.

Teorema. La cantidad de soluciones reales de

$$P\left(X, e^{h(X)}\right) = 0 \text{ en } (a, b) \text{ es } v(\beta) - v(\lambda),$$

donde $v(\beta), v(\lambda)$ son la cantidad de cambios de signo en las uplas β y λ resp.

Puede generalizarse a intervalos que:

- contengan raíces reales del polinomio $dcm\Big(h, P(X, 1)\Big) a_N(X)$ y
- no acotados.

Herramientas Algorítmicas

- Codificación de Thom.

  Cada raíz x de un polinomio G de grado d queda determinada por

  $$\sigma_G(x) = \left(sg\left(G^{(0)}(x)\right), sg\left(G^{(1)}(x)\right), \ldots, sg\left(G^{(d)}(x)\right)\right).$$

- Algoritmo para calcular el signo de un polinomio en un número algebraico sobre $\mathbb{Q}$

  Calcula $sg\left(P(x)\right)$, a partir de $\sigma_G(x)$, con $G \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $G(x) = 0$.

Herramientas Algorítmicas

- Codificación de Thom.

  Cada raíz x de un polinomio G de grado d queda determinada por

$$\sigma_G(x) = \left(sg\left(G^{(0)}(x) \right), sg\left(G^{(1)}(x) \right), \ldots, sg\left(G^{(d)}(x) \right) \right).$$

- Algoritmo para calcular el signo de un polinomio en un número algebraico sobre $\mathbb{Q}$

  Calcula $sg\left(P(x)\right)$, a partir de $\sigma_G(x)$, con $G \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $G(x) = 0$.

Herramientas Algorítmicas

- Codificación de Thom.

  Cada raíz x de un polinomio G de grado d queda determinada por

  $$\sigma_G(x) = \left(sg\left(G^{(0)}(x)\right), sg\left(G^{(1)}(x)\right), \dots, sg\left(G^{(d)}(x)\right) \right).$$

- Algoritmo para calcular el signo de un polinomio en un número algebraico sobre $\mathbb{Q}$

  Calcula $sg\left(P(x)\right)$, a partir de $\sigma_G(x)$, con $G \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $G(x) = 0$.

Dados un E-polinomio $f(X) = P\Big(X, e^{h(X)}\Big)$:

- Multiplicidad de un cero de f: Si x es un cero de f,

$$mult(x, f) \leq 2gr_X(P)gr_Y(P) + gr(h)gr_Y(P).$$

- Algoritmo para calcular el $sg\Big(f(\alpha)\Big)$, con α un número algebraico sobre $\mathbb{Q}$.
  - A partir de $\sigma_G(\alpha)$, con $G \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $G(\alpha) = 0$.
  - Consiste en hallar un intervalo abierto I:
    i) donde $P(\alpha, Y)$ no cambie de signo.
    ii) $e^{h(\alpha)} \in I$.
    iii) tomar un $w \in \mathbb{Q} \cap I$.

Luego

$$sg\Big(f(\alpha)\Big) = sg\Big(P(\alpha, e^{h(\alpha)})\Big) = sg\Big(P(X, w)\mid_{X=\alpha}\Big).$$

Dados un E-polinomio $f(X) = P\left(X, e^{h(X)}\right)$:

- Multiplicidad de un cero de f: Si x es un cero de f,

$$mult(x, f) \leq 2gr_X(P)gr_Y(P) + gr(h)gr_Y(P).$$

- Algoritmo para calcular el $sg\left(f(\alpha)\right)$, con α un número algebraico sobre $\mathbb{Q}$.
  - A partir de $\sigma_G(\alpha)$, con $G \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $G(\alpha) = 0$.
  - Consiste en hallar un intervalo abierto I:
    i) donde $P(\alpha, Y)$ no cambie de signo.
    ii) $e^{h(\alpha)} \in I$.
    iii) tomar un $w \in \mathbb{Q} \cap I$.

  Luego

$$sg\left(f(\alpha)\right) = sg\left(P(\alpha, e^{h(\alpha)})\right) = sg\left(P(X, w) \mid_{X=\alpha}\right).$$

Dados un E-polinomio $f(X) = P\left(X, e^{h(X)}\right)$:

- Multiplicidad de un cero de f: Si x es un cero de f,

$$mult(x, f) \leq 2gr_X(P)gr_Y(P) + gr(h)gr_Y(P).$$

- Algoritmo para calcular el $sg\left(f(\alpha)\right)$, con α un número algebraico sobre $\mathbb{Q}$.

  - A partir de $\sigma_G(\alpha)$, con $G \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $G(\alpha) = 0$.
  - Consiste en hallar un intervalo abierto I:
    i) donde $P(\alpha, Y)$ no cambie de signo.
    ii) $e^{h(\alpha)} \in I$.
    iii) tomar un $w \in \mathbb{Q} \cap I$.

  Luego

$$sg\left(f(\alpha)\right) = sg\left(P(\alpha, e^{h(\alpha)})\right) = sg\left(P(X, w) \mid_{X=\alpha}\right).$$

Dados un E-polinomio $f(X) = P\left(X, e^{h(X)}\right)$:

- Multiplicidad de un cero de f: Si x es un cero de f,

$$mult(x, f) \leq 2gr_X(P)gr_Y(P) + gr(h)gr_Y(P).$$

- Algoritmo para calcular el $sg\left(f(\alpha)\right)$, con α un número algebraico sobre $\mathbb{Q}$.
  - A partir de $\sigma_G(\alpha)$, con $G \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $G(\alpha) = 0$.
  - Consiste en hallar un intervalo abierto I:
    i) donde $P(\alpha, Y)$ no cambie de signo.
    ii) $e^{h(\alpha)} \in I$.
    iii) tomar un $w \in \mathbb{Q} \cap I$.

Luego

$$sg\left(f(\alpha)\right) = sg\left(P(\alpha, e^{h(\alpha)})\right) = sg\left(P(X, w)\mid_{X=\alpha}\right).$$

Dados un E-polinomio $f(X) = P\left(X, e^{h(X)}\right)$:

- Multiplicidad de un cero de f: Si x es un cero de f,

$$mult(x, f) \leq 2gr_X(P)gr_Y(P) + gr(h)gr_Y(P).$$

- Algoritmo para calcular el $sg\left(f(\alpha)\right)$, con α un número algebraico sobre $\mathbb{Q}$.
  - A partir de $\sigma_G(\alpha)$, con $G \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $G(\alpha) = 0$.
  - Consiste en hallar un intervalo abierto I:
    i) donde $P(\alpha, Y)$ no cambie de signo.
    ii) $e^{h(\alpha)} \in I$.
    iii) tomar un $w \in \mathbb{Q} \cap I$.

Luego

$$sg\left(f(\alpha)\right) = sg\left(P(\alpha, e^{h(\alpha)})\right) = sg\left(P(X, w)\mid_{X=\alpha}\right).$$

Dados un E-polinomio $f(X) = P\left(X, e^{h(X)}\right)$:

- Multiplicidad de un cero de f: Si x es un cero de f,

$$mult(x, f) \leq 2gr_X(P)gr_Y(P) + gr(h)gr_Y(P).$$

- Algoritmo para calcular el $sg\left(f(\alpha)\right)$, con α un número algebraico sobre $\mathbb{Q}$.
  - A partir de $\sigma_G(\alpha)$, con $G \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $G(\alpha) = 0$.
  - Consiste en hallar un intervalo abierto I:
    i) donde $P(\alpha, Y)$ no cambie de signo.
    ii) $e^{h(\alpha)} \in I$.
    iii) tomar un $w \in \mathbb{Q} \cap I$.

Luego

$$sg\left(f(\alpha)\right) = sg\left(P(\alpha, e^{h(\alpha)})\right) = sg\left(P(X, w)\mid_{X=\alpha}\right).$$

Caso general.

- Si $Res_Y(P_0, P_1) = 0$:

Entonces $M = dcm(P_0, P_1)$ verifica que $gr_Y(M) \geq 1$.

Sea $G_0 \in \mathbb{Z}[X, Y]$ tal que: $P_0 = MG_0$.

Luego:

- $gr_Y(G_0) < gr_Y(P_0)$
- $P_0\left(X, e^{h(X)}\right) = M\left(X, e^{h(X)}\right) G_0\left(X, e^{h(X)}\right)$.

Se puede probar que si $x \in \mathbb{R}$,

$$P_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0 \Longleftrightarrow G_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0.$$

Caso general.

- Si $Res_Y(P_0, P_1) = 0$:

  Entonces $M = dcm(P_0, P_1)$ verifica que $gr_Y(M) \geq 1$.

  Sea $G_0 \in \mathbb{Z}[X, Y]$ tal que: $P_0 = MG_0$.

  Luego:

  - $gr_Y(G_0) < gr_Y(P_0)$
  - $P_0\left(X, e^{h(X)}\right) = M\left(X, e^{h(X)}\right) G_0\left(X, e^{h(X)}\right)$.

  Se puede probar que si $x \in \mathbb{R}$,

$$P_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0 \iff G_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0.$$

Caso general.

- Si $Res_Y(P_0, P_1) = 0$:

  Entonces $M = dcm(P_0, P_1)$ verifica que $gr_Y(M) \geq 1$.

  Sea $G_0 \in \mathbb{Z}[X, Y]$ tal que: $P_0 = MG_0$.

  Luego:

  - $gr_Y(G_0) < gr_Y(P_0)$
  - $P_0\left(X, e^{h(X)}\right) = M\left(X, e^{h(X)}\right) G_0\left(X, e^{h(X)}\right)$.

  Se puede probar que si $x \in \mathbb{R}$,

$$P_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0 \Longleftrightarrow G_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0.$$

Caso general.

- Si $Res_Y(P_0, P_1) = 0$:

  Entonces $M = dcm(P_0, P_1)$ verifica que $gr_Y(M) \geq 1$.

  Sea $G_0 \in \mathbb{Z}[X, Y]$ tal que: $P_0 = MG_0$.

  Luego:

  - $gr_Y(G_0) < gr_Y(P_0)$
  - $P_0\left(X, e^{h(X)}\right) = M\left(X, e^{h(X)}\right) G_0\left(X, e^{h(X)}\right)$.

  Se puede probar que si $x \in \mathbb{R}$,

$$P_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0 \Longleftrightarrow G_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0.$$

Caso general.

- Si $Res_Y(P_0, P_1) = 0$:

  Entonces $M = dcm(P_0, P_1)$ verifica que $gr_Y(M) \geq 1$.

  Sea $G_0 \in \mathbb{Z}[X, Y]$ tal que: $P_0 = MG_0$.

  Luego:

  - $gr_Y(G_0) < gr_Y(P_0)$
  - $P_0\left(X, e^{h(X)}\right) = M\left(X, e^{h(X)}\right) G_0\left(X, e^{h(X)}\right)$.

  Se puede probar que si $x \in \mathbb{R}$,

$$P_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0 \Longleftrightarrow G_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0.$$

Caso general.

- Si $Res_Y(P_0, P_1) = 0$:

  Entonces $M = dcm(P_0, P_1)$ verifica que $gr_Y(M) \geq 1$.

  Sea $G_0 \in \mathbb{Z}[X, Y]$ tal que: $P_0 = MG_0$.

  Luego:

  - $gr_Y(G_0) < gr_Y(P_0)$
  - $P_0\left(X, e^{h(X)}\right) = M\left(X, e^{h(X)}\right) G_0\left(X, e^{h(X)}\right)$.

  Se puede probar que si $x \in \mathbb{R}$,

$$P_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0 \Longleftrightarrow G_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0.$$

Caso general.

- Si $Res_Y(P_0, P_1) = 0$:

  Entonces $M = dcm(P_0, P_1)$ verifica que $gr_Y(M) \geq 1$.

  Sea $G_0 \in \mathbb{Z}[X, Y]$ tal que: $P_0 = MG_0$.

  Luego:

  - $gr_Y(G_0) < gr_Y(P_0)$
  - $P_0\left(X, e^{h(X)}\right) = M\left(X, e^{h(X)}\right) G_0\left(X, e^{h(X)}\right)$.

  Se puede probar que si $x \in \mathbb{R}$,

$$P_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0 \Longleftrightarrow G_0\left(x, e^{h(x)}\right) = 0.$$

Gracias!!