Matrices de Stokes, colecciones excepcionales y quiver gauge theories

John Alexander Cruz Morales
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

La Falda, elENA VII
Agosto 2014

Motivación

Conjetura de Dubrovin

Motivación

Conjetura de Dubrovin

Relaciona cohomología cuántica con la existencia de colecciones excepcionales.

Motivación

Conjetura de Dubrovin

Relaciona cohomología cuántica con la existencia de colecciones excepcionales.

Matriz de Stokes para la conexión extentida (de la cohomología cuántica) $=$ Matriz de Gram para una colección excepcional.

Motivación

Conjetura de Dubrovin

Relaciona cohomología cuántica con la existencia de colecciones excepcionales.

Matriz de Stokes para la conexión extentida (de la cohomología cuántica) = Matriz de Gram para una colección excepcional.

Colecciones excepcionales se relacionan con quiver gauge theories. De hecho, colecciones excepcionales proporcionan una forma rigurosa y constructiva de convertir geometría en gauge theory.

Motivación

Conjetura de Dubrovin

Relaciona cohomología cuántica con la existencia de colecciones excepcionales.

Matriz de Stokes para la conexión extentida (de la cohomología cuántica) $=$ Matriz de Gram para una colección excepcional.

Colecciones excepcionales se relacionan con quiver gauge theories. De hecho, colecciones excepcionales proporcionan una forma rigurosa y constructiva de convertir geometría en gauge theory.

Problema Estudiar relaciones directas entre el 'Stokes data' para una variedad (orbidad) Fano y ciertas quiver gauge theories.
[Wall-crossing phenomenon? Seiberg duaities y acciones del grupo de trenza en las matrices de Stokes?]
Calcular matrices de Stokes a partir de quivers.

Proposición

(C.M - van der Put). **'Stokes data'** $\{x_{\ell,k}\}$ **para**

$$\prod_{j=0}^{n} \delta(\delta - \frac{1}{w_j}) \dots (\delta - \frac{w_j - 1}{w_j}) \; - z. \text{ Put } s = \sum w_j.$$

En $z = \infty$, los valores propios generalizados son $\zeta^j z^{1/s}$ con $j = 0, \dots, s-1$ donde $\zeta = e^{2\pi i/s}$. Así la ecuación arriba es formalmente equivalente a $\delta^s - z$ y la configuración de las matrices de Stokes es la misma que la para el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{s-1}$. La monodromía formal difiere por un signo menos si n es par.
La monodromía topológica en $z = 0$ (o equivalentemente en $z = \infty$) tiene polinomio característico $\prod_{j=0}^{n} (\lambda^{w_j} - 1)$.
El 'Stokes data' $\{x_{\ell,k}\}$ está determinado por:
(a). 'The monodromy identity' $\pm P_n = \prod_{j=0}^{n} (\lambda^{w_j} - 1)$.
(b). $x_{\ell,k} = x_{\ell',k'}$ if $\ell \equiv \ell', \; k \equiv k' \mod s$.
(c). $x_{\ell+t,k+t} = x_{\ell,k}$ for all $t \in \mathbb{Z}$.
En particular, el 'Stokes data' consiste de números enteros.

Ejemplo $\mathbb{P}(1,2,4)$. La monodromía topológica en $z=\infty$ es conjugada a $\gamma St_{3/4}St_{1/4}$. El polinomio característico de esta matriz 7×7 es
$-\lambda^7 + x_{1,2}\lambda^6 + x_{0,2}\lambda^5 + x_{0,3}\lambda^4 + x_{6,3}\lambda^3 + x_{6,4}\lambda^2 + x_{5,4}\lambda + 1,$
donde estos $x_{\ell,k}$ son las entradas no triviales de $St_{3/4}$ y $St_{1/4}$.
La monodromía topológica en $z=0$ tiene polinomio característico $-(\lambda-1)(\lambda^2-1)(\lambda^4-1)$ y así obtenemos
$x_{1,2}=1,\ x_{0,2}=1,\ x_{0,3}=-1,\ x_{6,3}=1,\ x_{6,4}=-1,\ x_{5,4}=-1$

Colecciones excepcionales

Una colección de haces $E_1, ..., E_n$ es excepcional si cada E_i es excepcional, i.e., $\mathrm{Ext}^q(E_i, E_i) = 0$ para $q > 0$ y $\mathrm{Ext}^0(E_i, E_i) = \mathrm{Hom}(E_i, E_i) = \mathbb{C}$ y $\mathrm{Ext}^q(E_i, E_j) = 0$ para $i < j$ para todo q, La colección es llamada **fuerte** si $\mathrm{Ext}^q(E_i, E_j) = 0$ para $i < j$ para $q > 0$

Colecciones excepcionales

Una colección de haces $E_1, ..., E_n$ es excepcional si cada E_i es excepcional, i.e., $\mathrm{Ext}^q(E_i, E_i) = 0$ para $q > 0$ y $\mathrm{Ext}^0(E_i, E_i) = \mathrm{Hom}(E_i, E_i) = \mathbb{C}$ y $\mathrm{Ext}^q(E_i, E_j) = 0$ para $i < j$ para todo q, La colección es llamada **fuerte** si $\mathrm{Ext}^q(E_i, E_j) = 0$ para $i < j$ para $q > 0$

$\chi(E_i, E_j) = \sum_k (-1)^k dimExt^k(E_i, E_j) \Longrightarrow$ Matriz de Gram S_{ij}

S_{ij} y S_{ij}^{-1} son equivalentes via la acción de un grupo de trenza.

El espacio total del fibrado canónico sobre $\mathbb{P}(1, a, b)$ es una $\mathbb{Z}_{1+a+b}$ orbidad de $\mathbb{C}^3$.

El espacio total del fibrado canónico sobre $\mathbb{P}(1, a, b)$ es una $\mathbb{Z}_{1+a+b}$ orbidad de $\mathbb{C}^3$.

Los teóricos de cuerdas asocian un quiver a tal $\mathbb{Z}_{1+a+b}$ singularidad. La matriz S_{ij}^{-1} puede ser calculada del quiver!