Colímites homotópicos de posets

Ximena Fernández

Trabajo en conjunto con Elías Gabriel Minian

Departamento de Matemática
Universidad de Buenos Aires.

elENA VII
La Falda - 5 de agosto de 2014

Diagramas

Sean $\mathcal{J}$ una categoría pequeña, $\mathcal{C}$ una categoría.

Diagramas

Sean $\mathcal{J}$ una categoría pequeña, $\mathcal{C}$ una categoría.

Un **diagrama** en $\mathcal{C}$ indexado en $\mathcal{J}$ es un funtor $X : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$.

Diagramas

Sean $\mathcal{J}$ una categoría pequeña, $\mathcal{C}$ una categoría.

Un **diagrama** en $\mathcal{C}$ indexado en $\mathcal{J}$ es un funtor $X : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$.

Categoría $\mathcal{J}$

$$\begin{tikzcd}
 & l \arrow[loop above] \arrow[dl] & \\
j \arrow[loop left] & & k \arrow[loop right] \arrow[ul] \arrow[ll, shift right] \arrow[ll, shift left] \arrow[dl] \\
 & i \arrow[loop below] \arrow[ul, "\alpha"] &
\end{tikzcd}$$

Diagrama en $\mathcal{C}$ indexado en $\mathcal{J}$

$$\begin{tikzcd}
 & X_l \arrow[loop above] \arrow[dl] & \\
X_j \arrow[loop left] & & X_k \arrow[loop right] \arrow[ul] \arrow[ll, shift right] \arrow[ll, shift left] \arrow[dl] \\
 & X_i \arrow[loop below] \arrow[ul, "X(\alpha)"] &
\end{tikzcd}$$

Colímites

Sea X un $\mathcal{J}$-diagrama en $\mathcal{C}$.

Colímites

Sea X un $\mathcal{J}$-diagrama en $\mathcal{C}$.
$\mathrm{colim}(X)$, si existe, es un objeto de $\mathcal{C}$

Colímites

Sea X un $\mathcal{J}$-diagrama en $\mathcal{C}$.
$\mathrm{colim}(X)$, si existe, es un objeto de $\mathcal{C}$, junto con morfismos $\phi_j : X_j \to \mathrm{colim} X$ para todo $j \in \mathcal{J}$

Colímites

Sea X un $\mathcal{J}$-diagrama en $\mathcal{C}$.
$\mathrm{colim}(X)$, si existe, es un objeto de $\mathcal{C}$, junto con morfismos $\phi_j : X_j \to \mathrm{colim}X$ para todo $j \in \mathcal{J}$, de modo que

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "X(\alpha)"] \arrow[dr, bend right, "\phi_i"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X_j \arrow[dl, bend left, "\phi_j"] \\
 & \mathrm{colim}(X) &
\end{tikzcd}$$

Colímites

Sea X un $\mathcal{J}$-diagrama en $\mathcal{C}$.
$\mathrm{colim}(X)$, si existe, es un objeto de $\mathcal{C}$, junto con morfismos $\phi_j : X_j \to \mathrm{colim} X$ para todo $j \in \mathcal{J}$, de modo que

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "X(\alpha)"] \arrow[dr, bend right, swap, "\psi_i"] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X_j \arrow[dl, bend left, "\psi_j"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Colímites

Sea X un $\mathcal{J}$-diagrama en $\mathcal{C}$.
$\mathrm{colim}(X)$, si existe, es un objeto de $\mathcal{C}$, junto con morfismos $\phi_j : X_j \to \mathrm{colim} X$ para todo $j \in \mathcal{J}$, de modo que

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "X(\alpha)"] \arrow[dr, "\phi_i"'] \arrow[ddr, bend right, "\psi_i"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowright"', yshift=-4ex] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"] \arrow[ddl, bend left, "\psi_j"] \\
& \mathrm{colim}(X) & \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Colímites

Sea X un $\mathcal{J}$-diagrama en $\mathcal{C}$.
$\mathrm{colim}(X)$, si existe, es un objeto de $\mathcal{C}$, junto con morfismos $\phi_j : X_j \to \mathrm{colim}X$ para todo $j \in \mathcal{J}$, de modo que

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "X(\alpha)"] \arrow[dr, "\phi_i"'] \arrow[ddr, bend right, "\psi_i"'] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowright"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X_j \arrow[dl, "\phi_j"] \arrow[ddl, bend left, "\psi_j"] \arrow[ddl, phantom, "\circlearrowright"] \\
& \mathrm{colim}(X) \arrow[d, dotted, "\exists ! F"] & \\
& Z &
\end{tikzcd}
$$

Colímites de diagramas de espacios topológicos

Sea $X : \mathcal{J} \to \mathcal{S}$ un $\mathcal{J}$-diagrama de espacios topológicos.

Colímites de diagramas de espacios topológicos

Sea $X : \mathcal{J} \to \mathcal{S}$ un $\mathcal{J}$-diagrama de espacios topológicos.

Entonces $\mathrm{colim} X \in \mathcal{S}$ existe y es homeomorfo a

$$\left. \coprod_{j \in \mathcal{J}} X_j \middle/ \sim \right.$$

donde para cada $\alpha : i \to j$ en $\mathcal{J}$

$$\begin{aligned} X_i &\xrightarrow{X(\alpha)} X_j \\ x &\longmapsto X(\alpha)(x) \end{aligned}$$

$$x \sim X(\alpha)(x)$$

Morfismo de diagramas

Sean $X, Y : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ dos $\mathcal{J}$-diagramas en $\mathcal{C}$.

Morfismo de diagramas

Sean $X, Y : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ dos $\mathcal{J}$-diagramas en $\mathcal{C}$.

Un **morfismo de diagramas** $\varphi : X \to Y$ es

Morfismo de diagramas

Sean $X, Y : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ dos $\mathcal{J}$-diagramas en $\mathcal{C}$.

Un **morfismo de diagramas** $\varphi : X \to Y$ es una transformación natural entre los funtores X e Y.

Morfismo de diagramas

Sean $X, Y : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ dos $\mathcal{J}$-diagramas en $\mathcal{C}$.

Un **morfismo de diagramas** $\varphi : X \to Y$ es una transformación natural entre los funtores X e Y.

Es decir, una colección de morfismos $\varphi_j : X_j \to Y_j$ en $\mathcal{C}$ indexada en $\mathcal{J}$, tal que

$$\begin{tikzcd} j & & X_j \arrow[r, "\varphi_j"] & Y_j \\ i \arrow[u, "\alpha"'] & & X_i \arrow[u, "X(\alpha)"] \arrow[r, "\varphi_i"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & Y_i \arrow[u, "Y(\alpha)"'] \end{tikzcd}$$

Morfismo de diagramas

Sean $X, Y : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ dos $\mathcal{J}$-diagramas en $\mathcal{C}$.

Un **morfismo de diagramas** $\varphi : X \to Y$ es una transformación natural entre los funtores X e Y.

Es decir, una colección de morfismos $\varphi_j : X_j \to Y_j$ en $\mathcal{C}$ indexada en $\mathcal{J}$, tal que

$$
\begin{tikzcd}
j & & X_j \arrow[r, "\varphi_j"] & Y_j \\
i \arrow[u, "\alpha"'] & & X_i \arrow[u, "X(\alpha)"] \arrow[r, "\varphi_i"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & Y_i \arrow[u, "Y(\alpha)"']
\end{tikzcd}
$$

Un morfismo de diagramas $\varphi : X \to Y$ induce un morfismo $\hat{\varphi} : \mathrm{colim} X \to \mathrm{colim}\, Y$.

Problema

Sean $X, Y : \mathcal{J} \to \mathcal{S}$ dos $\mathcal{J}$-diagramas de espacios topológicos

Problema

Sean $X, Y : \mathcal{J} \to \mathcal{S}$ dos $\mathcal{J}$-diagramas de espacios topológicos y $\varphi : X \to Y$ un morfismo de diagramas.

Problema

Sean $X, Y : \mathcal{J} \to \mathcal{S}$ dos $\mathcal{J}$-diagramas de espacios topológicos y $\varphi : X \to Y$ un morfismo de diagramas.

$\varphi_j : X_j \to Y_j$ equivalencia homotópica para todo $j \in \mathcal{J}$

Problema

Sean $X, Y : \mathcal{J} \to \mathcal{S}$ dos $\mathcal{J}$-diagramas de espacios topológicos y $\varphi : X \to Y$ un morfismo de diagramas.

$\varphi_j : X_j \to Y_j$ equivalencia homotópica para todo $j \in \mathcal{J}$

$\not\Rightarrow \ \hat{\varphi} : \mathrm{colim} X \to \mathrm{colim}\, Y$ equivalencia homotópica!!!

Colímites homotópicos

Sean P un poset finito y $X : P \to \mathcal{S}$ un P-diagrama de espacios topológicos.

Colímites homotópicos

Sean P un poset finito y $X : P \to \mathcal{S}$ un P-diagrama de espacios topológicos. Entonces

$$\mathrm{hocolim} X \equiv \left. \coprod_{p \in P} X_p \times \mathcal{K}(F_p) \right/ \sim$$

Colímites homotópicos

Sean P un poset finito y $X : P \to \mathcal{S}$ un P-diagrama de espacios topológicos. Entonces

$$\mathrm{hocolim} X \equiv \left. \coprod_{p \in P} X_p \times \mathcal{K}(F_p) \middle/ \sim \right.$$

Para cada $p \leq q$ en P:

$$\begin{array}{ccc} X_p & \xrightarrow{f_{pq}} & X_q \\ x & \longmapsto & f_{pq}(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(F_p) & \xleftarrow{\imath} & \mathcal{K}(F_q) \\ \imath(\alpha) & \longleftarrow & \alpha \end{array}$$

$$(x, i(\alpha)) \quad \sim \quad (f_{pq}(x), \alpha)$$

Teorema de Thomason versión posets (1979)

Dado $X : P \to \mathcal{P}_{<\infty}$ un P-diagrama de posets finitos.

$$\mathcal{K}X : P \to \mathcal{S} \text{ es un } P\text{-diagrama de espacios topológicos,}$$
$$p \mapsto \mathcal{K}X_j, \text{ el espacio clasificante del poset } X_j.$$

Teorema de Thomason versión posets (1979)

Dado $X : P \to \mathcal{P}_{<\infty}$ un P-diagrama de posets finitos.

$\mathcal{K}X : P \to \mathcal{S}$ es un P-diagrama de espacios topológicos, $p \mapsto \mathcal{K}X_j$, el espacio clasificante del poset X_j.

Entonces

$$\mathrm{hocolim}\mathcal{K}X \simeq \mathcal{K}(P \int X)$$

donde $P \int X$ es la construcción de Grothendieck sobre X.

Teorema de Thomason versión posets (1979)

Dado $X : P \to \mathcal{P}_{<\infty}$ un P-diagrama de posets finitos.

$\mathcal{K}X : P \to \mathcal{S}$ es un P-diagrama de espacios topológicos,
$p \mapsto \mathcal{K}X_j$, el espacio clasificante del poset X_j.

Entonces

$$\mathrm{hocolim}\mathcal{K}X \simeq \mathcal{K}(P \int X)$$

donde $P \int X$ es la construcción de Grothendieck sobre X.

Vale $P \int X := \underline{\mathrm{hocolim}} X \in \mathcal{P}_{<\infty}$ (*colímite homotópico no-Hausdorff* de X).

Teorema

Sea $K : P \to \mathcal{S}$ un P-diagrama de complejos simpliciales finitos.

Teorema

Sea $K : P \to \mathcal{S}$ un P-diagrama de complejos simpliciales finitos.

$\mathcal{X}(K) : P \to \mathcal{P}_{<\infty}$ un P-diagrama de posets finitos.
$p \mapsto \mathcal{X}(K_p)$ el face poset de K_p.

Entonces,

$$\mathrm{hocolim} K \simeq \mathcal{K}(\underline{\mathsf{hocolim}} \mathcal{X}(K))$$

Métodos de reducción de colímites homotópicos

$X : P \to \mathcal{P}_\infty$ un P-diagrama de posets finitos.

Métodos de reducción de colímites homotópicos

$X : P \to \mathcal{P}_\infty$ un P-diagrama de posets finitos.

- Si $p \in P$ es tal que $\mathcal{K}(\hat{F}_p)$ es contráctil (p es un *up* γ-*point*), entonces

$$\mathcal{K}(\underline{\mathrm{hocolim}} X) \simeq \mathcal{K}(\underline{\mathrm{hocolim}} X_{|P \smallsetminus \{p\}}).$$

Métodos de reducción de colímites homotópicos

$X : P \to \mathcal{P}_\infty$ un P-diagrama de posets finitos.

- Si $p \in P$ es tal que $\mathcal{K}(\hat{F}_p)$ es contráctil (p es un *up* γ-*point*), entonces

$$\mathcal{K}(\underline{\mathrm{hocolim}} X) \simeq \mathcal{K}(\underline{\mathrm{hocolim}} X_{|P \smallsetminus \{p\}}).$$

- Si $p \in P$ es tal que $\mathcal{K}(\hat{U}_p)$ es contráctil (p es un *down* γ-*point*)

Métodos de reducción de colímites homotópicos

$X : P \to \mathcal{P}_\infty$ un P-diagrama de posets finitos.

- Si $p \in P$ es tal que $\mathcal{K}(\hat{F}_p)$ es contráctil (p es un *up* γ-*point*), entonces

$$\mathcal{K}(\underline{\text{hocolim}} X) \simeq \mathcal{K}(\underline{\text{hocolim}} X_{|P \smallsetminus \{p\}}).$$

- Si $p \in P$ es tal que $\mathcal{K}(\hat{U}_p)$ es contráctil (p es un *down* γ-*point*) y $\mathcal{K}(f_{qp}^{-1}(U_x))$ es contráctil para todo $q \leq p$ y para todo $x \in X_p$, entonces

$$\mathcal{K}(\underline{\text{hocolim}} X) \simeq \mathcal{K}(\underline{\text{hocolim}} X_{|P \smallsetminus \{p\}}).$$

Métodos de reducción de colímites homotópicos

Corolario: Sea $K : P \to \mathcal{S}$ es un P-diagrama de complejos simpliciales.
Si P se puede llevar a un punto removiendo up o down γ-points y las funciones $f_{pq} : K_p \to K_q$ son *contractible mappings* (las fibras son contráctiles), entonces

$$\mathrm{hocolim} K \simeq K_p$$

para cualquier $p \in P$.

Métodos de reducción de colímites homotópicos

Ejemplo: $K : P \to S$ es un P-diagrama de complejos simpliciales y contractible mappings.
P es un poset γ-reducible.
Entonces $\operatorname{hocolim} K \simeq K_p$ para cualquier $p \in P$.

$$\begin{tikzcd}
 & K_9 & & K_{10} & & K_{11} & \\
K_5 \arrow[ur] \arrow[urrr] & & K_6 \arrow[ul] \arrow[ur] & & K_7 \arrow[ul] \arrow[ur] & & K_8 \arrow[ulll] \arrow[ul] \\
K_1 \arrow[u] \arrow[urr] & & K_2 \arrow[ull] \arrow[urr] & & K_3 \arrow[ull] \arrow[urr] & & K_4 \arrow[ull] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$