VII Encuentro Nacional de Álgebra

Agosto 2014

Extensiones centrales triviales de Biálgebras de Lie

A. Patricia Jancsa

Biálgebras de Lie: definición

Una **biálgebra de Lie** es un triple $(\mathfrak{g}, [-,-], \delta)$ donde

$(\mathfrak{g}, [-,-])$ es un álgebra de Lie

y $\delta : \mathfrak{g} \to \Lambda^2\mathfrak{g}$ es tal que

- $\delta : \mathfrak{g} \to \Lambda^2\mathfrak{g}$ satisface la identidad de co-Jacobi,es decir

$$\mathrm{Alt}((\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta) = 0,$$

- $\delta : \mathfrak{g} \to \Lambda^2\mathfrak{g}$ es un 1-cociclo del complejo de Chevalley-Eilenberg de $(\mathfrak{g}, [-,-])$ a coeficientes en $\Lambda^2\mathfrak{g}$.

Biálgebras de Lie: definición

Una **biálgebra de Lie** es un triple $(\mathfrak{g}, [-,-], \delta)$ donde

$(\mathfrak{g}, [-,-])$ es un álgebra de Lie

y $\delta : \mathfrak{g} \to \Lambda^2\mathfrak{g}$ es tal que

- Co-Jacobi: si $\delta(x) = x_1 \wedge x_2$, entonces

$$\delta(x_1) \wedge x_2 - x_1 \wedge \delta(x_2) = 0 \in \Lambda^3\mathfrak{g}$$

- 1-cociclo:
  $\delta[x, y] = [\delta x, y] + [x, \delta y] \in \Lambda^2\mathfrak{g}.$

Biálgebras de Lie: Extensiones centrales triviales

Si $\mathfrak{g}$ es álgebra de Lie y $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \times \mathbb{K}^d$ una **extensión central trivial**:

• $\mathfrak{L}$ extensión de $\mathfrak{g}$ pues contiene al ideal $\mathbb{K}^d$ tal que $\mathfrak{L}/\mathbb{K}^d \cong \mathfrak{g}$ como álgebras de Lie,

• extensión trivial pues $\mathfrak{g}$ se identifica con una subálgebra de $\mathfrak{L}$, más aún, el corchete se calcula coordenada a coordenada,

• extensión central: $\mathbb{K}^d \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{L})$.

Pregunta:

¿se pueden describir las posibles estructuras de biálgebra de Lie en $\mathfrak{L}$ en términos de las estructuras de biálgebra en $\mathfrak{g}$?

¿Por ejemplo, se pueden deducir las estructuras de biálgebras de Lie en álgebras reductivas a partir de las semisimples?

Biálgebras de Lie: Preliminares

Si $\delta : V \to \Lambda^2 V$ verifica co-Jacobi, decimos que V es **coálgebra de Lie**.

En ese caso, V^* resulta un álgebra de Lie con

$$[\phi, \psi]_*(v) = (\phi \otimes \psi)\delta v = \phi(v_1)\psi(v_2)$$

Si $D : V \to V$, diremos que D es **coderivación** si

$$(\mathrm{id} \otimes D + D \otimes \mathrm{id})\delta = \delta D$$

o, equivalentemente, si D^* es una derivación de V^*.

Si $(\mathfrak{g}, [-,-], \delta)$ es biálgebra de Lie, denotamos

$$\mathrm{BiDer}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, [-,-]) \cap \mathrm{CoDer}(\mathfrak{g}, \delta)$$

Biálgebras de Lie: Teoremas de Extensiones

Teorema 1 Sea $(\mathfrak{g}, \delta_{\mathfrak{g}})$ una biálgebra de Lie y (V, δ_V) una coálgebra de Lie d-dimensional, V^* el álgebra de Lie dual, sea $\mathbb{D} : V^* \to \mathrm{BiDer}(\mathfrak{g})$ un morfismo de álgebras de Lie. Entonces, la fórmula siguiente define una estructura de biálgebra de Lie en $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \times V$

$$\delta(x + v) = \delta_{\mathfrak{g}}(x) + 2 \sum_{i=1}^{d} D_i(x) \wedge t_i + \delta_V(v)$$

donde $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$, $\{t_1, \ldots, t_d\}$ es una base de V, $\{t_1^*, \ldots, t_d^*\}$ es la base dual y $D_i = \mathbb{D}(t_i^*)$.

Biálgebras de Lie: Teoremas de Extensiones

Teorema 2 Sea V un espacio vectorial y $\mathfrak{g}$ un álgebra con

$$(\Lambda^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = 0, \text{ y } \mathcal{Z}\mathfrak{g} = 0$$

Si además

- o bien $\dim V = 1$,
- o bien $\dim V > 1$ y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$,

entonces **todas** las estructuras de biálgebra de Lie en $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \times V$ son como en el teorema 1.

Estos resultados se basan en un trabajo en colaboración con M. Farinati: *Trivial central extensions of Lie bialgebras*, Journal of algebra 390 (2013) 56-76.

Ejemplos de aplicaciones

Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonces

$$(\Lambda^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = 0, \;\; \mathcal{Z}\mathfrak{g} = 0, \;\; [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$$

luego, el teorema se aplica a $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \times V$ reductiva.

Ejemplos de aplicaciones

Si $\mathfrak{aff}_2$ es el álgebra de Lie no abeliana de dimension 2:

$$[h, x] = x$$

entonces

$$(\Lambda^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = 0, \ \mathcal{Z}\mathfrak{g} = 0$$

por lo tanto, el teorema se aplica a $\mathfrak{aff}_2(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}$.

Notar que $\mathfrak{aff}_2(\mathbb{K})$ es la subálgebra de Borel de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, y es no semisimple.

Ejemplos de aplicaciones

Si $\mathfrak{b}$ es una subálgebra de Borel de un álgebra semisimple entonces

$$(\Lambda^2\mathfrak{b})^{\mathfrak{b}} = 0, \ \mathcal{Z}\mathfrak{b} = 0$$

[G. Leger, E. Luks, *Cohomology theorems for Borel-like solvable Lie algebras in arbitrary characteristic*. Can. J. Math. 24, 1019-1026 (1972)]

por lo tanto el teorema se aplica a $\mathfrak{L} = \mathfrak{b} \times \mathbb{K}$.

Observación: las buenas hipótesis valen también en álgebras no semisimples, por ejemplos en las álgebras de Borel.

Recordamos

- $(\mathfrak{g}, \delta_{\mathfrak{g}})$ biálgebra de Lie,
- (V, δ_V) coálgebra de Lie d-dimensional,
- $\mathbb{D} : V^* \to \mathrm{BiDer}(\mathfrak{g})$ morfismo de álgebras de Lie,

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \times V$$

entonces

$$\delta(x + v) = \delta_{\mathfrak{g}}(x) + 2 \sum_{i=1}^{d} D_i(x) \wedge t_i + \delta_V(v)$$

es una estructura de biálgebra de Lie en $\mathfrak{L}$.

$\boxed{\textbf{Necesitamos conocer } \mathrm{BiDer}(\mathfrak{g})}$

BiDerivaciones: La biderivación característica

Si $(\mathfrak{g}, [-,-], \delta)$ es una biálgebra de Lie, consideremos

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\delta"'] \arrow[rr, bend left, "\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}=[-,-]\circ\delta"] & \Lambda^2\mathfrak{g} \arrow[r, "{[-,-]}"'] & \mathfrak{g} \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto [x_1, x_2]$$

Proposición $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}} \in \mathrm{BiDer}(\mathfrak{g})$

BiDerivaciones: Resultados generales

Proposición

$(\mathfrak{g}, [-,-], \delta)$ *biálgebra de Lie:*

- $E \in \mathrm{BiDer}(\mathfrak{g}) \Rightarrow [\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}, E] = 0$ *(naturalidad).*
- $E = \mathrm{ad}_{x_0} \in \mathrm{BiDer}(\mathfrak{g}) \iff \delta x_0 \in (\Lambda^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

  En particular, si $(\Lambda^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = 0$, *entonces*

  $$\mathrm{InDer}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{CoDer}(\mathfrak{g}) \cong \ker\delta / (\mathcal{Z}\mathfrak{g} \cap \ker\delta)$$

- $\mathfrak{g}$ *de* **coborde***:* $\exists r = r_1 \wedge r_2 \in \Lambda^2\mathfrak{g}$ *tal que* $\delta(x) = \mathrm{ad}_x(r)$, *entonces*

  $$\mathcal{D}_{\mathfrak{g}} = -\mathrm{ad}_{H_r}$$

  donde $H_r := [-,-](r) = [r_1, r_2] \in \mathfrak{g}$.

BiDerivaciones: Resultados generales

Corolarios

1. *Si* $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}} = \mathrm{ad}_{H_0}$ *para cierto* $H_0 \in \mathfrak{g}$, *entonces*
   - $E \in \mathrm{BiDer} \Rightarrow E(H_0) \in \mathcal{Z}\mathfrak{g}$.
   - *Si* $E = \mathrm{ad}_x \in \mathrm{BiDer} \Rightarrow [x, H_0] \in \mathcal{Z}\mathfrak{g}$
   - *Si* $\mathcal{Z}\mathfrak{g} = 0$ *y* $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{BiDer} \Rightarrow x$ *conmuta con* H_0.
2. *Sea* $(\mathfrak{g}, \delta)$ *una biálgebra de Lie tal que*
   - *toda derivación es interior*
   - $\mathcal{Z}\mathfrak{g} = 0$ *y* $(\Lambda^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = 0$,

   entonces

$$\boxed{\mathrm{BiDer}(\mathfrak{g}, \delta) \cong \ker \delta \subseteq \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(H_0)}$$

Ejemplos

- Si $\mathfrak{g}$ es semisimple y δ es una estructura de biálgebra de Lie en $\mathfrak{g}$, entonces $\mathrm{BiDer}(\mathfrak{g},\delta) \cong \ker\delta$.
- Si $\mathfrak{b}$ es una subálgebra de Borel de una semisimple entonces
  $\mathrm{Der}(\mathfrak{b}) = \mathrm{InnDer}(\mathfrak{b})$, $\mathcal{Z}\mathfrak{b} = 0$ y $(\Lambda^2\mathfrak{b})^{\mathfrak{b}} = 0$, por lo tanto

$$\mathrm{BiDer}(\mathfrak{b},\delta) \cong \ker\delta$$

Ejemplo $\mathfrak{aff}_2(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}$

$$\mathfrak{aff}_2(\mathbb{K}) = \mathbb{K}h \oplus \mathbb{K}x, \ \ \mathfrak{aff}_2(\mathbb{K}) \times \mathbb{K} = \mathbb{K}h \oplus \mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}t$$

$$[h, x] = x$$

Todos los posibles cocorchetes en $\mathfrak{aff}_2(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}$

$i)$	$\delta(x) =$	0	$\delta(h) =$	$h \wedge x$ $+x \wedge t$	$\delta(t) = 0$
$ii)$	$\delta(x) =$	0	$\delta(h) =$	$h \wedge x$	$\delta(t) = 0$
$iii)$	$\delta(x) =$	$\mu h \wedge x \ (\mu \neq 0)$ $+x \wedge t$	$\delta(h) =$	0	$\delta(t) = 0$
$iv)$	$\delta(x) =$	$\mu h \wedge x \ (\mu \neq 0)$	$\delta(h) =$	0	$\delta(t) = 0$
$v)$	$\delta(x) =$	$D(x) \wedge t$ $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{aff}_2)$	$\delta(h) =$	$D(h) \wedge t,$	$\delta(t) = 0$

Ejemplo $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}t$

La lista exhaustiva de las clases de isomorfismo de estructura de biálgebra en $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}t$ es

a) $\delta_{\mathfrak{sl}_2} \neq 0$:
   1. (triangular) $r = \pm h \wedge x$, o $r = \pm(h \wedge x + x \wedge t)$.
   2. (factorizable) $r = \beta x \wedge y$ o $r = \beta(x \wedge y + h \wedge t)$, $\beta \in \mathbb{R}_+$,
   3. (casi factorizable) $r = \alpha h \wedge (x + y)$ o
      $r = \alpha(h \wedge (x + y) + (x - y) \wedge t)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) $\delta_{\mathfrak{sl}_2} = 0$ (todas triangulares), $r = 0$ o:
   1. $r = x \wedge t$
      $(\mathrm{ad}_x = D$ nilpotente)
   2. $r = h \wedge t$
      $(\mathrm{ad}_h = D$ semisimple diagonalizable)
   3. $r = (x - y) \wedge t$
      ($u = x - y$, $\mathrm{ad}_u = D$ semisimple no-diagonalizable)

El teorema de Belavin y Drinfeld

Teorema (Belavin - Drinfeld)

Si $(\mathfrak{g}, \delta)$ *es factorizable y s.s.* $\mathbb{C}$*, existe una subálgebra de Cartan* $\mathfrak{h}$*, un sistema de raíces simples* Δ*, un BD-triple* $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ *y un parámetro continuo* $r_0 \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ *tal que* $\delta(x) = \mathrm{ad}_x(r)$*, con* r *dado por*

$$r = r_{st} + \sum_{\alpha \prec \beta} x_{-\alpha} \wedge x_\beta + \lambda$$

donde $r_{st} = \sum_{\alpha \in \Phi^+} x_{-\alpha} \wedge x_\alpha + \Omega$,
$\lambda \in \Lambda^2 \mathfrak{h}$ *es tal que* $r_0 = \lambda + \Omega_0$,

El teorema de Belavin y Drinfeld

BD-triple: es una isometría $\tau : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ con $\Gamma_i \subset \Delta$ con la propiedad de nilpotencia: $\forall \alpha \in \Gamma_1 \ \exists n_0 \geq 1 : \tau^{n_0}(\alpha) \notin \Gamma_1$.

Parámetro continuo $r_0 \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$:
es una solución del sistema de ecuaciones (lineales!)

$$(\tau(\alpha) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \alpha) r_0 = 0 \ \forall \alpha \in \Gamma_1$$

con $r_0 + r_0^{21} = \Omega_0$, la componente $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ del Casimir.

BiDerivaciones: Aplicación a (casi) factorizables

Teorema (Andruskiewitsch - Jancsa)

Si $\mathfrak{g}$ es s.s. (real o compleja) y $(\mathfrak{g}, r)$ es (casi) factorizable, entonces $H_r := [-,-](r)$ es un elemento regular, luego, $\mathfrak{h} := \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(H_r)$, es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Corolarios

1. *La subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ del teorema de Belavin y Drinfeld esta unívocamente determinada por r.*
2. *Toda biderivación de una semisimple (casi) factorizable $(\mathfrak{g}, r)$ es de la forma ad_H con $H \in \mathfrak{h} = \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(H_r)$. En particular, $\mathrm{BiDer}(\mathfrak{g}, \delta)$ es una subálgebra abeliana.*

Aplicación a (casi) factorizables

Teorema

$\mathfrak{g}$ s.s., $V = \mathbb{K}^d$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \times V$. Si $\delta : \mathfrak{L} \to \Lambda^2 \mathfrak{L}$ es una estructura de biálgebra de Lie en $\mathfrak{L}$ tal que $\delta_{\mathfrak{g}}$ es (casi) factorizable (i.e. $\delta_g = \mathrm{ad}_r$ y r de Belavin-Drinfeld), entonces $\exists \{t_1, \ldots, t_d\}$ base de V, $H_1, \ldots H_{d_0} \in \mathfrak{h}$ l.i. satisfaciendo

$$\alpha(H_i) = \tau\alpha(H_i) \; \forall \alpha \in \Gamma_1, \; i = 1, \ldots, d_0 \leq d$$

($\iff$ $H_i \in \ker \delta_{\mathfrak{g}}$) tal que, si $x \in \mathfrak{g}$,

$$\delta(x) = \delta_{\mathfrak{g}}(x) + \sum_{i=1}^{d_0} [H_i, x] \wedge t_i = \mathrm{ad}_x \left(r - \sum_{i=1}^{d_0} H_i \wedge t_i \right),$$

$\delta_V : V \to \Lambda^2 V$ coálgebra de Lie en V : $\delta_V t_i = 0$, $0 \leq i \leq d_0$.

¡Gracias!