Extensiones de Categorías tensoriales

Adriana Mejía Castaño
Universidad Nacional de San Luis - Argentina
Elena - 2014

POR QUÉ ESTUDIAR CATEGORÍAS TENSORIALES??

* Variedades topológicas de baja dimensión

* Computación cuántica

*Teoría racional y logarítmica de campos

* Mecánica estadística

* Teoría de subfactores

* Álgebras de Hecke afínes

* Teoría de álgebras de Hopf

*......

Álgebras de Hopf

H es un *álgebra de Hopf* si
* H un álgebra

$$m : H \otimes H \to H, u : \mathbf{k} \to H$$

* H una coálgebra

$$\Delta : H \to H \otimes H, \epsilon : H \to \mathbf{k}$$

* Antípoda $S : H \to H$

$$+\{...\}$$

H álgebra de Hopf.

Comod(H) es la categoría tensorial donde:

* Objetos: espacios vectoriales V dotados de

$$\rho : V \to V \otimes H$$

tal que

$$(id \otimes \Delta)\rho = (\rho \otimes id)\rho, \quad (id \otimes \epsilon)\rho = \otimes 1$$

* Morfismos: $f : V \to W$ transf lineal tq

$$(f \otimes id)\rho_M = \rho_N \otimes f$$

* $\otimes$ = producto tensorial $\otimes_{\mathbf{k}}$ con coacción inducida por Δ

* 1 = cuerpo $\mathbf{k}$ con coacción inducida por ϵ

* dual = duales de espacios vectoriales con coacción inducida por la antípoda

Suma directa

$C = Comod(H) \oplus Comod(H)$ es la categoría tensorial donde

* Objetos: pares (V, W) donde $V, W \in Comod(H)$

* Morfismos: $(f_1, f_2) : (V_1, W_1) \to (V_2, W_2)$ tal que
$f_i : V_i \to W_i \in Comod(H)$

* Producto tensorial
$(V, \mathbf{k}) \otimes (W, \mathbf{k}) = (V \otimes W, \mathbf{k})$
$(V, \mathbf{k}) \otimes (\mathbf{k}, W) = (\mathbf{k}, V \otimes W)$
$(\mathbf{k}, V) \otimes (W, \mathbf{k}) = (\mathbf{k}, V \otimes W)$
$(\mathbf{k}, V) \otimes (\mathbf{k}, W) = (V \otimes W, \mathbf{k})$

* $1 = (\mathbf{k}, \mathbf{k})$

* asociatividad trivial

* C es una C_2-graduación

* C es una C_2-extensión de Comod(H)

* C es un C_2-producto cruzado con sistema trivial

es necesario el sistema trivial ???

F grupo finito Abeliano, $u \in F$ de orden 2 y V un F-módulo con $u \cdot v = -v$ si $v \in V$.

Como álgebra $\mathcal{A}(V, u, F)$ está generada por $v \in V, g \in F$

$$vw + wv = 0, \quad gv = (g \cdot v)g, \text{ si } v, w \in V, g \in F.$$

Coproducto y antípoda

$$\Delta(v) = v \otimes 1 + u \otimes v, \quad \Delta(g) = g \otimes g, \quad \mathcal{S}(v) = -uv, \quad \mathcal{S}(g) = g^{-1}.$$

$V = \langle \{v_1, v_2\} \rangle$ espacio vectorial de dimensión dos,
$F = C_2 =< u >$.

$$\mathcal{C}_0(1, \mathrm{id}, \pm 1) = Comod(\mathcal{A}(V, u, C_2)) \oplus Comod(\mathcal{A}(V, u, C_2))$$

$V, W, Z \in Comod(\mathcal{A}(V, u, C_2))$ y $g \in \mathcal{C}_2$.

Producto tensorial

$$[V, 1][W, g] = [V \otimes W, g], [V, u][W, g] = [V \otimes \mathbf{U}_0 \square_H W, ug],$$

Duales

$$[V, 1]^* = [V^*, 1], [\mathbf{1}, u]^* = [\mathbf{k}, u],$$

Asociatividad

$$\alpha_{[V,u],[W,u],[Z,u]} = [\pm(\mathrm{id}_{V \otimes \mathbf{U}_0 \square W} \otimes \epsilon\varphi \otimes \mathrm{id}_Z)(\mathrm{id}_V \otimes \xi^u_{W, \mathbf{U}_0 \square Z}), u].$$

Quien es U_0:

Sea $H = \mathcal{A}(V, u, C_2)$

* Es un H-comódulo a izq y der:

Definir $T : V \to V$

$$T(v_1) = v_1, \quad T(v_2) = -v_2.$$

Como álgebra está generada por $(T(v), v), e_g$ con $v \in V, g \in F$

$$e_g e_h = e_{gh},$$
$$e_g(T(v), v) = (T(g \cdot v), g \cdot v)e_g,$$
$$(T(v), v)(T(w), w) + (T(w), w)(T(v), v) = 0,$$

Coacción izquierda y derecha

$$\lambda(T(w), w) = T(w) \otimes 1 + u \otimes (T(w), w),$$

$$\lambda(e_f) = f \otimes e_f, \quad \rho(e_f) = e_f \otimes f,$$

$$\rho(T(w), w) = e_u \otimes w + (T(w), w) \otimes 1,$$

* $+ \{......\}$

Quien es $U_0 \square_H W$

* U_0 es un objeto de la categoría Comod(H)

* $U_0 \square_H W$ es un subespacio relevante de $U_0 \otimes W$ llamado producto cotensorial

1) $\xi^{u}_{W,\mathbf{U}_0\Box Z} : U_0\Box(W\otimes U_0\Box Z) \to (U_0\Box W)\otimes(U_0\Box U_0\Box Z)$

es un isomorfismo de comódulos álgebras tal que su inversa satisface

$$(a,b)\otimes(c,d,e) \mapsto (ac,b,d,e)$$

2) $\varphi : U_0\Box_H U_0 \simeq H$ tal que su inversa satisface

$$v \mapsto (TT(v),Tv)\otimes 1 + e_u\otimes(Tv,v)$$

$$e_g \mapsto e_g\otimes e_g$$

Bibliografía

[MM] A. Mejia Castaño, M. Mombelli, Crossed extension of the corepresentation category of finite supergroup algebras. Enviado.