Retículos en grupos de Lie casi abelianos

Marcos Origlia

7 de Agosto de 2014
La Falda

Universidad Nacional de Córdoba – CIEM (CONICET)

Trabajo conjunto con Adrián Andrada

Contenido

Preliminares

Dada M una variedad diferenciable consideramos:

- una estructura compleja J es un endomorfismo $J_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ tal que $J_p^2 = -\operatorname{Id}$ y $J[X, Y] = J[JX, JY] + [JX, Y] + [X, JY]$ para todo $p \in M$.
- una métrica hermitiana g en (M, J) es una métrica tal que $g(X, Y) = g(JX, JY)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
- J y g determinan una 2-forma dada por $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$, llamada la forma de Kähler.
- (M^{2n}, J, g) es una variedad de Kähler si ω satisface $d\omega = 0$.

Localmente conforme Kähler

Una variedad localmente conforme Kähler (LCK) es una variedad hermitiana (M, J, g) donde ω satisface

$$d\omega = \theta \wedge \omega$$

para alguna 1-forma cerrada θ.
θ se llama la forma de Lee y está unívocamente determinada por

$$\theta = -\frac{1}{n-1}(\delta\omega) \circ J.$$

Las variedades de Hopf:
$CH_\lambda^n = (\mathbb{C}^n - \{0\})/\triangle_\lambda$, donde $\triangle_\lambda$ es el grupo cíclico generado por las transformaciones $z \mapsto \lambda z$ de $\mathbb{C}^n - \{0\}$ y $\lambda \neq 0$ con $|\lambda| \neq 1$.
CH_λ^n es difeomorfa a $S^1 \times S^{2n-1}$. CH_λ^n son LCK y no son Kähler.

Estructuras LCK invariantes a izquierda

Sea grupo de Lie G y (J, g) una estructura hermitiana:

- g inv. a izquierda $g(u, v)_x = g((dL_y)_x u, (dL_y)_x v)_{L_y(x)}$
- J inv. a izquierda $J \circ dL_x = dL_x \circ J$
- (G, J, g) es LCK inv. a izquierda si existe una 1-forma cerrada θ en G tal que $d\omega = \theta \wedge \omega$.

$\rightsquigarrow$ ω y $\theta = -\frac{1}{n-1}(\delta\omega) \circ J$ resultan formas inv. a izquierda.

$$\downarrow$$

LCK en álgebras de Lie

$(\mathfrak{g}, J, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ es LCK si $d\omega = \theta \wedge \omega$ con $\theta \in \mathfrak{g}^*$ y $d\theta = 0$.

Idea

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con una estructura LCK se pude levantar a una estructura LCK invariante a izquierda en el grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{g}$.

Dado un grupo de Lie G, $\Gamma \subset G$ se dice retículo si Γ es un subgrupo discreto co-compacto, es decir, $\Gamma \backslash G$ es una variedad compacta.

Una estructura LCK invariante a izquierda en G induce una estructura LCK en la variedad $\Gamma \backslash G$.

Cuando G es nilpotente o soluble, $\Gamma \backslash G$ se llama nilvariedad o solvariedad respectivamente.

Un grupo de Lie se dice casi-abeliano si su álgebra de Lie tiene un ideal abeliano de codimensión uno. Es decir, $\mathrm{Lie}(G) = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^n$.

Problemas

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$
$\rightsquigarrow$ admite una estructura LCK?

Sea G el grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{g}$
$\rightsquigarrow$ admite retículos?

- Ugarte (2007) demostró que una nilvariedad $\Gamma\backslash G$ de dimensión 6 con una estructura compleja invariante admite una métrica LCK si y sólo si $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h}_5 \times \mathbb{R}$.
- Sawai (2007) demostró que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente con una estructura LCK entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfo a $\mathfrak{h}_{2n-1} \times \mathbb{R}$.
- Hasegawa y Kamishima (2011) dieron una clasificación de todas las álgebras de Lie de dimensión 4, unimodulares y solubles; y los grupos de Lie correspondientes que admiten lattices. Más aún, determinaron cuáles admiten métricas LCK.

Proposición (Milnor-1976)

Si un grupo de Lie admite retículos entonces es unimodular, i.e. $\operatorname{tr}\operatorname{ad}_X = 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{g}$.

Para los nilpotentes hay un criterio simple.

Teorema (Malcev)

Si G *es un grupo de Lie simplemente conexo, existe un retículo si y sólo* $\mathfrak{g}$ *tiene una base donde las constantes de estructura son racionales.*

Para los casi-abelianos

Proposición (Bock-2009)

Sea $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi \mathbb{R}^n$ *un grupo de Lie casi-abeliano. Entonces* G *admite un retículo si y sólo si existe* $t_0 \neq 0$ *tal que* $\phi(t_0)$ *pude ser conjugada a una matriz con coeficientes enteros.*

LCK en casi-abelianos

Teorema (Andrada,-)

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie unimodular y casi-abeliana de dimensión $2(n+1)$ con una estructura hermitiana $(J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$.

- *Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente entonces $(J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ es LCK sii $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$.*
- *Si $\mathfrak{g}$ no es nilpotente, entonces $(J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ es LCK sii $\mathfrak{g}$ se descompone como $\mathfrak{g} = \mathbb{R}f_1 \ltimes \mathbb{R}^n$ y la acción de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ esta dada por*

$$\mathrm{ad}_{f_1}|_{\mathbb{R}^{2n+1}} = \left(\begin{array}{c|c} \mu & \\ \hline & -\frac{\mu}{2n}I + B \end{array}\right),$$

para algún $\mu \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathfrak{u}(n)$.

Retículos en casi-abelianos

Tenemos un grupo de Lie casi-abeliano $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi \mathbb{R}^n$ donde

$$\phi(t) = e^{t\,\mathrm{ad}_{f_1}} = \left(\begin{array}{c|c} e^{t\mu} & \\ \hline & e^{-\frac{t\mu}{2n}} e^{tB} \end{array}\right).$$

Los autovalores son $e^{t\mu}$ y $e^{-\frac{t\mu}{2n} \pm i\eta}$ para $\eta \in \mathbb{R}$.

Teorema

Si G es como arriba con $\mu \neq 0$ y $\dim G \geq 6$, i.e. $n > 1$, entonces G no admite retículos.

Lema

Sea p un polinomio de la forma $p(x) = x^{2n+1} - m_{2n}x^{2n} + m_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + m_1 x - 1$ con $m_j \in \mathbb{Z}$ y $n > 1$. Sean $x_0, \ldots, x_{2n}$ las raíces de p, donde $x_0 \in \mathbb{R}$ es una raíz simple, $x_1 = \cdots = x_k \in \mathbb{R}$ y $x_{k+1}, \ldots, x_{2n} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Si $|x_1| = \cdots = |x_{2n}|$, entonces $x_0 = 1$.

$\dim = 4$

- Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$, los retículos de H_3 se conocen.
- Si no, $\mathfrak{g} = \mathbb{R}f_1 \ltimes \mathbb{R}^3$ donde la acción es

$$\left(\begin{array}{c|cc} \mu & & \\ \hline & -\frac{\mu}{2} & -y \\ & y & -\frac{\mu}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & -\frac{1}{2} & -\frac{y}{\mu} \\ & \frac{y}{\mu} & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Denotamos esta álgebra de Lie por $\mathfrak{g}_b$ para $b = \frac{y}{\mu}$. Hay una correspondencia entre $\{b : G_b \text{ admite retículos}\}$ y $\{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : f_{m,n}(x) =$
$x^3 - mx^2 + nx - 1, \text{ con raíces } c \in \mathbb{R}, \alpha, \overline{\alpha} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}\}$.

Si c, α y $\overline{\alpha}$ son las raices de $f(x)$, con $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$, entonces para $b = \frac{\phi + 2k\pi}{\log c}$ tenemos que G_b admite retículos.

Para (m, n) en la siguiente región hay retículos

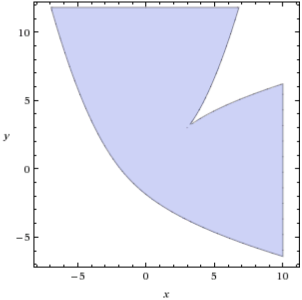

Figure : Discriminant < 0

LCS en casi-abelianos

Una estructura localmente conforme simplectica (LCS) en un álgebra de Lie es una 2-forma no degenerada ω tal que $d\omega = \theta \wedge \omega$ para alguna 1-forma cerrada $\theta \in \mathfrak{g}^*$.

Teorema (Andrada,-)

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie unimodular y casi-abeliana de dimensión ≥ 6 con una estructura LCS. Entonces $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^n$ donde la acción es

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \mu & w^t \\ \hline 0 & -\frac{\mu}{2n} I + B \end{array} \right),$$

con $B \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$.

En dimensión 4 tenemos:

Lie algebra	Lie brackets	LCS form	Retículos
$\mathbb{R}^4$	$[\cdot,\cdot]=0$	$\omega = e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4$	✓
$\mathfrak{h}_3\times\mathbb{R}$	$[e_1,e_2]=e_3$	$\omega = e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4$	✓
$\mathfrak{n}_4$	$[e_1,e_2]=e_3$, $[e_1,e_3]=e_4$	$\omega = e^1\wedge e^3 + e^2\wedge e^4$	✓
$\mathfrak{r}_{3,-1}\times\mathbb{R}$	$[e_1,e_2]=e_2$, $[e_1,e_3]=-e_3$	$\omega = e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4$	✓
$\mathfrak{r}_{4,\lambda,-(1+\lambda)}$ $(\lambda\geq 1)$	$[e_1,e_2]=e_2$, $[e_1,e_3]=\lambda e_3$, $[e_1,e_4]=-(1+\lambda)e_4$	$\omega = e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4$	numerables $\lambda>1$
$\mathfrak{r}_{4,-1/2}$	$[e_1,e_2]=e_2$, $[e_1,e_3]=e_2+e_3$, $[e_1,e_4]=-2e_4$	$\omega = e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4$	×
$\mathfrak{r}'_{3,0}\times\mathbb{R}$	$[e_1,e_3]=e_4$, $[e_1,e_4]=-e_3$	$\omega = e^1\wedge e^3 + e^2\wedge e^4$	✓
$\mathfrak{r}'_{4,\lambda,-\lambda/2}$ $(\lambda>0)$	$[e_1,e_2]=\lambda e_2$, $[e_1,e_3]=-\frac{\lambda}{2}e_3-e_4$, $[e_1,e_4]=e_3-\frac{\lambda}{2}e_4$	$\omega = e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4$	numerables $\lambda>0$

Retículos en dim ≥ 6???