Grafos Asociados a las dimensiones de Frobenius-Perron de una Categoría de Fusión

(Trabajo conjunto con Sonia Natale)

Edwin Fernando Pacheco Rodríguez

Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

VII Encuentro Nacional de Álgebra
Agosto 4 al 8 de 2014
La Falda, Sierras de Córdoba

Trabajaremos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica cero.
Sea n un número natural. La notación $\pi(n)$ indicará el conjunto de divisores primos de n. Si X es un conjunto de enteros positivos, denotaremos con $\pi(X)$ al conjunto de los números primos p tales que p divide a un elemento de X.

Trabajaremos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica cero.
Sea n un número natural. La notación $\pi(n)$ indicará el conjunto de divisores primos de n. Si X es un conjunto de enteros positivos, denotaremos con $\pi(X)$ al conjunto de los números primos p tales que p divide a un elemento de X.

Definición

Sea S un conjunto de enteros positivos.
El grafo primo $\Delta(S)$ y el grafo común divisor $\Gamma(S)$ son los grafos (no-orientados) definidos de la siguiente forma:

Trabajaremos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica cero.
Sea n un número natural. La notación $\pi(n)$ indicará el conjunto de divisores primos de n. Si X es un conjunto de enteros positivos, denotaremos con $\pi(X)$ al conjunto de los números primos p tales que p divide a un elemento de X.

Definición

Sea S un conjunto de enteros positivos.
El grafo primo $\Delta(S)$ y el grafo común divisor $\Gamma(S)$ son los grafos (no-orientados) definidos de la siguiente forma:
El grafo $\Delta(S)$ tiene como conjunto de vértices al conjunto $\pi(S)$. Dos vértices p y q están unidos por una arista si y solo si existe $a \in S$ tal que pq divide a.

Trabajaremos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica cero.
Sea n un número natural. La notación $\pi(n)$ indicará el conjunto de divisores primos de n. Si X es un conjunto de enteros positivos, denotaremos con $\pi(X)$ al conjunto de los números primos p tales que p divide a un elemento de X.

Definición

Sea S un conjunto de enteros positivos.
El grafo primo $\Delta(S)$ y el grafo común divisor $\Gamma(S)$ son los grafos (no-orientados) definidos de la siguiente forma:
El grafo $\Delta(S)$ tiene como conjunto de vértices al conjunto $\pi(S)$. Dos vértices p y q están unidos por una arista si y solo si existe $a \in S$ tal que pq divide a.
El grafo $\Gamma(S)$ tiene como conjunto de vértices al conjunto $S - \{1\}$. Dos vértices a y b están unidos por una arista si y solo si a y b no son coprimos.

Remark

El número de componentes conexas de $\Gamma(S)$ es igual al número de componentes conexas de $\Delta(S)$.

Consideremos un grafo $\mathcal{G}$ y sean x, y dos vértices unidos por una arista. Denotaremos por $d(x, y)$ la distancia entre x e y.

Sea G un grupo finito.

Sea G un grupo finito.

Sea $\mathrm{cd}(G)$ el conjunto de las dimensiones de los carácteres irreducibles de G, es decir,

$$\mathrm{cd}(G) = \{\chi(1) : \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$$

Consideremos el grafo primo sobre el conjunto $\mathrm{cd}(G)$. Usaremos la notación $\Delta(G)$ para este grafo.

Sea G un grupo finito.

Sea $\mathrm{cd}(G)$ el conjunto de las dimensiones de los carácteres irreducibles de G, es decir,

$$\mathrm{cd}(G) = \{\chi(1) : \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$$

Consideremos el grafo primo sobre el conjunto $\mathrm{cd}(G)$. Usaremos la notación $\Delta(G)$ para este grafo.

Teorema (Manz, Staszewski and Willems, Manz and Manz, Willems and Wolf)

Sea G un grupo finito. Entonces se tiene lo siguiente:

(i) *El grafo $\Delta(G)$ tiene a lo sumo tres componentes conexas.*

Supongamos que el grupo G es soluble. Entonces tenemos:

(ii) *El grafo $\Delta(G)$ posee a lo más dos componentes conexas.*

(iii) *Si $\Delta(G)$ es conexo, entonces su diámetro es a lo sumo 3.*

La prueba de (i) usa la clasificación de los grupos finitos simples.

Sea $\mathrm{cs}(G)$ el conjunto

$$\mathrm{cs}(G) = \{|C| : C \text{ es una clase de conjugación de } G\}.$$

El grafo primo sobre el conjunto $\mathrm{cs}(G)$ se denotará por $\Delta'(G)$

Sea $\text{cs}(G)$ el conjunto

$$\text{cs}(G) = \{|C| : C \text{ es una clase de conjugación de } G\}.$$

El grafo primo sobre el conjunto $\text{cs}(G)$ se denotará por $\Delta'(G)$

Teorema (Bertram, Herzog and Mann, Kazarin, Casolo and Dolfi and Alfandary)

Sea G un grupo finito. Entonces se tiene lo siguiente:

(i) *El grafo $\Delta'(G)$ tiene a lo sumo dos componentes conexas.*

(ii) *El grafo $\Delta'(G)$ tiene dos componentes conexas si y solo si G es un grupo quasi-Frobenius con complemento abeliano y kernel. En este caso, cada componente conexa es un grafo completo.*

(iii) *Si el grupo G no es soluble, entonces el grafo $\Delta'(G)$ es conexo y su diámetro es a lo más dos.*

(iv) *Si el grafo $\Delta'(G)$ es conexo, entonces su diámetro es a lo sumo tres.*

Los grafos común divisor sobre los conjuntos $\mathrm{cd}(G)$ y $\mathrm{cs}(G)$ serán denotados por $\Gamma(G)$ y $\Gamma'(G)$ respectivamente.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión íntegra.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión íntegra. Por analogía con la notación estándar en la teoría de grupos finitos, denotaremos por $\mathrm{cd}(\mathcal{C})$ al conjunto

$$\mathrm{cd}(\mathcal{C}) = \{\mathrm{FPdim}\, X : X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})\}.$$

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión íntegra. Por analogía con la notación estándar en la teoría de grupos finitos, denotaremos por $\mathrm{cd}(\mathcal{C})$ al conjunto

$$\mathrm{cd}(\mathcal{C}) = \{\mathrm{FPdim}\, X : X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})\}.$$

Definición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión íntegra. El grafo primo $\Delta(\mathcal{C})$ y el grafo común divisor $\Gamma(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ son, respectivamente, el grafo primo y el grafo común divisor sobre el conjunto $\mathrm{cd}(\mathcal{C}) - \{1\}$.

llamaremos a $\Delta(\mathcal{C})$ y a $\Gamma(\mathcal{C})$ los grafos de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$.

Ejemplo

1. *Sea G un grupo finito. Cuando $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} G$ es la categoría de representaciones de dimensión finita de G, los grafos de Frobenius-Perron $\Delta(\mathcal{C})$ y $\Gamma(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ coinciden con los grafos $\Delta(G)$ y $\Gamma(G)$.*

Ejemplo

1. *Sea G un grupo finito. Cuando $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} G$ es la categoría de representaciones de dimensión finita de G, los grafos de Frobenius-Perron $\Delta(\mathcal{C})$ y $\Gamma(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ coinciden con los grafos $\Delta(G)$ y $\Gamma(G)$.*

Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es llamada *trenzada* si esta posee un isomorfismo natural, llamado una *trenza*,

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X, \quad X, Y \in \mathcal{C},$$

sujeto a los axiomas del hexágono.

Una categoría de fusión trenzada $\mathcal{C}$ es llamada *simétrica* si $c_{Y,X} c_{X,Y} = \mathrm{id}_{X \otimes Y}$, para todos los objetos $X, Y \in \mathcal{C}$. Una categoría de fusión simétrica $\mathcal{C}$ se dice *Tannakiana* si $\mathcal{C} \cong \operatorname{Rep} G$ como categorías de fusión trenzada, para algún grupo finito G.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada.

Dos objetos simples X e Y de $\mathcal{C}$ se dicen que se *se centralizan el uno al otro* si $c_{Y,X}c_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$.

El *centro de Müger* de una subcategoría de fusión $\mathcal{D}$, indicado por $\mathcal{D}'$, es la subcategoría de fusión plena generada por todos los objetos $X \in \mathcal{C}$ tales que $c_{Y,X}c_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$, para todos los objetos $Y \in \mathcal{D}$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada.

Dos objetos simples X e Y de $\mathcal{C}$ se dicen que se *se centralizan el uno al otro* si $c_{Y,X}c_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$.

El *centro de Müger* de una subcategoría de fusión $\mathcal{D}$, indicado por $\mathcal{D}'$, es la subcategoría de fusión plena generada por todos los objetos $X \in \mathcal{C}$ tales que $c_{Y,X}c_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$, para todos los objetos $Y \in \mathcal{D}$.

Si $\mathcal{C}' \cong \mathrm{Vec}$, entonces $\mathcal{C}$ es llamada *no-degenerada*.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada.

Dos objetos simples X e Y de $\mathcal{C}$ se dicen que se *se centralizan el uno al otro* si $c_{Y,X}c_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$.

El *centro de Müger* de una subcategoría de fusión $\mathcal{D}$, indicado por $\mathcal{D}'$, es la subcategoría de fusión plena generada por todos los objetos $X \in \mathcal{C}$ tales que $c_{Y,X}c_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$, para todos los objetos $Y \in \mathcal{D}$.

Si $\mathcal{C}' \cong \mathrm{Vec}$, entonces $\mathcal{C}$ es llamada *no-degenerada*.

Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es llamada de tipo grupo si es Morita equivalente a una categoría de fusión punteada. Cada categoría de fusión de tipo grupo es íntegra.

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión íntegra, trenzada, no-degenerada. Entonces tenemos:

(i) *El grafo $\Delta(\mathcal{C})$ posee a lo más tres componentes conexas.*

(ii) *Supongamos que $\mathcal{C}$ es soluble. Entonces el grafo $\Delta(\mathcal{C})$ posee a lo más dos componentes conexas.*

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión íntegra, trenzada, no-degenerada. Entonces tenemos:

(i) *El grafo $\Delta(\mathcal{C})$ posee a lo más tres componentes conexas.*

(ii) *Supongamos que $\mathcal{C}$ es soluble. Entonces el grafo $\Delta(\mathcal{C})$ posee a lo más dos componentes conexas.*

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada de tipo grupo. Entonces se tiene:

(i) *El grafo $\Delta(\mathcal{C})$ posee a lo más tres componentes conexas.*

(ii) *Si $\mathcal{C}$ es no-degenerada, entonces el grafo $\Delta(\mathcal{C})$ tiene a lo más dos componentes conexas y su diámetro es a lo sumo 3.*

Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es *débilmente de tipo grupo* si es Morita equivalente a una categoría de fusión nilpotente.

Por otro lado, $\mathcal{C}$ es *soluble* si es Morita equivalente a una categoría de fusión ciclicamente nilpotente.

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ *una categoría de fusión trenzada tal que* $\operatorname{FPdim}\mathcal{C} \in \mathbb{Z}$ *y sean* $p_1, \ldots, p_r$ *números primos. Supongamos que las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples de* $\mathcal{C}$ *es una potencia de* p_i*, para* $1 \leq i \leq r$*. Entonces* $\mathcal{C}$ *es débilmente de tipo grupo.*
Asumamos además que una de las siguientes condiciones se satisface:

(a) $r \leq 2$, *o*

(b) $p_i > 7$, *para todo* $i = 1, \ldots, r$.

Entonces $\mathcal{C}$ *es soluble.*

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión íntegra y sea G un grupo soluble no abeliano finito. Entonces el grafo $\Delta(\mathcal{C}^G)$ posee a lo sumo dos componentes conexas.

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión íntegra y sea G un grupo soluble no abeliano finito. Entonces el grafo $\Delta(\mathcal{C}^G)$ posee a lo sumo dos componentes conexas.

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión íntegra y sea G un grupo finito no abeliano. Entonces el grafo $\Delta(\mathcal{C}^G)$ tiene a lo sumo tres componentes conexas.

Sea G un grupo finito.
Supongamos que $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión punteada, esta categoría es equivalente a la categoría $\mathcal{C}(A,\omega)$, es decir, $\mathcal{C}$ es la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita graduados por un grupo finito A con asociatividad inducida por ω.

Sea G un grupo finito.
Supongamos que $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión punteada, esta categoría es equivalente a la categoría $\mathcal{C}(A, \omega)$, es decir, $\mathcal{C}$ es la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita graduados por un grupo finito A con asociatividad inducida por ω.

Teorema

El grafo $\Gamma(\mathcal{C}(A, \omega)^G)$ posee a lo sumo 3 ccomponentes conexas.

Esto implica que el grafo $\Delta(\mathcal{C}(A, \omega)^G)$ también posee a lo más 3 componentes conexas.

Proposición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada, íntegra, no-degenerada y asumamos que cada subcategoría Tannakiana de $\mathcal{C}$ es punteada. Entonces el grafo $\Gamma(\mathcal{C})$ es conexo.

Sea G un grupo finito y sea ω un 3-cociclo sobre G. Consideremos el *doble torcido cuántico* $D^\omega(G)$ de G. Los grafos de Frobenius-Perron de la categoría $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} D^\omega(G)$ se indicarán por $\Delta(D^\omega(G))$, $\Gamma(D^\omega(G))$.

Para el grafo primo de la categoría de representaciones del doble torcido cuántico obtuvimos el siguiente resultado:

Sea G un grupo finito y sea ω un 3-cociclo sobre G. Consideremos el *doble torcido cuántico* $D^{\omega}(G)$ de G. Los grafos de Frobenius-Perron de la categoría $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} D^{\omega}(G)$ se indicarán por $\Delta(D^{\omega}(G))$, $\Gamma(D^{\omega}(G))$.

Para el grafo primo de la categoría de representaciones del doble torcido cuántico obtuvimos el siguiente resultado:

Teorema

Sea G un grupo finito y sea ω un 3-cociclo en G. Entonces el grafo $\Delta(D^{\omega}(G))$ posee a lo más dos componentes conexas y su diámetro es a lo más 3.

Sea G un grupo finito y sea ω un 3-cociclo sobre G. Consideremos el *doble torcido cuántico* $D^\omega(G)$ de G. Los grafos de Frobenius-Perron de la categoría $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} D^\omega(G)$ se indicarán por $\Delta(D^\omega(G))$, $\Gamma(D^\omega(G))$.

Para el grafo primo de la categoría de representaciones del doble torcido cuántico obtuvimos el siguiente resultado:

Teorema

Sea G un grupo finito y sea ω un 3-cociclo en G. Entonces el grafo $\Delta(D^\omega(G))$ posee a lo más dos componentes conexas y su diámetro es a lo más 3.

Se obtuvieron caracterizaciones para los cuales $\Delta(D^\omega(G))$ no es conexo (En este caso G es un grupo quasi-Frobenius con complemento abeliano y kernel)

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión íntegra, trenzada, no-degenerada. Entonces tenemos:

(i) *El grafo $\Delta(\mathcal{C})$ posee a lo más tres componentes conexas.*

(ii) *Supongamos que $\mathcal{C}$ es soluble. Entonces el grafo $\Delta(\mathcal{C})$ posee a lo más dos componentes conexas.*

Demostración

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada, íntegra, no-degenerada. Si cada subcategoría Tannakiana de $\mathcal{C}$ es punteada, entonces $\Gamma(\mathcal{C})$ y por lo tanto $\Delta(\mathcal{C})$, son conexos.

Demostración

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada, íntegra, no-degenerada. Si cada subcategoría Tannakiana de $\mathcal{C}$ es punteada, entonces $\Gamma(\mathcal{C})$ y por lo tanto $\Delta(\mathcal{C})$, son conexos.

Asumamos que $\mathcal{C}$ contiene una subcategoría Tannakiana $\mathcal{E} \cong \operatorname{Rep} G$, donde G es un grupo finito no abeliano. Entonces la categoría $\mathcal{C}$ es una equivariantización $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}^G$, donde $\mathcal{D} = \mathcal{C}_G$ es la categoría de fusión trenzada G-cruzada asociada. Sigue que el grafo $\Delta(\mathcal{C}^G)$ posee a lo sumo tres componentes conexas. Esto prueba (i).

Demostración

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada, íntegra, no-degenerada. Si cada subcategoría Tannakiana de $\mathcal{C}$ es punteada, entonces $\Gamma(\mathcal{C})$ y por lo tanto $\Delta(\mathcal{C})$, son conexos.

Asumamos que $\mathcal{C}$ contiene una subcategoría Tannakiana $\mathcal{E} \cong \operatorname{Rep} G$, donde G es un grupo finito no abeliano. Entonces la categoría $\mathcal{C}$ es una equivariantización $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}^G$, donde $\mathcal{D} = \mathcal{C}_G$ es la categoría de fusión trenzada G-cruzada asociada. Sigue que el grafo $\Delta(\mathcal{C}^G)$ posee a lo sumo tres componentes conexas. Esto prueba (i).

Mas aún, si $\mathcal{C}$ es soluble, entonces el grupo G es soluble también. Entonces el grafo $\Delta(\mathcal{C})$ posee a lo sumo dos componentes conexas. Esto prueba (ii). $\square$

S. Natale y E. Pacheco Rodríguez, *Graphs attached to simple Frobenius-Perron dimensions of integral fusion category*, preprint arXiv:1403.1247 (2014).

¡Gracias por su atención!