Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Física General IV: Óptica

Práctico de Laboratorio N^{ro} 1

1: Ondas en una Cuerda Elástica

1 Objetivo:

Estudiar el movimiento oscilatorio transversal en un medio elástico. Determinar longitud de onda y nodos en una onda estacionaria para diferentes condiciones de contorno. Calcular la velocidad de propagación de un pulso en una cuerda.

2 Introducción:

La ecuación general para ondas que se propagan en una dimensión con velocidad v es:

$$\frac{\partial \psi^2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial \psi^2}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Es fácil verificar como ejercicio que la solución que se comporta como una onda "viajera", propagándose en la dirección positiva del eje x, es de la forma $\Psi(x; t) = f(x - vt)$; donde v es la velocidad de propagación del pulso cuyo perfil está descripto por la función f. Dado que en general cualquier función en un intervalo finito puede escribirse como una combinación lineal de funciones periódicas, es importante estudiar los perfiles armónicos, es decir los representados por funciones senos o cosenos.

$$\psi(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi) \qquad (2)$$

Aquí, *A* representa la amplitud del movimiento oscilatorio, ϕ la fase inicial del movimiento y por lo anteriormente dicho tenemos que:

$$\boxed{v = \omega/k} \qquad (3)$$

Para reconocer que rol cumplen las constantes ω y *k* imaginemos los siguientes experimentos. En primer lugar, fijemos un observador en una dada coordenada x_0 y midamos cuanto tiempo debe transcurrir hasta que dicho observador vuelve a encontrar el mismo valor para la perturbación Ψ. Dado que estamos trabajando con una función seno, este tiempo resulta igual a $\tau = 2\pi/\omega$. Este valor se conoce como período de la oscilación. En consecuencia, ω es la frecuencia angular y $\nu = 1/\tau = \omega/2\pi$ es la frecuencia o frecuencia temporal del movimiento y representa el número de oscilaciones completas por unidad de tiempo que realiza el movimiento ondulatorio periódico en un punto cualquiera del espacio. La unidad en la que se mide la frecuencia resulta entonces el ciclo por segundo o Hertz (Hz).

Como segundo experimento mental, congelemos el movimiento en un dado instante t_0 y midamos la distancia entre dos puntos sobre el eje x para los cuales toma el mismo valor. Nuevamente, dado que trabajamos con una función sinusoidal obtenemos que dicha distancia es $\lambda = 2\pi/k$ y se conoce como longitud de onda. Así, resulta que *k* es el número de onda y mide el número de oscilaciones completas por unidad de longitud. De lo expresado en la Ec. (3), obtenemos la relación que vincula

a v, λ, ν: $$\boxed{v = \lambda\nu} \qquad (4)$$

Si se superponen ondas la función resultante es la suma de las correspondientes funciones de onda. Este principio de superposición da lugar a la existencia de ondas estacionarias. A tal fin, supongamos que tenemos dos ondas armónicas en fase y de igual amplitud pero viajando en sentidos opuestos:

$$\psi_1 = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \qquad \psi_2 = A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t) \qquad (5)$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{sen}\,\beta = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad (6)$$

resulta de forma inmediata que:

$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = 2A\;\mathrm{sen}(kx)\;\cos(\omega t) \qquad (7)$$

Tenemos de esta manera que la onda resultante tiene un patrón espacial estacionario descripto por el primer factor del último miembro de la Ec. (7), el cual “parpadea" en el tiempo modulado por el segundo factor de la Ec. (7). Este parpadeo temporal se produce con frecuencia $\nu = \omega/2\pi$.

3.- La Cuerda Elástica:

Deseamos estudiar ahora las oscilaciones transversales en una cuerda elástica tensa de longitud L. La función de onda Ψ(x; t) describe en este caso el apartamiento perpendicular respecto de la posición de equilibrio de cada elemento de la cuerda (rotulado por la coordenada x) en función del tiempo. Asumimos que las oscilaciones de la cuerda están confinadas en un plano. Para las ondas estacionarias en la cuerda tenemos que solo algunos valores de *k* son compatibles con las condiciones de contorno que se escojan para los extremos de la cuerda:

3.1 Ambos extremos fijos

Si ambos extremos están fijos (cuerda atada), las condiciones en el contorno pueden escribirse de la siguiente manera: $\Psi(x = 0; t) = 0$ y $\Psi(x = L; t) = 0$. La primera de estas condiciones queda satisfecha de forma automática por la Ec. (7) dado que habíamos elegido una función seno para el perfil de las ondas viajeras. La segunda condición impone por otro lado que *sen(kL) = 0*. De lo cual tenemos que los posibles valores de *k* son:

$$k = \frac{\pi}{L}\, n\,, \qquad n = 1, 2, \ldots\ . \tag{8}$$

Por lo tanto los posibles valores de λ resultan:

$$\lambda = \frac{2L}{n}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

y a partir de la Ec. (4) tenemos que las posibles frecuencias de oscilaciones estacionarias son:

$$\nu = \frac{v}{2L}\, n\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Las sucesivas frecuencias resultan así múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (n = 1). Es importante notar que en las oscilaciones estacionarias armónicas (n fijo), también conocidas como modos normales de oscilación, los puntos de la cuerda cuyas coordenadas son:

$$x = \frac{m}{n}\, L\,, \qquad (m = 1, \ldots, n-1) \tag{11}$$

permanecen en reposo durante las oscilaciones (además de los extremos). Estos puntos se conocen como nodos de la oscilación.

3.2 Un extremo fijo y uno libre

Si un solo extremo está fijo y el otro se encuentra libre, las condiciones de contorno pueden escribirse según: $\psi(x = 0; t) = 0$ y $\left.\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$ (12)

Esta última condición impone ahora que *cos(kL)* = 0. De lo cual tenemos que los posibles valores de *k* son en este caso

$$k = \frac{\pi}{2L}\,(2n-1)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

y los correspondientes valores de λ resultan:

$$\lambda = \frac{4L}{2n-1}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Las posibles frecuencias de oscilaciones estacionarias,

$$\nu = \frac{v}{4L}\,(2n-1)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

resultan ahora múltiplos impares de la frecuencia fundamental.

Ejercicios (para realizar antes de entrar al laboratorio):

1) Calcular las posiciones de los nodos en los modos normales de oscilación de la cuerda con un extremo libre.

2) Graficar los patrones espaciales de los cuatro primeros modos normales para la cuerda con:

a) ambos extremos fijos,

b) un solo extremo fijo.

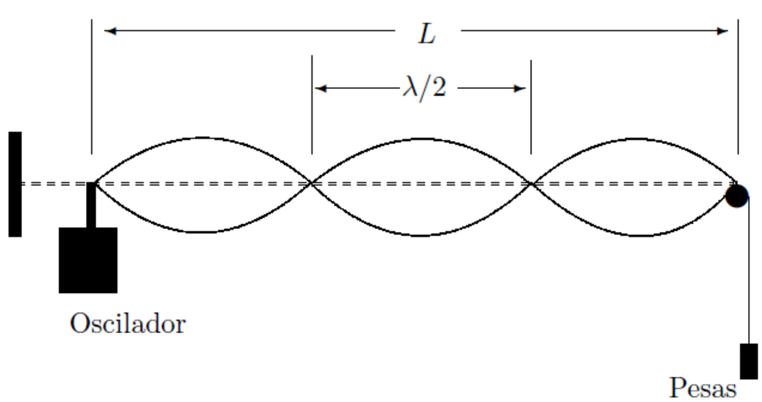
Por último, para cada medio elástico existe una relación constitutiva que vincula la velocidad de propagación con las características del medio en cuestión. Para una cuerda elástica, en particular, puede demostrarse que:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}} \tag{16}$$

donde T es la tensión a la que está sometida la cuerda en reposo y μ es la densidad lineal de masa.

4 Desarrollo Experimental:

En la Figura de describe esquemáticamente el dispositivo experimental con el que se trabaja para el caso de la cuerda fija en ambos extremos. La longitud de la cuerda L se mide desde el punto en el cual esta fija al oscilador y hasta el punto de contacto con la polea en el otro extremo.



El oscilador es de frecuencia variable ν y la tensión T de la cuerda es regulada mediante las pesas que se cuelgan del extremo libre. Es importante evaluar adecuadamente las apreciaciones con las cuales pueden determinarse ν y T.

Experiencia 1: Tensar la cuerda de aproximadamente 1; 5m de longitud con una valor próximo a T = 2; 5 N. Barrer en frecuencia ν para encontrar los sucesivos modos normales de oscilación. Contar para cada caso el número de nodos m obtenido y así calcular el orden n = m + 1 del correspondiente modo normal. A partir de las Ec. (10) y (16) se tiene que

$$\nu^2 = \frac{T}{4L^2\mu}\,n^2 \qquad (17)$$

Realizar un ajuste lineal de esta relación para calcular la densidad de masa μ de la cuerda.

Experiencia 2: Fijar un valor de frecuencia próximo a ν = 10 Hz. Variar la tensión T para encontrar los sucesivos modos normales de oscilación y contar nuevamente para cada caso el número de nodos m obtenido. A partir de la Ec.(17), realizar un ajuste lineal para calcular la densidad de masa μ de la cuerda.

Experiencia 3: Para simular la condición de contorno libre, atar la cuerda a un trozo de alambre rígido de unos 25 cm de longitud y trabajar con 90 cm de cuerda tensada aproximadamente a 2,5 N. Barrer en frecuencia ν para encontrar los sucesivos modos normales de oscilación. A partir de un adecuado ajuste lineal calcular la densidad de masa μ de la cuerda.

Experiencia 4: Montar la cuerda entre dos sensores de fuerza digitales, utilizando una tensión menor a 10 N. Punzar la cuerda en un extremo muy próximo a uno de los sensores y medir el tiempo que tarda el pulso en llegar al otro extremo de la cuerda. Calcular así la velocidad de propagación del pulso.

Experiencia 5: Retirar la cuerda y proceder a la determinación de la densidad de masa μ por medio de una cinta métrica y una balanza de precisión. Evaluar cómo cambia la densidad de masa con la tensión a la que es sometida la cuerda. Comparar el valor obtenido con el de las experiencias anteriores. Calcular utilizando la Ec. (16) la velocidad de propagación bajo la tensión utilizada en la experiencia inmediata anterior. Comparar los valores obtenidos en ambas experiencias identificando en cada caso la fuente principal de incerteza.

Bibliografía:

[1] U. Ingard y W. L. Kraushaar, Introducción al Estudio de la Mecánica, Materia y Ondas, Reverté, Barcelona (1973); Cap. 23.

[2] J. S. Fernández y E. E. Galloni, Trabajos Prácticos de Física, La Línea Recta, Buenos Aires (1963); Cap. IV.