

# Electromagnetismo I

Anglada – Dain – Paz – Ramirez

Guía 6 – 4 de mayo de 2012

**Tema:** Electroestática: problemas con condiciones de contorno generales. Expansiones multipolares.

**Problema 1:** Considere dos cáscaras esféricas conductoras concéntricas de radios  $a$  y  $b$ , (con  $a > b$ ). La cáscara interior está a potencial cero y el potencial de la cáscara exterior está dado por la siguiente función

$$V(\theta, \phi) = V_0 \sin \theta \cos \phi ,$$

donde  $V_0$  es una constante y  $\theta, \phi$  son coordenadas esféricas. Encuentre el potencial en todo el espacio.

**Problema 2:** Una cáscara hueca de radio  $R$  tiene un potencial  $V(\theta, \phi)$  especificado en su superficie. Probar la equivalencia de estas dos formas del potencial en el interior de la cáscara:

$$\Phi = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \frac{V(\theta', \phi')}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{1/2}} d\Omega'$$

donde  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$ ; y

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \phi) ,$$

donde  $A_{lm} = \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \phi') V(\theta', \phi')$ .

**Problema 3:** Considere un cilindro de radio  $a$  y longitud  $L$ . La tapa superior del cilindro está a potencial  $V(r, \varphi)$  (en coordenadas polares en la tapa) y el resto del cilindro a potencial cero. Encuentre el potencial en el interior del cilindro.

**Problema 4:** Resuelva el problema 1 usando la función de Green apropiada y verifique que se obtiene la misma solución.

**Problema 5:** Considere una cáscara conductora esférica hueca de radio  $b$  mantenida a potencial cero, en cuyo interior se ubica un anillo circular concéntrico de radio  $a$  (con  $a < b$ ) con carga uniforme  $Q$ . Determine el potencial en el interior de la cáscara utilizando la función de Green.

**Problema 6:** En una región  $V$  del espacio libre de cargas y corrientes se mantiene un campo electrostático  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$  cuyas componentes cartesianas están dadas por

$$E_j = C_j + \sum_{k=1}^3 D_{jk} x_k , \quad j = 1, 2, 3 ,$$

en términos de la posición  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ .

a) Muestre que la matriz  $\mathbb{D} = (D_{jk})$  es simétrica y tiene traza nula.

En  $V$  se coloca una esfera conductora de radio  $R$  y sin carga neta cuyo centro coincide con el origen del sistema cartesiano. La polarización de la esfera en el campo externo  $\mathbf{E}$  se describe por un dipolo  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$  y los momentos cuadrupolares cartesianos  $\mathbb{Q} = (Q_{jk})$ . No hay multipolos de orden mayor.

b) Determine el potencial inducido por la esfera polarizada para  $|\mathbf{x}| \geq R$  en términos del dipolo y  $\mathbb{Q}$ .

c) ¿Cual es el campo eléctrico dentro de la esfera ?

d) Determine  $\mathbf{p}$  y  $\mathbb{Q}$  en términos de  $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3)$ ,  $\mathbb{D}$  y el radio. Calcule el campo eléctrico fuera de la esfera.

e) ¿Cual es la densidad de carga superficial en la esfera ?

**Problema 7:** Tomando derivadas de la función  $1/r$  demuestre que la siguiente serie de funciones son soluciones de la ecuación de Laplace para  $r \neq 0$

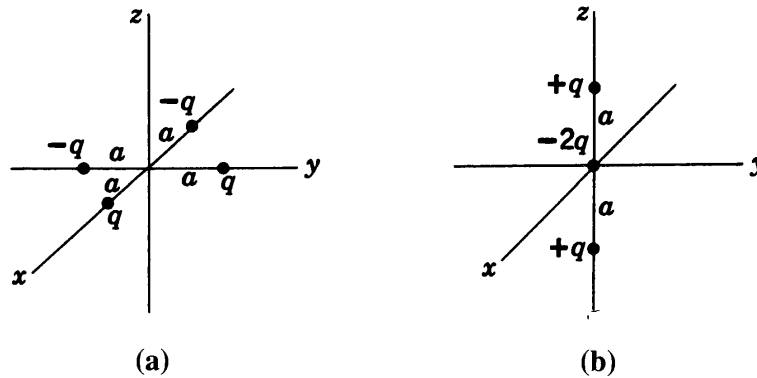
$$\frac{x_i}{r^3}, \quad \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_j x_i}{r^5}, \tag{1}$$

$$\frac{3x_k \delta_{ij}}{r^5} - \frac{3x_j \delta_{ik}}{r^5} - \frac{3x_i \delta_{kj}}{r^5} + \frac{15x_j x_i x_k}{r^7}. \tag{2}$$

Calcule la función siguiente en esta serie.

Relacione este resultado con la expansión multipolar del potencial en electrostática.

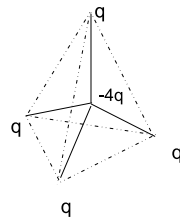
**Problema 8:** Calcule los momentos multipolares  $q_{lm}$  de las siguientes distribuciones de carga. Trate de obtener resultados para los momentos no nulos para todo  $l$ , pero en todos los casos encuentre al menos los dos primeros momentos no nulos.



c) Para la distribución de cargas b) escriba la expansión multipolar del potencial. Manteniendo sólo los términos de menor orden en esta expansión, grafique el potencial en el plano  $x - y$  como función de la distancia al origen para distancias mayores que  $a$ .

d) Calcule directamente de la ley de Coulomb el potencial exacto para b) en el plano  $x - y$ . Dibújelo como función de la distancia y compare con el resultado encontrado en c).

Explicite la forma asintótica en las partes c) y d) para ver con más claridad el potencial a distancias grandes.



**Problema 9:** Considere el siguiente modelo estático para una molécula de metano  $CH_4$ . El carbono (carga  $-4q$ ) ocupa el centro de un tetraedro regular cuyos vértices son los cuatro hidrógenos (carga  $q$  cada uno). Muestre que el campo eléctrico a distancias  $r$  del carbono grandes es de orden  $\mathcal{O}(r^{-5})$ .

*Ayuda:* Los puntos  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, \frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ ,  $(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$  y  $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$  son vértices de un tetraedro regular con centro en el origen de un sistema de coordenadas cartesiano.

**Problema 10:** Un dipolo puntual de momento  $p$  está ubicado en el punto  $x_0$ . De las propiedades de las derivadas de la delta de Dirac demuestre que para los cálculos del potencial  $\Phi$  del dipolo o de la energía de un dipolo en un campo externo, el dipolo puede ser descrito como la densidad de carga efectiva dada por

$$\rho_{efe}(x) = -p \dot{\nabla} \delta(x - x_0). \quad (3)$$

**Problema 11:** a) Probar el siguiente teorema: para una distribución arbitraria  $\rho(x)$  los valores de los  $(2l + 1)$  momentos del primer momento multipolar no nulo son independientes del origen de coordenadas, pero los valores de los momentos multipolares de órdenes más altos son dependientes del origen de coordenadas. (Nota: los distintos  $q_{lm}$  para  $l$  fijo dependen, por supuesto, de la orientación de los ejes).

b) Una distribución de cargas tiene momentos multipolares  $q, p, Q_{ij}, \dots$  con respecto a un sistema de coordenadas y momentos  $q', p', Q'_{ij}, \dots$  con respecto a otro que tiene ejes paralelos al primero pero cuyo origen está ubicado

en el punto  $R = (X, Y, Z)$  relativo al primero. Determine explícitamente las relaciones entre el monopolo, el dipolo y el cuadrupolo en los dos sistemas de coordenadas.

c) Si  $q \neq 0$ , ¿podemos encontrar  $R$  tal que  $p' = 0$ ? Si  $q \neq 0$ ,  $p \neq 0$  (o, sólo  $p \neq 0$ ), ¿podemos encontrar  $R$  tal que  $Q'_{ij} = 0$ ?

**Problema 12:** Una densidad de carga localizada  $\rho(x, y, z)$  se ubica en un campo electrostático externo descrito por un potencial  $\Phi^{(0)}(x, y, z)$ . El potencial varía poco en la región donde la densidad de carga es diferente de cero.

a) Calcule, de primeros principios, la fuerza total que actúa sobre la densidad de carga como una expansión en momentos multipolares multiplicada por derivadas del campo eléctrico. Muestre que la fuerza está dada por

$$F = qE^{(0)}(0) + \left\{ \nabla(p \cdot E^{(0)}(x)) \right\}_0 + \left\{ \nabla \frac{1}{6} \sum_{j,k} Q_{jk} \frac{\partial E_j^{(0)}(x)}{\partial x_k} \right\}_0 \dots \quad (4)$$

Compare esta expansión con la expansión de la energía  $W$  en momentos multipolares. Notar que la expansión de la energía es un número, no una función de  $x$  que puede ser diferenciada. ¿Cuál es la conexión con  $F$ ?

b) Repita el cálculo de la parte a) para el torque total. Por simplicidad evalúe sólo una componente Cartesiana del torque, digamos  $N_1$ . Muestre que esta componente está dada por

$$N_1 = \left[ p \times E^{(0)} \right]_1 + \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \sum_j Q_{2j} E_j^{(0)} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \sum_j Q_{3j} E_j^{(0)} \right) \right]_0 \dots \quad (5)$$

**Problema 13:** Un núcleo con momento cuadrupolar  $Q$  está ubicado en un campo eléctrico con simetría cilíndrica con gradiente  $(\partial E_z / \partial z)_0$  a lo largo del eje  $z$  en la posición del núcleo.

Muestre que la energía de la interacción cuadrupolar es

$$W = -\frac{e}{4} Q \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_0 \quad (6)$$

**Problema 14:** Una distribución localizada de cargas tiene la siguiente densidad de carga

$$\rho(r) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2 \theta. \quad (7)$$

a) Realice una expansión multipolar del potencial debida a esta densidad de carga y calcule todos los momentos multipolares no nulos. Escriba el potencial a distancias grandes como una expansión finita de polinomios de Legendre.

b) Determine el potencial explícitamente en todo punto del espacio y demuestre que cerca del origen está dado por

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos \theta) \right]. \quad (8)$$

**Problema 15:** Un plano delgado infinito conductor tiene un orificio circular de radio  $a$ . En ese orificio hay un disco conductor delgado que está aislado del plano por una capa aislante muy delgada. El disco está a potencial  $V$  y el resto del plano a potencial cero.

a) Utilizando coordenadas cilíndricas y separación de variables encuentre una expresión integral en términos de funciones de Bessel para el potencial en todo punto del espacio sobre el plano.

b) Muestre que el potencial en el eje del disco a una distancia  $z$  está dado por

$$\Phi(\rho, \phi, z) = V(1 - z(a^2 + z^2)^{-1/2}). \quad (9)$$

Comparar con el problema 1 de la guía 4.

c) Demuestre que el potencial a distancia  $z$  del borde del disco es

$$\Phi_a(z) = \frac{V}{2} \left( 1 - \frac{kz}{\pi a} K(k) \right) \quad (10)$$

donde  $k = 2a/(z^2 + 4a^2)^{1/2}$  y  $K(k)$  es la integral elíptica completa de primera clase.

**Problema 16:** Un disco conductor delgado y plano de radio  $R$  está situado en el plano  $xy$  con su centro en el origen y mantenido a potencial fijo  $V$ . Sabiendo que la densidad de carga en dicho disco a potencial fijo es proporcional a  $(R^2 - \rho^2)^{-1/2}$ , siendo  $\rho$  la distancia medida desde el centro al disco.

a) Demuestre que para  $r > R$  el potencial está dado por

$$\Phi = \frac{2V R}{\pi r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l} P_{2l}(\cos \theta). \quad (11)$$

b) Encuentre la capacidad del disco.

**Ayuda:**

$$\int_0^1 \frac{x^{2l+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2^l l!}{(2l+1)!!} \quad (12)$$

$$P_{2l}(0) = \frac{(-1)^l (2l-1)!!}{2^l l!}, \quad P_{2l+1}(0) = 0. \quad (13)$$

**Problema 17:** Considere un disco conductor delgado y plano de radio  $R$  con carga total  $Q$ . Encuentre la distribución superficial de carga sobre el disco.