Ejercicio 1.

(a) A es invertible <u>sii</u> A es equivalente por filas con la identidad 3x3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & 2 & z \\ z & i & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3 \mapsto F_3 - zF_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & 2 & z \\ 0 & \boxed{i - z^2} & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to \frac{1}{i-z^2} F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E_1 $\qquad$ 1ra Condición $i - z^2 \neq 0$ $\qquad$ E_2

$$\underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & z \end{pmatrix} \underset{F_3 \mapsto F_3 - 2F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{z} \end{pmatrix} \underset{F_3 \to \frac{1}{z} F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E_3 $\qquad$ E_4 $\qquad$ 2da Condición $z \neq 0$ $\qquad$ E_5

$$\underset{F_1 \to F_1 - zF_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E_6.

A es inverible para los ~~z~~ $z \neq 0$, $z \neq \sqrt{i}$, $z \neq -\sqrt{i}$.

Recordar que $\sqrt{i} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

(b) Debemos escribir las matrices elementales correspondientes a las operaciones elementales realizadas en (a) con $z = 1+i$.

$$A^{-1} = E_6 \cdot E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -(1+i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{1-i}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pues $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(1+i) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pues $\frac{1}{i-(1+i)^2} = \frac{-1}{i}$

Ejercicio 2

(a) Consideremos la matriz aumentada del sistema. Las condiciones sobre a, b y c aparecerán al escalonar tal matriz

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u & v & x & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & a \\ -1 & 2 & -1 & 2 & b \\ 1 & 0 & 5 & 6 & c \end{array}\right) \end{array} \underset{\substack{F_2 \mapsto F_2 + F_1 \\ F_3 \mapsto F_3 - F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 & 4 & b+a \\ 0 & 1 & 2 & 4 & c-a \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \mapsto F_3 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 & 4 & b+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{c-a-b-a} \end{array}\right) \underset{F_1 \mapsto F_1 + F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 & b+2a \\ 0 & 1 & 2 & 4 & b+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-b-2a \end{array}\right)$$

1ra Condición.

$$c-b-2a = 0$$

DEBE

Luego los (a, b, c) t.q. el sistema tiene solución son aquellos para los cuales $\boxed{c = 2a+b}$

(b) Claramente el punto $a=1, b=-1$ y $c=1$ cumple la condición dada en (a) $(c=2a+b)$

De lo hecho en (a) vemos que las variables x e y son libres mientras que u y v son dependientes:

Las soluciones para $(1,-1,1)$ están dadas por.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u & v & x & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \text{ es decir } \begin{array}{l} u = 1-5x-6y \\ v = -2x-4y. \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5x-6y \\ -2x-4y \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

(c) El sistema no tiene puntos para los cuales la solución sea única pues el sistema homogeneo tiene infinitas soluciones (tiene más incognitas que ecuaciones el sistema homogéneo; ver Teorema

Ejercicio 3.

(a) Verdadera. Demostración.

Sea A matriz $n \times m$ con inversa a derecha $C_{m \times n}$ e inversa a izquierda $B_{m \times n}$. Veamos que $m=n$.

$$B_{m \times n} = B_{m \times n} \cdot Id_n = B_{m \times n} \cdot (A_{n \times m} \cdot C_{m \times n})$$

$$= (B_{m \times n} \cdot A_{n \times m}) \cdot C_{m \times n} = Id_m \cdot C_{m \times n} = C_{m \times n}.$$

Luego $B = C$, y así $B \cdot A = Id_m$, $A \cdot B = Id_n$.

Ahora bien. Sabemos que, en general, $tr(MN) = tr(NM)$ siempre y cuando los productos MN y NM tengan sentido.

Luego $\underset{\underset{m}{\parallel}}{tr(BA)} = \underset{\underset{n}{\parallel}}{tr(A \cdot B)}$, esto era lo que queríamos probar.

(b) Falso. Contraejemplo.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para cualquier b $Ax=b$ tiene solución.

y el sistema $Ax=0$ <u>solo</u> tiene la solución trivial.

(c) Verdadero. Demostración.

Por hipótesis el problema $Ax=b$ tiene solución; denotemos a esta por x_p, $\underline{Ax_p = b}$.

Ahora bien; el sistema homogeneo $Ax=0$ tiene infinitas soluciones pues $n<m$; es decir, tiene mas incognitas que ecuaciones. Si $W = \{x \text{ t.q. } Ax=0\}$, W es un conjunto infinito.

Como, para cualquier $y \in W$, $x_p + y$ es solución al problema $Ax=b$; pues $A(x_p+y) = Ax_p + Ay = b + 0 = b$.

Luego, $Ax=b$ tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 4.

Demostración

Sea $W \subseteq \mathbb{R}^2$ un subespacio distinto de $\{0\}$ y de $\mathbb{R}^2$.

Como $W \neq \{0\}$; existe $(a,b) \in W$, $(a,b) \neq 0$. Veamos que

$$W = \{t(a,b) / t \in \mathbb{R}\}.$$

Dado que $\{t(a,b) / t \in \mathbb{R}\} \subseteq W$, debemos ver que $W \subseteq \{t(a,b) / t \in \mathbb{R}\}$; es decir que todo $(c,d) \in W$ es un múltiplo de (a,b).

Razonemos por el absurdo, supongamos que existe $(c,d) \in W$ que no es un múltiplo escalar de (a,b). es decir, (c,d) está fuera de la línea recta generada por (a,b).

Intuitivamente, en este caso, W debería ser $\mathbb{R}^2$ y así tendríamos un absurdo; pues por hipótesis $W \neq \mathbb{R}^2$.

Luego, para tener un absurdo; veamos que todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es combinación lineal de (a,b) y (c,d) o lo que es lo mismo, que el sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & x \\ b & d & y \end{array}\right)$$

tiene solución para todo (x,y).

Como queremos escalonar la matriz, debemos buscar un pivote, así tenemos dos casos:

Caso 1, $a=0$.

Caso 1, $a=0$

Si $a=0$, entonces b DEBE ser diferente de cero, pues en otro caso tendriamos que $(a,b)=(0,0)$, pero $(a,b)\neq(0,0)$ Así pues.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & x \\ b & d & y \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & c & x \\ b & d & y \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to\frac{1}{b}F_2 \\ \text{pues } b\neq 0}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & c & x \\ 1 & d/b & y/b \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1\leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & d/b & y/b \\ 0 & c & x \end{array}\right)$$

Ahora bien. c tambien debe ser diferente de cero, pues en otro caso tendriamos que el segundo punto es de la forma $(0,d)$ el cual, claramente es un múltiplo de $(a,b)=(0,b)$. Así pues

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & d/b & y/b \\ 0 & c & x \end{array}\right) \underset{F_2\to\frac{1}{c}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & d/b & y/b \\ 0 & 1 & x/c \end{array}\right) \underset{F_1\to F_1-\frac{d}{b}F_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y/b-(d/b)(x/c) \\ 0 & 1 & x/c \end{array}\right)$$

En este caso, todo (x,y) es combinación lineal de (a,b) y (c,d), lo cual es un absurdo.

Caso 2, $a \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & x \\ b & d & y \end{array}\right) \underset{F_1 \to \frac{1}{a}F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & c/a & x/a \\ b & d & y \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - bF_1}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & c/a & x/a \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & y-\frac{bx}{a} \end{array}\right)$$

Ahora bien. $d-\frac{bc}{a}$ debe ser diferente de cero, pues en otro caso (c,d), el otro punto, es de la forma $(c,d) = (c, \frac{bc}{a}) \underset{a \neq 0}{=} (\frac{ac}{a}, \frac{bc}{a}) = \frac{c}{a}(a,b)$

lo cual es un absurdo pues (c,d) no es múltiplo de (a,b).

Así pues, llamemos Δ el número $d-\frac{bc}{a}$, así:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & c/a & x/a \\ 0 & \Delta & y-\frac{bx}{a} \end{array}\right) \underset{F_2 \to \frac{1}{\Delta}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & c/a & x/a \\ 0 & 1 & \frac{1}{\Delta}(y-\frac{bx}{a}) \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - \frac{c}{a}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x}{a} - \frac{c}{a\Delta}(y-\frac{bx}{a}) \\ 0 & 1 & \frac{1}{\Delta}(y-\frac{bx}{a}) \end{array}\right)$$

y en este caso también tenemos que para todo (x,y) en $\mathbb{R}^2$, el sistema planteado tiene solución, y así $W = \mathbb{R}^2$, lo cual es un absurdo en este caso.

Por tanto, no importa cual sea el caso, obtenemos un absurdo. En conclusión