

I. (a) Recordemos que

$$\text{NU}(T) = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid T(v) = (0, 0, 0)\},$$

es decir,  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{NU}(T)$  si  $(x_2 - x_3 - x_4, x_4 + x_3 - x_2, x_1 - x_3 + x_4) = (0, 0, 0)$  o lo que es lo mismo,  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  es solución del sistema:

$$\textcircled{1} \begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_4 + x_3 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

La ecuación  $\textcircled{1}$  caracteriza el núcleo de  $T$ .

Por otro lado, un  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  está en la imagen de  $T$  si existe  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0$  tal que  $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, b, c)$ , o lo que es lo mismo, el sistema lineal ampliado

$$\textcircled{2} \begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = a \\ x_4 + x_3 - x_2 = b \\ x_1 - x_3 + x_4 = c \end{cases}$$

tiene solución.

Así pues, consideremos el sistema  $\textcircled{2}$  tanto para dar una base de  $\text{NU}(T)$ , como las condiciones para que un  $(a, b, c) \in \text{Im}(T)$ .

$$\textcircled{3} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 0 & 1 & -1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & -1 & 1 & c \end{array} \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + F_2} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a+b \\ 0 & -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & -1 & 1 & c \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sim \\ F_3 \leftrightarrow F_1 \\ F_2 \rightarrow -F_2 \end{array} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & c \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+b \end{array} \textcircled{4}$$

Luego  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{NU}(T)$  si

$$x_3 = t_1$$

$$x_4 = t_2$$

$$x_1 = t_1 - t_2 \quad \text{con } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

$$x_2 = t_1 + t_2$$

$$(t_1 - t_2, t_1 + t_2, t_1, t_2) = (t_1, t_1, t_2, t_2)$$

Así pues,  $\{(t_1 - t_2, t_1 + t_2, t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} = \text{NU}(T)$

y por tanto  $\{(1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)\}$  genera  $\text{NU}(T)$  y

como es un conjunto L.I., tal conjunto es una base, y en consecuencia  $\dim(\text{NU}(T)) = 2$ .

En cuanto a la imagen de  $T$ , para que  $(a, b, c) \in \text{Im}(T)$ ,

③ debe ser un sistema consistente. Así, de la última fila de ④  $a + b$  debe ser cero.

$$\textcircled{5} \quad a + b = 0$$

Luego la ecuación ⑤ caracteriza la  $\text{Im}(T)$ .

$$\text{Im}(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b = 0\}$$

si  $(a, b, c) \in \text{Im}(T)$ , entonces  $(a, b, c) = (a, -a, c) = a(1, -1, 0) + c(0, 0, 1)$ .

de esto  $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$  genera la  $\text{Im}(T)$  y como tal conjunto es L.I., este es una base. Por tanto  $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ .

Por último, es claro que  $(0, 0, 1) \in \text{Im}(T)$  (de hecho la base de  $\text{Im}(T)$  dada arriba lo contiene). Pues bien, un  $v \in \mathbb{R}^4$  t.q.  $T(v) = (0, 0, 1)$  es dado por  $(1, 0, 0, 0)$ . (esto se puede notar de la matriz ③ o directamente resolviendo ④ con  $a=0, b=0, c=1$ )

Luego los  $v \in \mathbb{R}^4$  t.q.  $T(v) = (u, 0, 1)$  son de la forma

$$(1, 0, 0, 0) + \text{NU}(T)$$

**I (b).** En I. (a) vimos que

$$\text{Im}(T) = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b=0 \}$$

mientras que  $W_1$  es dado por

$$W_1 = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a-b=0 \}$$

Luego

$$\text{Im}(T) \cap W_1 = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} \bullet a+b=0 \\ \bullet a-b=0 \end{array} \right\}$$

es decir que los vectores  $(a, b, c)$  en  $W_1 \cap \text{Im}(T)$  son soluciones del sistema de ecuaciones

$$\textcircled{6} \left\{ \begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b=0 \end{array} \right.$$

el cual es fácil ver que tiene solución trivial; es decir,  $a=0$ ,  $b=0$ .

por tanto los puntos en  $W_1 \cap \text{Im}(T)$  tienen la forma  $(0, 0, c)$  con  $c \in \mathbb{R}$ .

Luego  $\{(0, 0, 1)\}$  es base de  $W_1 \cap \text{Im}(T)$  y así  $\dim(W_1 \cap \text{Im}(T)) = 1$ . Un complemento directo para  $W_1 \cap \text{Im}(T)$  es generado por  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ .

I (c).

$W_2$  es generado por  $\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, -1, -1)\}$

y como tal conjunto es L.I., entonces es una base de  $W_2$

y por tanto  $\dim(W_2) = 2$ . Como  $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ .

para ver que  $\tilde{T}: W_2 \rightarrow \text{Im}(T)$  es un isomorfismo, es suficiente ver que  $\tilde{T}$  es sobreyectiva ( $\Leftrightarrow \dim(\text{Im}(\tilde{T})) = \dim(W_2)$ ) (pues  $\text{Im}(\tilde{T}) \subseteq \text{Im}(T)$  y como  $\dim(W_2) = \dim(\text{NU}(\tilde{T})) + \dim(\text{Im}(\tilde{T}))$ , entonces  $\tilde{T}$  sobreyectiva implica  $\dim(\text{Im}(\tilde{T})) = 2$  y por tanto  $\dim(\text{NU}(\tilde{T})) = 0$ ).

un conjunto de generadores de  $\text{Im}(\tilde{T})$  es dado por

$$\{T(1, 0, -1, 1), T(0, 1, -1, -1)\}$$

Ahora bien

$$T(1, 0, -1, 1) = (0, 0, 3) = 3(0, 0, 1)$$

$$T(0, 1, -1, -1) = (3, -3, 0) = 3(1, -1, 0)$$

Luego, el espacio generado por  $\{3(0, 0, 1), 3(1, -1, 0)\}$  es igual a lo generado por  $\{(0, 0, 1), (1, -1, 0)\}$  que es la  $\text{Im}(T)$ , pues es la base de  $\text{Im}(T)$  dada en I (a).

Por último para ver que  $W_2$  es complemento directo de  $\text{NU}(T)$  es suficiente con ver que  $W_2 \cap \text{NU}(T) = \{0\}$ .  
En efecto.

$$\begin{aligned} \dim(W_2 + \text{NU}(T)) &= \dim(W_2) + \dim(\text{NU}(T)) - \dim(W_2 \cap \text{NU}(T)) \\ &= 4 - \dim(W_2 \cap \text{NU}(T)) \end{aligned}$$

(Luego, si  $W_2 \cap \text{NU}(T) = \{0\} \Rightarrow \dim(W_2 \cap \text{NU}(T)) = 0$ , y así  $\dim(W_2 + \text{NU}(T)) = 4$ )

Pues bien,  $W_2 \cap \text{NU}(T) = \text{NU}(\tilde{T})$ . y como vemos que  $\tilde{T}$  es un isomorfismo,  $\text{NU}(\tilde{T}) = \{0\}$ . por tanto

$$\dim(W_2 + \text{NU}(T)) = 4 \Rightarrow \text{NU}(T) + W_2 = \mathbb{R}^4$$

$$\text{y como } \text{NU}(T) \cap W_2 = \{0\} \Rightarrow \text{NU}(T) \oplus W_2 = \mathbb{R}^4$$

I. (1) Recordemos que, en general, dada una transf. lineal  $R: V \rightarrow W$ , si  $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $V$  y  $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$  es base de  $W$ , entonces la matriz de  $R$  en la base  $B_2, B_1$ ,  $[R]_{B_2}^{B_1}$  es dada por

$$\left[ \begin{matrix} (R(v_1))_{B_2} & (R(v_2))_{B_2} & \dots & (R(v_n))_{B_2} \end{matrix} \right]$$

donde  $(R(v_i))_{B_2}$  son las coordenadas del vector  $R(v_i)$  en la base (ordenada)  $B_2$ .

Notemos que  $[T]_{C_2}^{C_1}$  y  $[T]_{B_2}^{B_1}$  son fáciles de calcular, pues  $T$  está expresada usando las coordenadas usuales de  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathbb{R}^3$

$$[T]_{C_2}^{C_1} = \begin{matrix} & (T(e_1))_{C_2} & \dots & (T(e_4))_{C_2} \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Mientras que, en cuanto a  $[T]_{B_2}^{B_1}$ , tenemos que  $B_1$  es la base formada por la base dada para  $\text{NU}(T)$  y la base de  $W_2$  del ejercicio anterior cuyos miembros bajo  $T$  van a múltiplos de los miembros de la base  $B_2$  que esta formada por una base de la  $\text{Im}T$  y un complemento directo.

$$T(0, 1, -1, -1) = 3(1, -1, 0) = [3, 0, 0]_{B_2}$$

$$T(1, 0, -1, 1) = 3(0, 0, 1) = 3[0, 1, 0]_{B_2}$$

$$T(-1, 1, 0, 1) = T(1, 1, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

Luego  $[T]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Para calcular  $[T]_{C_2}^{B_1}$  y  $[T]_{B_2}^{C_1}$  podemos usar

$[T]_{C_2}^{C_1}$   $[T]_{B_2}^{B_1}$  y las matrices de cambio de Base

$$[P]_{C_1}^{B_1} \cdot [P]_{B_1}^{C_1}$$

$[P]_{C_1}^{B_1}$  es fácil de calcular pues se consideran los vectores de  $B_1$  escritos en la base canónica

$$[P]_{C_1}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y  $[P]_{B_1}^{C_1}$  es la inversa de  $[P]_{C_1}^{B_1}$

Tambien podemos encontrar  $[P]_{B_1}^{C_1}$  escribiendo los vectores de la base canónica en terminos de  $B_1$

P.7

(Nota que  $B_1$  es una base ortogonal de  $\mathbb{R}^4$  con respecto al producto interno usual de  $\mathbb{R}^4$ , este hecho puede ser usado para calcular rapidamente las coordenadas en la base  $B_1$ , aunque lo haremos de la forma usual)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)_{C_1} = t_1(0, 1, -1, -1) + \dots + t_4(1, 1, 1, 0)$$

equivale a

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & | & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & | & x_3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & | & x_4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & | & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} F_3 \rightarrow F_2 + F_3 \\ F_4 \rightarrow F_2 + F_4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & | & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & | & x_2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & | & x_3 + x_2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & x_4 + x_2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} F_1 \leftrightarrow F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & | & x_3 + x_2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & x_4 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} F_3 \rightarrow F_3 + F_2 \\ F_4 \rightarrow F_4 - F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & x_4 + x_2 - x_1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} \frac{1}{3} F_3 \leftrightarrow \frac{1}{3} F_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{3}(x_4 + x_2 - x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 - F_4 \\ F_2 \rightarrow F_2 - F_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{3}(2x_2 - x_3 - x_1) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & \frac{1}{3}(2x_1 - x_3 - x_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{3}(x_4 + x_2 - x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{3}(x_3 + x_2 + x_1) \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 - F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 - F_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{1}{3}(x_2 - x_3 - x_4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{3}(x_1 + x_4 - x_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{3}(x_4 + x_2 - x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{3}(x_3 + x_2 + x_1) \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$[P]_{B_1}^{C_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$[T]_{C_2}^{B_1} = [T]_{C_2}^{C_1} [P]_{C_1}^{B_1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{B_2}^{C_1} = [T]_{B_2}^{B_1} [P]_{B_1}^{C_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II. (a) Falso

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto  $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$  es una base de  $W$ ;  $\dim(W) = 3$ .

II. (b) Falso

Sea  $\{v_1, v_2\}$  conjunto de generadores de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = 2$ , y sea  $\{w_1, w_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$  dado por  $w_1 = (1, 1)$   $w_2 = (0, 1)$ . No puede existir una transf. lineal  $T$  tal que  $T(v_1) = w_1$ ,  $T(v_2) = w_2$ , pues en otro caso, como  $v_2 = 2v_1$ , luego  $T(v_2) = 2T(v_1) = (2, 2)$ , por lo cual no podría tomar el valor  $T(v_2) = (0, 1)$ .

II. (c) VERDAD  
T inyectiva es equivalente a ver que  
 $\text{NU}(T) = \{0\}$ . Así pues, sea  $z \in \text{NU}(T)$ .

$$T(\hat{v} + z) = T(\hat{v}) + T(z) = \hat{w} + 0 = \hat{w}$$

pero  $\hat{v}$  es el único  $\hat{v}$  q  $T(\hat{v}) = \hat{w}$ , luego

$$\hat{v} + z = \hat{v} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow \text{NU}(T) = \{0\}.$$

II. (d) FALSO

$$\left( \left( (1+\sqrt{2}), 1 \right), \left( (1+\sqrt{2}), 1 \right) \right) = 0.$$