Funciones trigonométricas

Tenemos en el plano **R²** la circunferencia C_1 de radio 1 con centro (0,0). En ella distinguimos el punto (1,0), que es el punto de intersección de C_1 con el semieje de las *x* positivas. Si partiendo de dicho punto en sentido antihorario, marcamos sobre C_1 un arco de longitud *t*, éste determina un punto $P(t) \in C_1$.

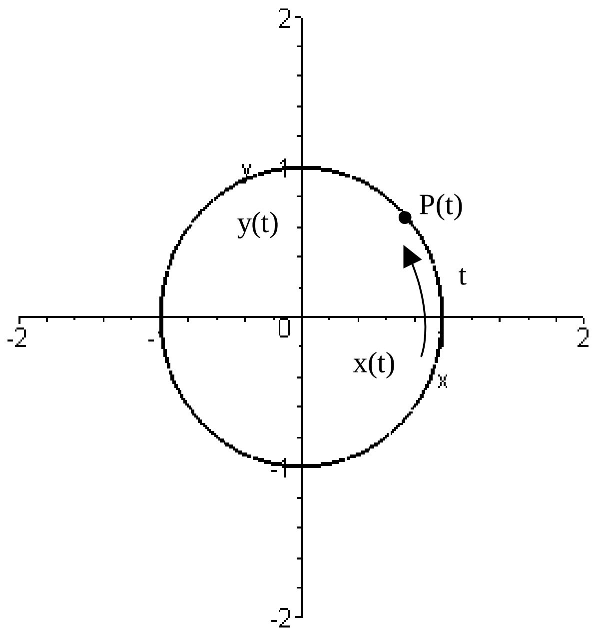


Figura 14

El punto $P(t)$ obviamente depende de nuestra elección de *t* y es claro que para cada $t \geq 0$ tenemos un único punto $P(t)$. Entonces $P(t)$ es una función de *t*. El punto $P(t)$ en **R²** está determinado por sus coordenadas $P(t) = (x(t), y(t))$ y por lo tanto, cada una de esas coordenadas es una función de longitud del arco *t*.

Como sabemos, la longitud de la circunferencia C_1 es 2π y entonces, para cada *t* tal que $0 \leq t < 2\pi$, tenemos un punto en C_1. Recíprocamente, todo punto de C_1 es $P(t)$ para algún *t* que cumple $0 \leq t < 2\pi$. Por otra parte es claro que $P(2\pi) = P(0) = (1,0)$ y que si tomamos $2\pi \leq t < 4\pi$, volvemos a recorrer nuestra circunferencia. Más aún esto ocurre en cada intervalo $[2kp, 2(k+1)p)$. Es decir, cada vez que *t* toma un valor de la forma 2kπ, el punto $P(t)$ vuelve a empezar a recorrer la circunferencia en sentido antihorario y da una vuelta completa cuando *t* recorre el citado intervalo $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$.
Podemos ahora extender la definición de nuestra función $P(t)$ a todos los números reales. Nos falta definir *P* en los $t < 0$, en este caso, definimos $P(t)$ como el punto de C_1 cuyo arco tiene longitud $|t|$, medido desde (1,0) en sentido horario sobre C_1.

Veamos algunos ejemplos.

$P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1) \quad P\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0,-1)$

$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (Pitágoras)

$P\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Calcular las coordenadas de $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ es levemente más complicado, pero será un buen ejercicio.

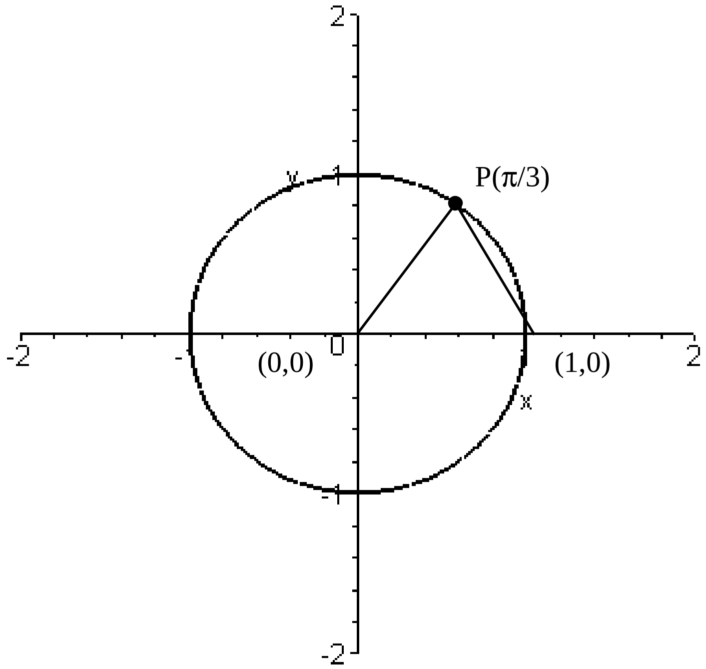


Figura 15

Observando la figura vemos marcado en C_1 el arco de longitud $\frac{\pi}{3}$, que es un sexto de la longitud de la circunferencia. De la geometría elemental sabemos que la cuerda de ese arco es exactamente el radio de la circunferencia. Esto nos dice que el triángulo {(0,0), (1,0), $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$} es equilátero. Entonces la altura por el vértice $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ corta a la base opuesta en su punto medio y así $x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Por otra parte la longitud de la altura, que no es otra cosa que $y\left(\frac{\pi}{3}\right)$, se calcula ahora fácilmente por el teorema de Pitágoras y resulta $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Las funciones *x*(t) e *y*(t) tienen desde la antigüedad nombres propios que es útil respetar, son las llamadas funciones trigonométricas seno y coseno.

(14) $x(t) = \cos(t)$ (coseno de t), $y(t) = \text{sen}(t)$ (seno de t)

Asociadas a estas dos funciones básicas se definen otras cuatro funciones trigonométricas del arco *t*. Ellas son: tangente, cotangente, secante y cosecante.

(15) $$\text{tg}(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)} \quad \text{(tangente de } t\text{)}$$

Esta función no está definida para aquellos t que hacen $\cos t = 0$. Estos son los de la forma

$$t = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{con} \quad k \in Z$$

(16) $$\text{cotg}(t) = \frac{\cos(t)}{\text{sen}(t)} \quad \text{(cotangente de } t\text{)}$$

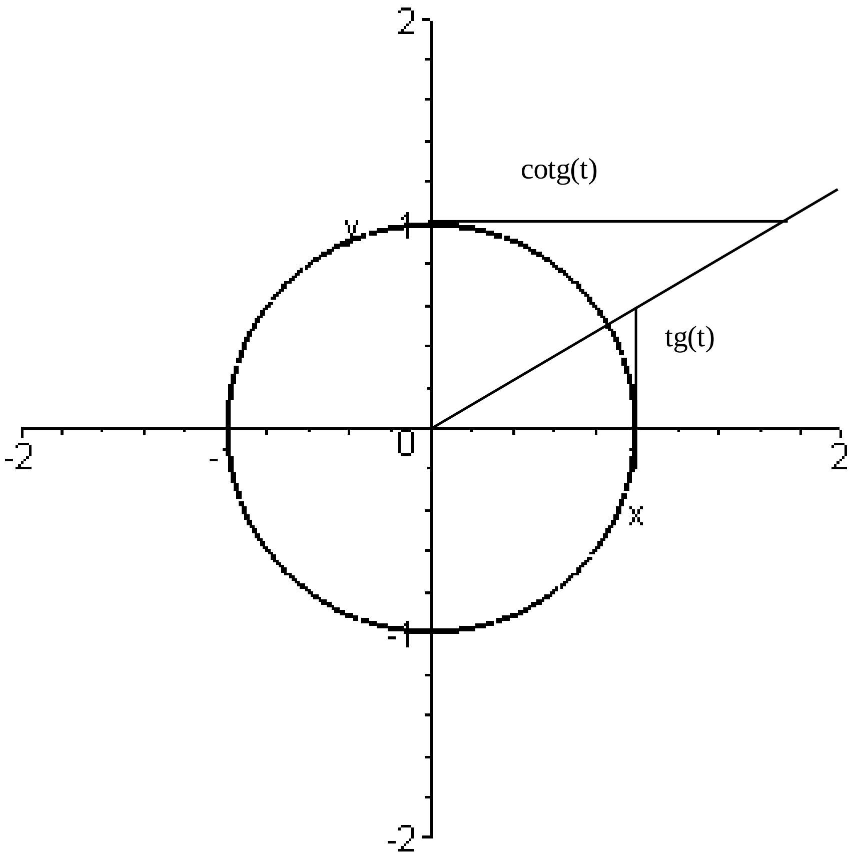
La cotangente no está definida para aquellos t que hacen sen $t = 0$. Estos son los de la forma $t=k\pi$, con $k \in Z$.

(17) $$\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)} \quad \text{(secante de } t\text{)}$$

(18)

(18) $$\text{cosec}(t) = \frac{1}{\text{sen}(t)} \quad \text{(cosecante de } t\text{)}$$

Estas dos últimas funciones tienen los mismos dominios que tg (t) y cotg (t), respectivamente.
Las funciones tg (t) y cotg (t) tienen un interesante significado geométrico que se ve en la figura 16.



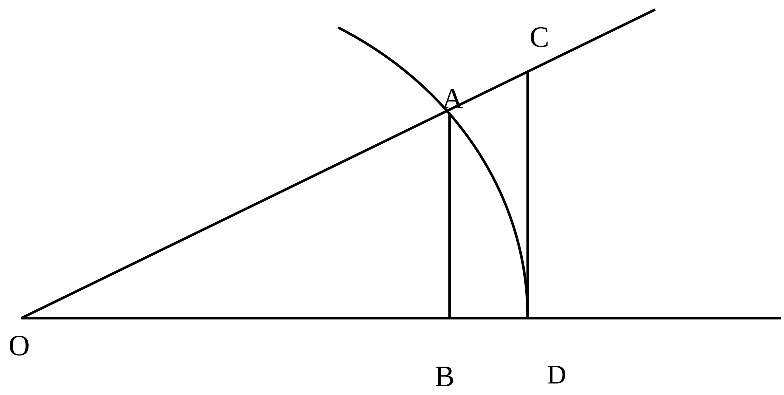


Figura 16

El triángulo OBA es semejante al ODC y esto implica

$$\frac{\text{long }(\overline{CD})}{\text{long }(\overline{OD})} = \frac{\text{sen }(t)}{\cos (t)} = \text{tg }(t)$$

Pero long $(\overline{OD}) = 1$ y así long $(\overline{CD})$ = tg (t). Dejemos a cargo del lector la tarea de verificar, de modo totalmente análogo, que el segmento indicado en la figura es cotg (t).

Una relación fundamental liga a las funciones sen (t) y cos (t):

(19) $$\text{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1 \quad \text{para todo } t \in \mathbf{R}$$

que es consecuencia inmediata de que, para cada $t \in \mathbf{R}$, $P(t)$ es un punto en la circunferencia C_1.

De esta igualdad pueden derivarse varias otras por simple cálculo algebraico. Por ejemplo

$$\text{tg }(t) + \text{cotg }(t) = \sec (t).\text{cosec }(t).$$

Esta relación vale sólo en los puntos donde todas las funciones involucradas están definidas. Veamos cómo se demuestra.

$$\begin{aligned} \text{tg }(t) + \text{cotg }(t) &= \frac{\text{sen }(t)}{\cos (t)} + \frac{\cos (t)}{\text{sen }(t)} = \frac{\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)}{\text{sen }(t).\cos (t)} = \\ &= \frac{1}{\text{sen }(t)\cos (t)} = \sec (t).\text{cosec }(t) \end{aligned}$$

Como $P(t)$ está en la circunferencia C_1, ninguna de sus coordenadas puede tener valor absoluto mayor que 1.

(20) $$|\cos (t)| \le 1 \text{ y } |\text{sen }(t)| \le 1 \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Resulta ahora, en forma inmediata, de (17) y (18) que

(21) $$|\sec(t)| \geq 1 \text{ y } |\operatorname{cosec}(t)| \geq 1$$

para todo t donde ellas están definidas.

Otra propiedad importante y que es consecuencia inmediata de la descripción de la función $P(t)$, es

(22)
$$\operatorname{sen}(t+2k\pi) = \operatorname{sen}\ t \quad \forall k \in \mathbf{Z}, t \in \mathbf{R}$$
$$\cos(t+2k\pi) = \cos\ t \quad \forall k \in \mathbf{Z}, t \in \mathbf{R}$$

Además, la simple observación de la circunferencia C_1, nos permite ver que

(23)
$$\cos\ (-t) = \cos\ (t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$
$$\operatorname{sen}\ (-t) = -\operatorname{sen}\ (t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$
$$\operatorname{tg}\ (-t) = -\operatorname{tg}\ (t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Las igualdades (23) nos dicen que coseno es una función par, mientras que seno y tangente son funciones impares.

Sin duda, el lector puede descubrir fácilmente otras identidades como

(24) $$\operatorname{sen}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

(25) $$\cos\ (t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Una fórmula muy importante y de la cual se obtienen muchas otras (en particular, permite dar una prueba de (24)) es la de $\cos(t_1 - t_2)$ donde t_1 y t_2 son dos arcos dados.

Para los arcos t_1 y t_2 consideramos los puntos $P(t_1)$ y $P(t_2)$ en C_1 y para el arco $(t_1 - t_2)$ el correspondiente punto $P(t_1 - t_2)$. De la definición de la función P sigue que el arco de C_1 entre $P(t_2)$ y $P(t_1)$ tiene exactamente la misma longitud que el arco (1,0) a $P(t_1 - t_2)$ (Haga un dibujo para el caso $t_1 > t_2$). Esta longitud es $|t_1 - t_2|$.

La longitud de la cuerda entre $P(t_2)$ y $P(t_1)$ es, por definición, la distancia de $d(Pt_1), P(t_2))$ y la longitud de la cuerda (1,0) a $P(t_1 - t_2)$ es de $d((1,0), P(t_1 - t_2))$.
De la geometría elemental sabemos que: a arcos iguales en la circunferencia C_1, corresponden cuerdas iguales. Entonces tenemos

(26) $$d(P(t_1),P(t_2)) = d((1,0),P(t_1-t_2))$$

Calculemos cada una de estas distancias al cuadrado

$$d(P(t_1),P(t_2))^2=(\cos(t_1)-\cos(t_2))^2+(\operatorname{sen}(t_1)-\operatorname{sen}(t_2))^2 =$$
$$=\cos^2(t_1)-2\cos(t_1)\cos(t_2)+\cos^2(t_2)+\operatorname{sen}^2(t_1)-2\operatorname{sen}(t_1)\operatorname{sen}(t_2)+\operatorname{sen}^2(t_2)=$$

$$=2-2\cos(t_1)\cos(t_2)-2\operatorname{sen}(t_1)\operatorname{sen} t_2$$

$$d(P(t_1-t_2),(1,0))^2=[\cos(t_1-t_2)-1]^2+\operatorname{sen}^2(t_1-t_2)=$$

$$=\cos^2(t_1-t_2)-2\cos(t_1-t_2)+1+\operatorname{sen}^2(t_1-t_2)$$

$$=2-2\cos(t_1-t_2)$$

Ahora sigue de (26) que

(27) $$\cos(t_1-t_2)=\cos(t_1)\cos(t_2)+\operatorname{sen}(t_1)\operatorname{sen}(t_2).$$

El lector puede ahora obtener una demostración algebraica de (4) poniendo $t_1=\frac{\pi}{2}$ y $t_2=t$ en (27).

Por otra parte, para obtener (25) basta reemplazar en (24) $\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ en lugar de *t*.

De (27) se pueden derivar muchas fórmulas útiles. Por ejemplo

$$\cos(t_1+t_2)=\cos(t_1-(-t_2))=\cos(t_1)\cos(-t_2)+\operatorname{sen}(t_1)\operatorname{sen}(-t_2)$$

de donde, por (23), obtenemos

(28) $$\cos(t_1+t_2)=\cos(t_1)\cos(t_2)-sen(t_1)sen(t_2)$$

De modo análogo se hace

$$\operatorname{sen}(t_1+t_2)=\cos(\frac{\pi}{2}-(t_1+t_2))=\cos((\frac{\pi}{2}-t_1)-t_2)=$$

$$=\cos(\frac{\pi}{2}-t_1)\cos(t_2)-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-t_1)\operatorname{sen}(t_2)$$

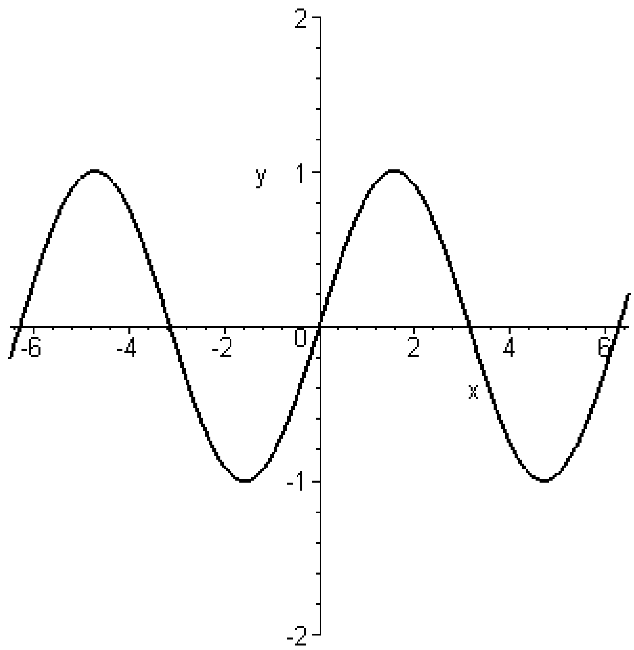
de donde, gracias a (24) y (25), resulta

(29) $$\operatorname{sen}(t_1+t_2)=\operatorname{sen}(t_1)\cos(t_2)+\cos(t_1)\operatorname{sen}(t_2)$$

Hemos mencionado de esta manera las fórmulas que, según creemos, son las más comúnmente usadas. Cualquier libro de trigonometría encierra un gran número de fórmulas y relaciones entre las distintas funciones trigonométricas.

El lector que ha alcanzado este punto puede, sin mayores dificultades, leer por su cuenta y adquirir un buen manejo de estos resultados. Para estas notas esto no será necesario.
Usando la información que tenemos sobre el seno y el coseno, el lector puede ahora convencerse de que los gráficos de estas dos funciones son los siguientes.

y = *sen* (*t*)



y = *cos* (*t*)

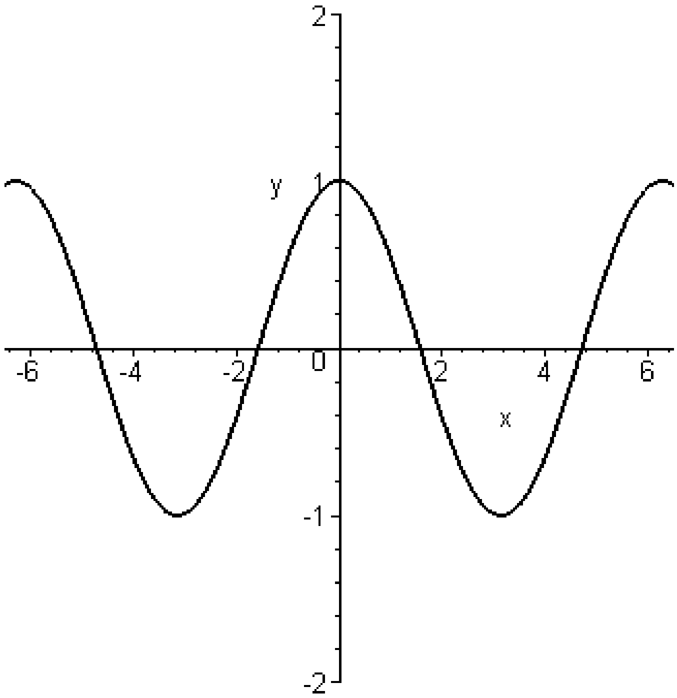


Figura 17

Para la tangente en cambio, usando el significado geométrico descrito, no es difícil visualizar su gráfico como

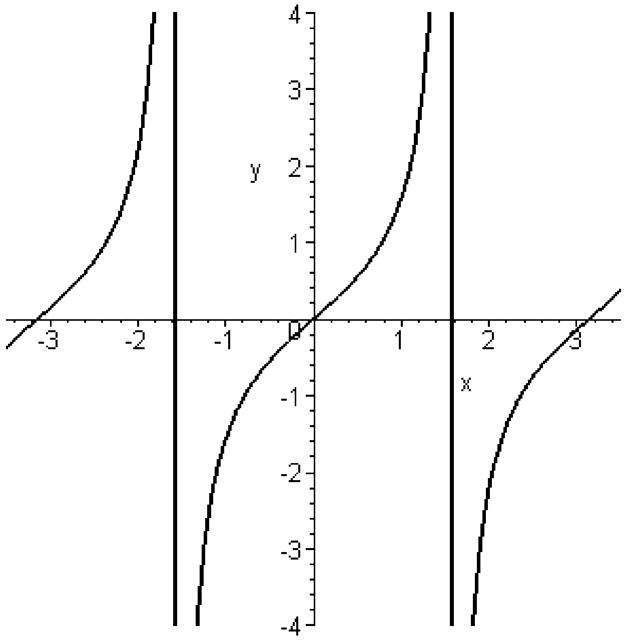


Figura 18

Es de destacar que la función tangente nos ayuda a dar un sentido más geométrico a la pendiente de una recta, no paralela al eje *y*, en el plano **R²**.

Sea $y = ax + b$ una recta en el plano **R²**. Su pendiente es *a* y su ordenada al origen *b* y sabemos que esta recta es paralela a la recta $y = ax$, que pasa por el punto (0, 0). Esta última corta a la circunferencia C_1 y determina, con el eje *x*, un arco *t* como indica la figura 19.

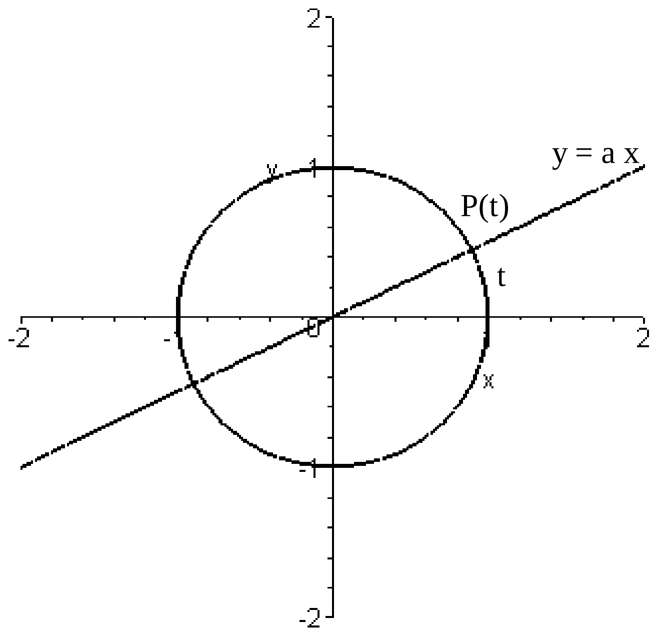


Figura 19

El punto $P(t)=(\cos(t), \mathrm{sen}(t))$ está en la recta y por lo tanto sus coordenadas deben satisfacer su ecuación. Es decir $\mathrm{sen}\ t = a \cos t$ de donde resulta

(30) $$a = \frac{\mathrm{sen}(t)}{\cos(t)} = \mathrm{tg}(t)$$

Nótese que el ángulo que forma la recta $y = ax + b$ con el eje x es el mismo que el de la recta paralela $y = ax$. Ese ángulo es justamente nuestro arco t ya que el radio de C_1 es 1. Entonces podemos escribir lo siguiente.

Proposición. La pendiente de una recta no paralela al eje *y* es igual a la tangente del ángulo que forma con el eje *x*.

Las funciones trigonométricas son muy usadas en Geodesia y Astronomía, donde las mediciones directas de distancias son difíciles y muchas veces imposibles. Veamos el ejemplo más sencillo de este tipo de problema.

Se coloca uno a una distancia *d* (que suponemos conocida) de la base de una columna cuya altura queremos conocer. Con una regla y un transportador (a la manera de improvisado teodolito) se mide, con la mayor precisión posible, el ángulo β entre la horizontal en los ojos del observador y la recta que une el ojo del observador con el tope de la columna.

Ahora tenemos que, si *s* es la altura a los ojos del observador y *h* es lo que mide el resto de la columna (ver figura 20), la altura buscada es *h* + *s*.

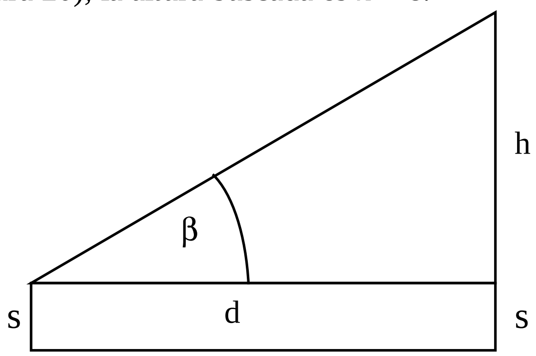


Figura 20

Afirmamos que $h = d\ \mathrm{tg}\ \beta$, lo que es muy fácil probar. Como se ve en la figura 21, si la base del triángulo pequeño es 1, su altura es $\mathrm{tg}(\beta)$. La semejanza de los dos triángulos nos da $\frac{d}{1} = \frac{h}{\mathrm{tg}(\beta)}$,
y esto implica claramente nuestra afirmación.

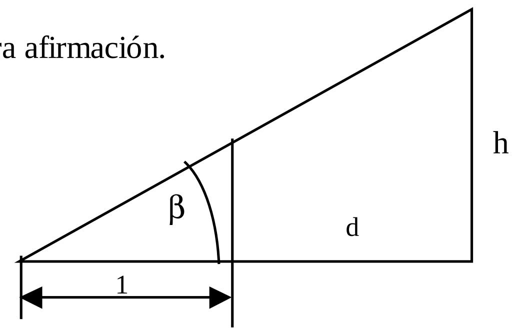


Figura 21

En general este procedimiento nos permite averiguar la medida de los lados de un triángulo rectángulo, conociendo uno de los ángulos que no es recto y uno de los lados.

Esta aplicación de las funciones trigonométricas, es muy útil y se conoce usualmente como resolución de triángulos.
Veamos cómo debemos proceder. Dado un triángulo *ABC*, sea α el ángulo en *A*. Trazando la circunferencia de radio uno con centro en *A* (suponemos que la unidad es menos que $\operatorname{long}\overline{\mathrm{AB}}$), obtenemos el punto *P* de corte con el lado $\overline{\mathrm{AC}}$ (hipotenusa). Sea *Q* el punto que corresponde a la intersección del lado $\overline{\mathrm{AC}}$ con la perpendicular al lado $\overline{\mathrm{AB}}$ que pasa por *P* (Figura 22).

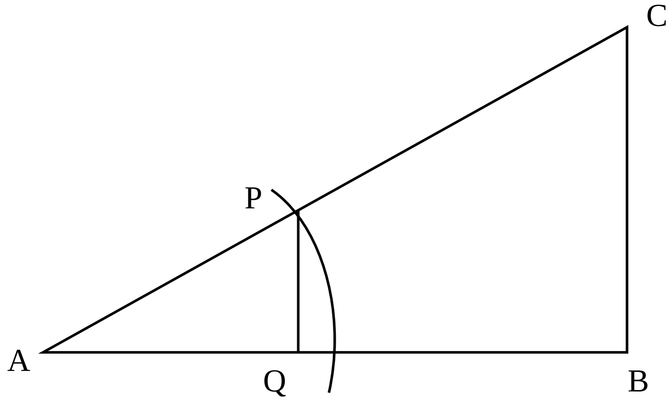


Figura 22

Entonces el triángulo *ABC* es semejante al *AQP* y sabemos que $\operatorname{long}\overline{\mathrm{PQ}} = \operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{long}\overline{AP} = 1$.

Luego $$\frac{\operatorname{long}\left(\overline{\mathrm{CB}}\right)}{\operatorname{long}\left(\overline{\mathrm{AC}}\right)} = \frac{\operatorname{long}\left(\overline{\mathrm{PQ}}\right)}{\operatorname{long}\left(\overline{\mathrm{AP}}\right)} = \operatorname{long}\overline{\mathrm{PQ}} = \operatorname{sen}\alpha$$

Esto es lo que usualmente se expresa diciendo que el seno de α es el cateto opuesto sobre la hipotenusa.

Con un razonamiento análogo se tiene

$$\frac{\operatorname{long}\left(\overline{\mathrm{AB}}\right)}{\operatorname{long}\left(\overline{\mathrm{AC}}\right)} = \cos\alpha \qquad \text{y} \qquad \frac{\operatorname{long}\left(\overline{\mathrm{CB}}\right)}{\operatorname{long}\left(\overline{\mathrm{AB}}\right)} = \operatorname{tg}\alpha$$

o sea que $\cos a$ es cateto adyacente sobre hipotenusa y $\operatorname{tg}\alpha$ es cateto opuesto sobre cateto adyacente. Así por ejemplo, si la hipotenusa mide 4 y el ángulo α es $\pi/3$, el cateto $\overline{BC}$ mide $4\operatorname{sen}\alpha = 4\sqrt{3}/2 = 2\sqrt{3}$ y el cateto $\overline{AB}$ mide $4\cos\alpha = 4/2 = 2$.