MATEMÁTICA II – Guía de prácticos

Segundo cuatrimestre 2010

Contenidos

1 Práctico I: Antiderivada. 2

2 Práctico II: Integral Definida. Teorema Fundamental del Cálculo. 4

3 Práctico III: Aplicaciones de la integral. Integrales impropias. 6

4 Práctico IV: Técnicas de integración. 8

5 Guía Complementaria: Prácticos I al IV. 10

6 Práctico V: Ecuaciones Diferenciales. Variables separables y ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. 13

7 Práctico VI: Vectores, Rectas y Planos en el Espacio. 16

8 Práctico VII: Funciones de Varias Variables. 19

9 Guía Complementaria: Prácticos V al VII. 22

1 Práctico I: Antiderivada.

1. Determinar en cada uno de los siguientes casos todas las funciones $f(x)$ cuya derivada es la dada:

   (a) $f'(x) = \dfrac{3}{x}$

   (b) $f'(x) = e^{3x} + \cos 2x$

   (c) $f''(x) = 7x^2$

2. Hallar todas las funciones f, g y h tales que:

   (a) $f'(x) = \operatorname{sen} x$

   (b) $g''(x) = x^2$

   (c) $h'''(x) = 1 + x$

3. Mostrar que las funciones $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ y $g(x) = \dfrac{-x}{1+x}$ tienen igual derivada. Hallar la constante c tal que $f = g + c$.

4. Sabiendo que $\operatorname{sen}' x = \cos x$, $\cos' x = -\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$ demostrar que:

   (a) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = c$, con c una constante;

   (b) $c = 1$.

5. Una partícula tiene velocidad $v(t) = v_0 + at$, donde v_0 y a son constantes. En el instante $t = 0$ su posición es $s_0 = s(0)$. Mostrar que su posición en un instante t cualquiera está dada por
$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0.$$

6. Mostrar con un ejemplo que la siguiente afirmación es falsa:

   Si f y g son dos funciones tales que $f''(x) = g''(x)$, para todo x, entonces f y g difieren en una constante; es decir $f = g + C$.

7. Determinar la función $f(x)$ en cada uno de los siguientes casos:

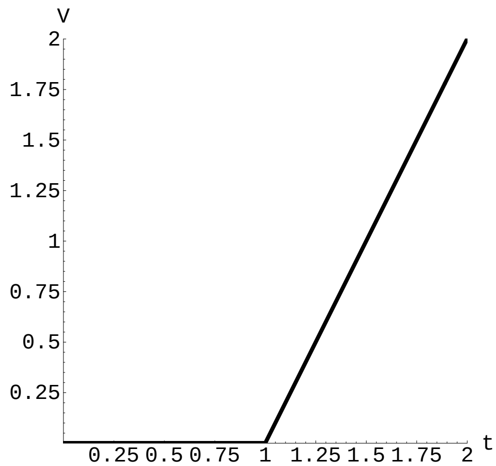
   (a) $f'(x) = x$, $f(0) = 1$

   (b) $f'(x) = x^2 + 3x - 1$, $f(1) = 5$

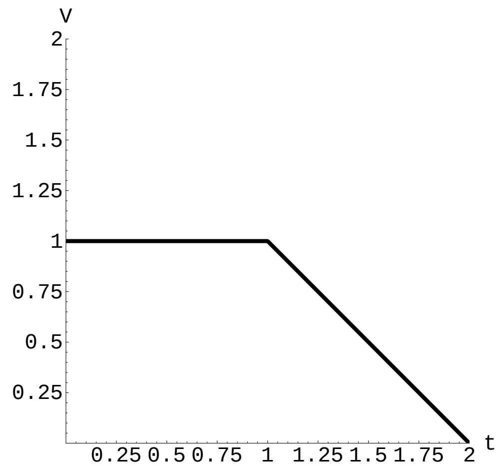
   (c) $f(3) = -6$, $f'(x) = x^2 - 2x - 4$

8. Sea f tal que $f(1) = 1$, $f'(1) = 3$, $f''(1) = 6$ y $f'''(x) = 0$ para todo x. Demostrar que $f''(x) = 6$, $f'(x) = 6x - 3$ y que $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$, para todo x.

9. Esbozar el gráfico de la posición s de una partícula en función del tiempo t, dada la gráfica de su velocidad v y el valor $s(0)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) 

$s(0) = 0$

b) 

$s(0) = 1$

10. Hallar todas las funciones $f(x)$ que satisfacen $f'(x) = k\, f(x)$ para x en $\mathbb{R}$, donde k es una constante.

11. La pendiente de la recta tangente al gráfico de una función $y = y(x)$ en el punto (x, y) es $3y$. Determinar y, si $y(2) = 1$.

12. La tasa de crecimiento de una población de bacterias en un cultivo es proporcional al número de bacterias $A(t)$ presentes en el mismo en el instante t.

    (a) Escribir la ecuación diferencial que satisface la función $A(t)$.

    (b) Calcular el valor de la constante característica de este proceso si se observa que, al cabo de 10 minutos, la población crece un 3%. (Ayuda: use que $A(10) = 1,03A(0)$)

    (c) ¿Cuánto tiempo tardará el cultivo en duplicarse?

    (d) Calcular $\lim\limits_{t \to \infty} A(t)$.

2 Práctico II: Integral Definida. Teorema Fundamental del Cálculo.

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\displaystyle\int \left(5x^4 - \frac{5}{x^3} + x\right) dx$ b) $\displaystyle\int \left(\cos 2x + \frac{1}{x}\right) dx$ c) $\displaystyle\int \left(2x + \operatorname{sen} 3x + e^{2x}\right) dx$

   d) $\displaystyle\int \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right) dx$ e) $\displaystyle\int \frac{y^4 + 2y^2 - 1}{\sqrt{y}}\, dy$ f) $\displaystyle\int \left(\frac{4}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + 1\right) dx$

   g) $\displaystyle\int \frac{3}{1 + 2x^2}\, dx$ h) $\displaystyle\int \left(\frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{\sqrt{1 - t^2}}\right) dt$ i) $\displaystyle\int x^2 \left(x^3 - 1\right)^{\frac{1}{2}} dx$

   j) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x + 1}\, dx$ k) $\displaystyle\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx$ l) $\displaystyle\int t^5 \left(t^3 + 3\right)^{\frac{1}{4}} dt$

   m) $\displaystyle\int \cos^2(3t)\, dt$ n) $\displaystyle\int \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x\, dx$

2. (a) Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 5 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$. Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

   (b) Calcular $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$, si $f(x) = x - |x|$.

3. (a) Sea $f(x) = x^2$. Escribir las sumas superior e inferior en el intervalo $[1, 2]$, utilizando una partición tal que la longitud de cada subintervalo sea de $1/2$.

   (b) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Escribir las sumas superior e inferior en el intervalo $[1, 3]$ y con longitud de cada subintervalo igual a $1/3$.

4. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$ c) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{2x}$

   d) $\displaystyle\int_{-3}^{4} |x + 2|\, dx$ e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^5 - x}{3x^3}\, dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}}\, dx$

   g) $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x} + x\right)^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right) dx$ h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\, dx$

5. Sea $F(x) = \displaystyle\int_a^{h(x)} f(t)\, dt$, donde f es continua y h es una función derivable. Probar que $F'(x) = f\left(h(x)\right) \cdot h'(x)$.

6. Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a) $F(x) = \int_0^x \sqrt{4+t^2}\, dt$ b) $g(s) = \int_{-s}^{s} \frac{dt}{3+t^2}$ c) $K(y) = \int_1^{y^2} \sqrt{1+x^4}\, dx$

d) $h(u) = \int_u^0 u^2\sqrt{1+x^4}\, dx$ e) $F(t) = \int_0^2 e^s\, ds$ f) $G(x) = \frac{1}{x^2+1} \int_{x^3}^1 \operatorname{sen} 2t\, dt$

7. Dada la velocidad $v(t)$, encontrar la distancia recorrida en el intervalo dado:

   (a) $v(t) = e^{3t}$ $\quad 0 \le t \le 10.$

   (b) $v(t) = \operatorname{sen} wt$ $\quad 0 \le t \le \pi/w.$

8. Sea f una función que cumple $f''(u) = u^2 - 3u\,,\ f(0) = 1,\ \ f(1) = 7/12$. ¿Cuánto vale $f(-1)$?

9. Encontrar b tal que $\int_b^{b+2} x\, dx = 10.$

10. Un cohete, inicialmente en reposo, experimenta una aceleración dada por $a(t) = t^{1/2} + 1$ para $t \ge 0$ (el tiempo se mide en s (segundos) y la aceleración en m/s^2).

    (a) ¿Qué velocidad tiene el cohete al cabo de $64\,s$?

    (b) ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra al cabo de dicho tiempo?

11. Una partícula se desplaza en línea recta con una velocidad uniforme de $1m/s$ hasta el instante $t = 0$. A partir de dicho instante, experimenta una aceleración dada por $a(t) = \frac{4}{(4-t)^3}$; $0 \le t < 4$. ¿Qué distancia recorre en el intervalo de tiempo entre $t = 1s$ y $t = 2s$?

12. Calcular:
    $\int_{-1}^{1} (2\phi(x) - 3\psi(x) + x)\, dx$ sabiendo que $\int_{-1}^{1} \phi(x)\, dx = 4$ y $\psi(x) = \int_{-1}^{x} t^2\, dt.$

3 Práctico III: Aplicaciones de la integral. Integrales impropias.

1. Hallar el área comprendida entre:
   (a) Las curvas $y = x + 1$, $y = -x + 1$ y el eje x. (R=1)
   (b) Las curvas $y = 6x - x^2$ é $y = x^2 - 2x$. (R=64/3)
   (c) Las curvas $y = x^2 - 4$ é $y = x - 2$. (R=9/2)

2. Encontrar el área limitada por el gráfico de:
   (a) $f(t) = t^{-2/3}$, el eje t, las rectas $t = 8$ y $t = 27$.
   (b) $h(u) = (u + 30)^{-1/2}$, el eje u, las rectas $u = 1$ y $u = 6$.

3. Encontrar el área encerrada por las curvas dadas y graficar la región en cuestión.
   (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$ y $x = 0$.
   (b) $f(u) = u^3$, el eje u, y la recta tangente a $f(u)$ en el punto (1,1).

4. (a) Calcular el área de la región limitada por las rectas $y = x$, $y = 2x$, $y = -x + 6$.
   (b) Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de las funciones $f(x) = -x^2 + 6$ y $g(x) = |x|$.

5. Hallar el volumen de un cono circular recto de altura h y radio de la base igual a r.

6. Hallar el volumen de un cilindro circular recto de radio r y altura h.

7. Hallar el volumen del sólido obtenido rotando alrededor del eje x la región limitada por:
   (a) la parábola $y = x^2$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$.
   (b) la parábola $y = x^2 + 1$, y la recta $y = x + 1$.

8. Sea $F(x)$ una fuerza que actúa sobre un cuerpo cuando su posición, medida sobre una recta coordenada L, es x. Si $F(x)$ es continua y actúa en la dirección positiva de L, entonces el **trabajo realizado por la fuerza** F para desplazar el cuerpo desde $x = a$ hasta $x = b$ está dado por:

   $$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

   Calcular el trabajo realizado para levantar un cuerpo de masa $m = 10$gr desde una altura $h = 1$m hasta $h = 2$m (la fuerza gravitatoria (peso) está dada por $F_g = -mg$ con $g = 9,8\ \frac{m}{s^2}$).

9. La ley de Hooke establece que la fuerza de resistencia que ofrece un resorte cuando se modifica su longitud natural en x unidades está dada por:

$$G(x) = -kx$$

donde $k > 0$ es una constante que depende del resorte, $x > 0$ para un estiramiento y $x < 0$ para una compresión.

   (a) ¿Cuánto trabajo se debe realizar para incrementar la longitud natural de un resorte en 3 cm si $k = 15\dfrac{gr}{s^2}$?

   (b) ¿Cuánto se debe comprimir un resorte para que el trabajo realizado sea de $13gr\,\dfrac{cm^2}{s^2}$, si $k = 3\dfrac{gr}{s^2}$?

10. Calcular el volumen de la superficie obtenida al hacer girar las siguientes curvas alrededor del eje x, en los intervalos indicados:

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } \; 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } \; 2 < x \leq 3 \end{cases}$, en el intervalo $[0, 3]$.

   (b) $f(x) = 2 \cos x$, en el intervalo $[0, \pi/2]$.

11. Hallar el volumen de la esfera de radio r.

12. Hallar el volumen de la intersección de una esfera sólida de radio $2r$ centrada en O y un cilindro sólido centrado en O de radio r y altura $5r$.

13. Determinar si las integrales impropias siguientes convergen (es decir admiten un valor finito) y en tal caso calcularlas. Justificar la respuesta.

   a) $\displaystyle\int_0^1 x^{-1/3}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^0 (s+1)^{-5/4}\,ds$ c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-3/2}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s+1}}\,ds$

   e) $\displaystyle\int_{-1}^0 t^{-4/3}\,dt$ f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(1-y)^{2/3}}\,dy$ g) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\,e^{-x^2}\,dx$ h) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx.$

14. Determinar si cada una de las siguientes integrales impropias converge. Justificar la respuesta.

   a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} (s^3+1)^{-1}\,ds$ b) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}-1}\,ds$ c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,\cos x\,dx.$

4 Práctico IV: Técnicas de integración.

1. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{5+2x^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(2x)\,\cos(2x)\,dx$ e) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$ f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(x)\,\cos^2(x)\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$ h) $\displaystyle\int_0^3 \frac{3}{9+x^2}\,dx$ i) $\displaystyle\int \frac{10}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{\cos(3x)}{1+\operatorname{sen}^2(3x)}\,dx$ k) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,\sqrt{1-\ln^2 x}}$ l) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} t\,dt$

m) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$ n) $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ o) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,dx$

p) $\displaystyle\int \cos x\; e^{-x}\,dx$ q) $\displaystyle\int_0^2 x\,e^x\,dx$ r) $\displaystyle\int x^2\,\ln x\,dx$

s) $\displaystyle\int (x^2+1)\,e^{3x}\,dx$

2. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-2)(x-1)}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{5x^2-2x+6}{x(x+4)(x-1)}\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x-2}{2x^2+7x+3}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+29}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2+x}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\,dx$

3. Usando sustitución hiperbólica, calcular las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \sqrt{1+x^2}\,dx, \quad \text{b) } \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

4. Encontrar, en cada caso, el valor del área encerrada por la curva:

$$\text{a) } x^2+y^2=4, \quad \text{b) } x^2+\frac{y^2}{9}=1.$$

5. Una función f definida en un intervalo I (simétrico respecto al origen) se dice par si $f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in I$ y se dice impar si $f(x) = -f(-x) \quad \forall\, x \in I$.

   Sea f una función integrable en $[-a, a]$ con $a > 0$, probar que:

   i) si f es par entonces
   $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$$

   ii) si f es impar entonces
   $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$$

   iii) Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx$, b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,dx$, c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x\cos x + x^4 \operatorname{sen} x^3 + e^x)\,dx$.

5 Guía Complementaria: Prácticos I al IV.

1. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x^3\cos(x^2)\,dx$ b) $\displaystyle\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{3-x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\,\cos^3(x)\,dx$ e) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\,\ln(x)\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos(x)}\,dx$ i) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen}x}\cos x\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$ k) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\cos^4(x)\,dx$ l) $\displaystyle\int \left(x^{1/3}+x^{2/3}\right)dx$

m) $\displaystyle\int \left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ n) $\displaystyle\int 5t\sqrt{4-t^2}\,dt$ o) $\displaystyle\int (2t^2+1)^{\frac{1}{3}}\,t^3\,dt$

p) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\operatorname{sen}x+\cos x)\,dx$ q) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x\,dx$ r) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2x^3+3)\,dx$

s) $\displaystyle\int \left(e^{x/a}-e^{-x/a}\right)^2 dx$ t) $\displaystyle\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ u) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x\operatorname{sen}x\,dx$

v) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ w) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-3}$ x) $\displaystyle\int \frac{4x+1}{x^2-5x+6}\,dx$

2. Definición: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Una tal función se llama **función densidad de probabilidad**.

Definición: Dada una función densidad de probabilidad f se define su **función de probabilidad o función de distribución acumulada** F como:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \forall\, x\in\mathbb{R}\,.$$

a) Para cada una de las siguientes funciones f, determinar el valor de la constante c para que f resulte ser una función densidad y encontrar su función de distribución F.

i) $f(x)=\begin{cases} c & \text{si } x\in[0,1] \\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$ *ii)* $f(x)=\begin{cases} c\operatorname{sen}^2(\pi x) & \text{si } x\in[0,1/2] \\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases} c\,e^{-x/10} & \text{si } x\geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$

b) Supongamos que la probabilidad de que el tiempo de espera de un colectivo sea a lo sumo de t minutos está dada por $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx$ donde:

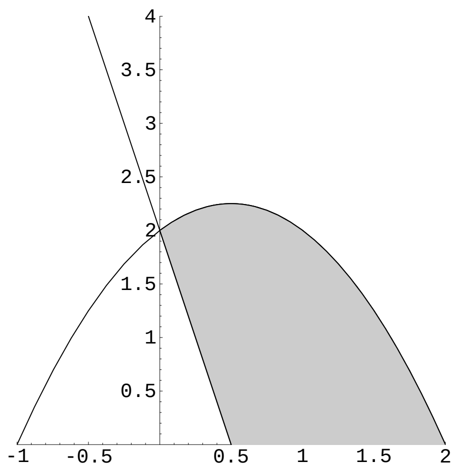
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}\, e^{-x/10} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

i)¿Cuál es la probabilidad de esperar más de 10' ?

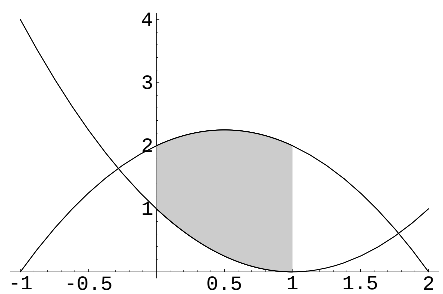
ii)¿Cuál es la probabilidad de esperar no más de 5' ?

iii)¿Cuál es la probabilidad de esperar entre 5' y 10' ? (Usar que f es la función densidad de probabilidad y lo obtenido en los puntos (i) y (ii)).

3. En cada caso determinar el área sombreada.

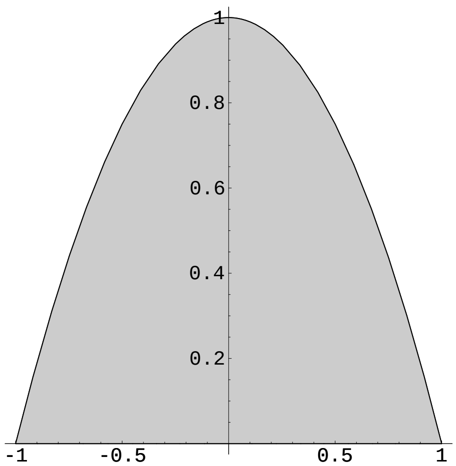


$y = -4x + 2, \;\; y = -x^2 + x + 2$



$y = -x^2 + x + 2, \quad y = (x-1)^2$

4. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Obtener los valores de las constantes a, b y c tales que verifiquen que el área sombreada sea 4.



5. Encontrar en cada caso el valor de x (si existe) tal que

$$\text{a) } \int_1^x \frac{du}{u} = 1 \qquad \text{b) } \int_x^{\pi/2} \cos t\, dt = \frac{1}{2} \qquad \text{c) } \int_{-x}^{x} e^{3t^2}\, t\, dt = 2 \qquad \text{d) } \int_{\ln(2)}^{x} e^{2t}\, dt = 1$$

6. Calcular $F'(x)$ en los siguientes casos:

$$\text{(a) } F(x) = \int_{2x}^{1} \cos^2 t\, dt, \qquad \text{(b) } F(x) = \int_0^{x^2} \frac{du}{1+u},$$

$$\text{(c) } F(x) = \int_0^{\operatorname{sen}(x)} \frac{dt}{2+t}, \qquad \text{(d) } F(x) = \int_1^{x^2} t^3\, dt + \int_{-x}^{2x} e^x (t^2 - 1)\, dt.$$

7. Si $v(t) = f'(t)\ \forall\, t$, encontrar el valor de la constante c tal que

$$\int_{\pi/2}^{b} v(\operatorname{sen}(x)) \cos(x)\, dx = f(\operatorname{sen}(b)) + c\,.$$

8. ¿Cuánto debe valer la constante a para que $e^x(x^2 - 2x + a)$ sea antiderivada de $e^x(x^2 + 2)$?

9. Un sólido de revolución está generado por la rotación del gráfico de $y = f(x)\ \forall\, x \geq 0$, alrededor del eje x. Si para cada $a > 0$ el volumen es $a^2 + a$, hallar la función f.

6 Práctico V: Ecuaciones Diferenciales. Variables separables y ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

1. Verificar que las funciones indicadas son soluciones de la ecuación correspondiente

   (a) $y'' + 2y' - 3y = 0$ $\quad y_1(x) = e^{-3x}, \quad y_2(x) = e^{x}$

   (b) $x^2y'' + \frac{3}{2}xy' - \frac{1}{2}y = 0, \quad x > 0,$ $\quad y_1(x) = x^{1/2}, \quad y_2(x) = x^{-1}$

   (c) $y' - 2xy = 1$ $\quad y(x) = e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}$

2. La ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$ tiene una solución $y = (2x-3)e^{-5x}$. Determinar las constantes a y b.

3. Determinar para qué valor de r es:

   (a) e^{rs} solución de $y'' + y' - 6y = 0$.

   (b) x^r $(x > 0)$ solución de $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ $(x > 0)$

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales. Graficar las soluciones para distintos valores de la constante, en los casos (c), (e) y (h).

   a) $y' = e^{x-y}$ $\quad$ b) $y' = e^{x+y}$ $\quad$ c) $\dfrac{dy}{dx} = y\tan x$

   d) $\text{sen}x\dfrac{dx}{dy} + \cos 2y = 0$ $\quad$ e) $y' = xy$ $\quad$ f) $y' = \dfrac{x^2}{y}$

   g) $y' = \dfrac{x - e^{-x}}{e^{y}}$ $\quad$ h) $y' = k(y-\alpha)$ $\quad$ i) $y' = \dfrac{-4x}{y}$

5. Hallar la solución de $1 + \dfrac{dz}{dx} = z$ que verifica $z(0) = 2$.

6. Determinar por lo menos dos soluciones del problema de valor inicial

$$y' = 3y^{2/3}, y(0) = 0.$$

7. La tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio ambiente (T_m).

   a) Determinar la ecuación diferencial que satisface la temperatura.

   b) Sea T_m constante e igual a 60^oF. La temperatura de una torta al ser sacada del horno es de 300^oF. Tres minutos más tarde es de 220^oF. ¿Cuánto tiempo tarda la torta en tener una temperatura de 66^oF? ¿ Qué temperatura tiene la torta 10 minutos después de haber sido sacada del horno ?

8. Un tanque tiene inicialmente 160 litros de agua pura. Una solución salada de concentración $q = 100g/l$ entra al tanque a razón de medio litro por minuto y se mezcla muy rápidamente. En una primera aproximación podemos suponer que la disolución es instantánea, de manera que la concentración de sal en cada instante de tiempo es la misma en todo el tanque.

   Simultáneamente se extrae agua del tanque a razón de medio litro por minuto. Sea $Q(t)$ la concentración instantánea dentro del tanque y V el volumen de agua dentro del mismo. Así, la cantidad de sal instantánea dentro del tanque es $s(t) = V\,Q(t)$.

   a) ¿Qué cantidad de sal entra por minuto al tanque?

   b) Plantear la ecuación diferencial que satisface $s(t)$.

   c) Hallar una función que describa la cantidad de sal en el tanque en función del tiempo.

   d) Al tender el tiempo t a infinito, la concentración de sal en el tanque debe tender a $100g/l$. Verificar que esto es así a partir de la función calculada en la parte c).

   e) ¿Cuándo se tendrán 50 gramos de sal en el tanque?

9. Un tanque que tiene una capacidad de 20 litros es llenado con agua en la cual hay disueltos 900 gramos de sal. Una solución conteniendo 100 gramos de sal por litro entra al tanque a razón de 2 litros por minuto y se mezcla muy rápidamente con la existente en el tanque. Simultáneamente la mezcla sale por otra abertura a la misma velocidad.

   a) Hallar la cantidad de sal en el tanque en todo tiempo.

   b) ¿Cuánta sal hay presente después de 10 minutos?

   c) ¿Cuánta sal hay presente después de un largo tiempo? (Rta: 2 kilogramos, pero debe verificarlo a partir de a))

10. Suponer que un vagón de tren se desliza sobre sus vías y que la única fuerza apreciable que experimenta es la resistencia del aire, proporcional a su velocidad. Entonces la fuerza F esta dada por $F = -kv$ $(k > 0)$.

a) Usar la ley de Newton $F = mdv/dt = ma$ para establecer la ecuación de movimiento del vagón (ecuación diferencial para la posición en función del tiempo). Resolver esta ecuación diferencial.

b) ¿Se detendrá el vagón en algún momento? Justificar.

c) Si la velocidad en el instante $t = 0$ es $v(0) > 0$, ¿se alejará el vagón infinitamente? Justificar.

d) Esbozar los gráficos de la posición, velocidad y aceleración del vagón en función del tiempo suponiendo que $x(0) = 0$ y $v(0) > 0$.

11. Cuando una epidemia de una cierta enfermedad azota a una población, la velocidad de difusión de la misma es proporcional al producto de la cantidad de personas que ya han sido afectadas —que por lo tanto pueden transmitir la enfermedad— y de la cantidad de personas que todavía no han sido afectadas —que pueden ser contagiadas. La situación no es tan simple en realidad, pues hay que considerar aquellos que ya se curaron y quedaron inmunizados, además de, si la enfermedad es mortal, aquellos que murieron. No obstante, ésta es una buena aproximación para la fase temprana de propagación de una enfermedad.

    Supongamos que un pueblo tiene 40.000 personas y que una epidemia de fiebre amarilla se desata en él. Al cabo de 10 días hay 4.000 personas afectadas y al cabo de 20 días hay 10.000 personas afectadas. ¿Cuándo habrá 20.000 personas afectadas? ¿Cuándo 50.000? ¿Cuántas personas afectadas habrá en 40 días?

12. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

    (a) $y' - 3y = x^3 - 5x + 2$,

    (b) $2y' - 2y = 1$,

    (c) $xy' + \frac{y}{2} = 0$,

    (d) $y' + 2y = \frac{1}{x} + 2\ln x$,

    (e) $y' = x + y$

    (f) $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}} \operatorname{tg} x$.

13. Hallar la curva y que pase por el punto $(0, -3)$, de modo que la pendiente de la tangente en cada punto sea igual a la curva y en el punto aumentada en 3 veces la variable independiente.

7 Práctico VI: Vectores, Rectas y Planos en el Espacio.

1. Calcular $V+W$, $2V-3W$, $||V||^2$, $\langle V,W\rangle$, el coseno del ángulo que forman V y W y $V\times W$ para:

   (a) $V=(1,1,1)$, $\quad W=(-1,-1,-1)$,

   (b) $V=i+j$, $\quad W=j-k$,

   (c) $V=i-2j+k$, $\quad W=i+j-2k$,

   donde $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$ y $k=(0,0,1)$ son los vectores unitarios sobre los ejes de $\mathbb{R}^3$.

2. Dar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto P_0 y tiene dirección V.

   (a) $P_0=(3,-1,2)$, $\ V=(2,3,1)$.

   (b) $P_0=(1,1,1)$, $\ V=(0,0,1)$.

3. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1=(1,1,1)$ y $P_2=(3,-2,0)$.

4. Dos personas determinan la ecuación de una recta y obtienen las siguientes respuestas:

   $$X_1(t)=(2,-4,-4)t+(3,2,-3), \qquad X_2(t)=(0,8,3)+t(1,-2,-2)$$

   ¿Puede explicar lo ocurrido?

5. Sean V y W vectores no paralelos en $\mathbb{R}^2$. Graficar:

   (a) $\left\{\, tW\ :\ t\in\mathbb{R}^2 \,\right\}$.

   (b) $\left\{\, sV+tW\ :\ s\,,\, t\in\mathbb{R}^2 \,\right\}$.

   (c) Los vectores X que verifican $\langle X,V\rangle=\langle X,W\rangle$.

6. Completar:

   Si un bote tiene velocidad V respecto del agua y el agua tiene velocidad W respecto de tierra, entonces la velocidad del bote respecto de tierra no es $||V||+||W||$ sino...........................

7. Una molécula de metano tiene un átomo de carbono en $(0,0,0)$ y átomos de hidrógeno en $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$ y $(-1,-1,-1)$. Encontrar:

   a) la distancia entre los átomos de hidrógeno.

b) el ángulo entre vectores que parten del átomo de carbono a los átomos de hidrógeno.

8. Encontrar una ecuación del plano que:

   a) pasa por el punto $P_0 = (1, 2, -1)$ y es perpendicular a $N = i + j$.

   b) pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralelo al plano $x + 2y + z = 0$.

   c) pasa por los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1,)$.

9. a) Encontrar una ecuación de la forma $ax + by + cz = d$ que represente al plano $X = (1, 0, 1) + t(2, 0, 0) + s(1, 2, -1)$.

   b) Encontrar una ecuación de la forma $X = P + tV + sW$ que represente al plano $2x - y - z = 1$.

10. Explicar por qué un plano no puede:

    a) contener los puntos $(1, 2, 3)$ y $(2, 3, 4)$ y ser perpendicular a $N = i + j$.

    b) ser perpendicular a $N = i + j$ y ser paralelo a $V = i + k$.

    c) contener al origen y satisfacer una ecuación $ax + by + cz = 1$.

11. Encontrar el vector proyección V_W de V a lo largo de W , y calcular su longitud.

    a) $V = (4, 2, 4)$ y $W = (1, -1, 0)$.

    b) $V = (1, -1, 0)$ y $W = (4, 2, 4)$.

12. Dar la distancia del plano $x + y - z = 1$ al punto P para:

    a) $P = (0, 0, 0)$;

    b) $P = (1, 1, -1)$.

13. Completar:

    Si X_0 es el punto del plano $x + y + z = 0$ más próximo a $Q = (2, 1, 1)$ entonces $(X_0 - Q)$ es paralelo al vector ....

    El punto $P = Q + tN = (2 + t, 1 + t, 1 + t)$ está en el plano si $t =$.................... y por lo tanto $P = (...., ..., ...)$. La distancia de Q al plano es ....

14. a) Completar:

    Los planos $2x-2y+z=1$ y $2x-2y+z=3$ son paralelos porque ....

    b) Encontrar un punto Q perteneciente al primer plano y un número t_0 tal que $Q+t_0N$ pertenezca al segundo plano, donde N es vector unitario normal a este plano.

    c) Completar:

    La distancia entre los planos es $||t_0N||=$......................

15. Determine el ángulo entre los planos

$$x-y+z=1 \qquad 2x+y-z+1=0.$$

16. Sea π el plano de ecuación

$$X=(1,-1,0)+t(2,0,3)+s(2,-1,1), \quad s,t\in\mathbb{R}.$$

    (a) Dar la ecuación cartesiana del plano π.
    (b) Dar la ecuación de alguna recta que esté completamente contenida en el plano π.
    (c) Hallar la distancia del plano π al origen.
    (d) Dar la ecuación cartesiana de un plano perpendicular a π que pasa por el punto $Q=(-1,0,1)$.

17. Sea π_1 el plano en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x-z=2$.

    (a) Dar una ecuación vectorial del plano π_1.
    (b) Sea π_2 el plano de ecuación $x+\sqrt{2}\,y-z=1$. Encontrar el ángulo entre los planos π_1 y π_2.

8 Práctico VII: Funciones de Varias Variables.

1. Encontrar las derivadas parciales de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$ b) $g(x,y) = e^x \operatorname{sen}(xy)$

   c) $h(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ d) $f(x,y,z,w) = x^2 e^{2y+3z}\cos(4w)$

   e) $g(x,y,z) = z \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ f) $h(u,v,w) = \dfrac{u^2-v^2}{v^2+w^2}$

2. Encontrar f_x y f_y para

   a) $f(x,y) = e^{x+7y}$ b) $f(x,y) = \ln(x+7y)$ c) $f(x,y) = (ax+by)^{10}$

   d) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y v(t)\,dt$

3. Si $f(x,y) = e^{cx}\,g(y)$, en cada caso, hallar una función g que verifique:

   (a) $f_x + f_y = 0$,   (b) $f_y = f_{xx}$,   (c) $f_x = 6f_y$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Probar que si $z = \dfrac{y^2}{3x} + f(xy)$, entonces

$$x^2 z_x - xyz_y + y^2 = 0.$$

5. Usando la regla de la cadena para funciones de dos variables, encontrar $\dfrac{df}{dt}$, para

   (a) $f(x,y) = x^2+y^2, \quad x = t, \quad y = t^2.$

   (b) $f(x,y) = xy, \quad x = 1-\sqrt{t}, y = 1+\sqrt{t}.$

   (c) $f(x,y,t) = \dfrac{x}{y} + tx, \quad x = e^t, \quad y = e^{2t}.$

   (d) $f(x,y) = \displaystyle\int_{x^3}^{y^2} \operatorname{arctg}(u^2)\,du, \quad x = \sqrt{t}, \quad y = e^{2t}.$

6. Verificar que si $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ entonces $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

7. Para cada una de las siguientes funciones f, calcular el gradiente $\nabla f(x,y)$ y la derivada direccional, $D_U f(P)$, en la dirección de U en el punto P ($D_U f(P) = \langle \nabla f(P), U\rangle$, con $||U|| = 1$).

   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2, \qquad U = (\sqrt{3}/2, 1/2), \qquad P = (1,0).$

(b) $f(x,y) = e^x \cos y, \qquad U = (0,1), \qquad P = (0, \pi/2).$

(c) $f(x,y) = y^{10}, \qquad U = (0,-1), \qquad P = (1,-1).$

8. a) Encontrar la derivada direccional de $f(x,y,z) = \ln \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ en el punto $(3,4,12)$ y en la dirección de $3i + 6j - 2k$.

   b) ¿En qué dirección hay que moverse, partiendo de $(1,1)$, para obtener la más alta tasa de crecimiento de la función $(x+y-2)^2 + (3x-y-6)^2$?

9. La función $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y + z$ expresa la temperatura en el punto (x,y,z) en grados. Un insecto se encuentra en el punto $(0,0,0)$ y quiere buscar una zona de más calor. ¿En qué dirección deberá moverse para lograrlo más rápidamente? Si se desplaza por el eje de las y en dirección positiva ¿crece la temperatura? Dar una dirección en la que decrezca. ¿En qué dirección esta función tiene mínima tasa de crecimiento en el punto $(0,0,0)$?

10. Hacer un gráfico aproximado de las siguientes funciones usando curvas de nivel.

    (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, (b) $f(x,y) = y^2 - x^2$, (c) $h(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$,

    (d) $h(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, (e) $f(x,y) = e^y$.

11. Dadas las siguientes funciones, dar su dominio y evaluarlas en los puntos $(0,0)$, $(-1,2)$, $(2,1)$ y $(1,1)$, si éstos pertenecen a su dominio. Encontrar el vector normal y el plano tangente al gráfico en el punto P. Graficar en los casos a) y d).

    a) $z = x^2 + y^2$; $P = (3,4,25)$.

    b) $f(u,v) = u \cos v$; $P = (1, \pi, -1)$.

    c) $f(s,t) = \sqrt{2 - s^2 - t^2}$; $P = (0,-1,1)$.

    d) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$; $P = (0,1,0)$.

    e) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$; $P = (1,-2,2)$.

    f) $z = x/\sqrt{x^2+y^2}$; $P = (3,-4,3/5)$.

12. Decidir si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados. Considerar en cada caso una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tenga derivadas parciales continuas.

    a) Existe un vector unitario U tal que $D_U f(P) = 0$.

    b) Existe un vector unitario U tal que $D_U f(P) = \nabla f(P)$.

    c) Si $U = (0,-1)$ entonces $D_U f = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

13. Encontrar una superficie $z = f(x, y)$ tal que para cada $c \geq 0$ la curva de nivel sea un círculo con centro en $(1, 1)$ y radio $2\sqrt{c}$. Calcular el gradiente de f en $(0, 0)$.

14. Encontrar todos los puntos críticos y determinar si éstos son puntos de mínimo, máximo o de silla.

    a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

    b) $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

    c) $h(x, y) = \ln(x^3 - 3x + y^3 - 3y)$

    d) $g(s, t) = s^2 + 4st + 3t^2 - 6s - 12t$

    e) $f(\theta, r) = \theta^2 r^2 - \theta$

    f) $w(x, y) = -x^2 + 2xy - 3y^2$

15. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x^2 y + 4$.

    (a) Encontrar todos los puntos críticos de la función f y determinar si son puntos de mínimo, máximo o de silla.

    (b) Hallar la ecuación cartesiana del plano tangente al gráfico de la función f en el punto $(1, 0, 5)$.

9 Guía Complementaria: Prácticos V al VII.

1. (a) Hallar la ecuación diferencial que verifica la función $f(x)$ sabiendo que $f(x) = 2 + \int_1^x f(t)\, dt$.

   (b) Hallar todas las soluciones de la ecuación diferencial obtenida en (a) y la solución particular que corresponde a la $f(x)$ de la parte (a).

2. Encontrar todas las posibles funciones f contínuas definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$ tales que $f^2(x) + (f'(x))^2 = 1$. Luego hallar la solución particular que verifica $f(0) = 0$.

3. Sea $V(y)$ el volumen (en m^3) de líquido contenido en un depósito cilíndrico. Sean A el área de la base del cilindro e y la altura del volumen ocupado por el líquido.

   Si el cilindro tiene un orificio de área A_0 (en m^2) en su base, la velocidad de descarga a través del orificio viene dada por la ecuación diferencial

   $$\frac{dV}{dt} = -cA_0\sqrt{y(t)}$$

   donde $c = 2,65 m^{1/2}/s$.

   (a) Calcular $\dfrac{dV}{dy}$.

   (b) Demostrar que: $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{2,65A_0}{A}\sqrt{y}$

   (c) i) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial obtenida en (b).

   ii) Si el nivel del líquido ha bajado de $10m$ a $9m$ en $10min$ (o sea $600s$), dar la solución particular y hallar el valor de t para el cual el nivel desciende de $10m$ a $5m$.

4. Demostrar que la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ con la condición inicial $y(0) = 0$ tiene infinitas soluciones, pero si $y(0) \neq 0$ entonces no existe solución. Graficar las soluciones para varios valores de la constante.

5. Encontrar una ecuación diferencial del tipo $y'' + ay' + by = 0$ de modo que cada una de las siguientes funciones sea solución:

   (a) $y = xe^{-x}$

   (b) $y = 1 + x$

   (c) $y = e^x + e^{-x}$

   (d) $y = 2e^{2x} - 3e^{3x}$

6. Una bala disparada horizontalmente en un medio viscoso tiene un desplazamiento de su posición inicial dado por $x = x(t)$ en el instante t. Partiendo de principios de Física se puede demostrar teóricamente que x satisface la ecuación diferencial $mx'' + kx' = 0$, donde m es la masa de la bala y k una constante positiva que depende de la viscosidad del medio.

   a) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

   b) Encontrar la solución particular que verifica $x(0) = 0$ y $x'(0) = v_0$.

   i) La solución obtenida está acotada por $v_0 m/k$. ¿ Cuál es el efecto de aumentar la constante de viscosidad? ¿y el de aumentar la masa de la bala?

   ii) ¿A qué valor tiende la velocidad de la bala cuando $t \to \infty$?

   iii) Calcular la aceleración de la bala. ¿Cuál es el efecto en ésta si se aumenta k? ¿Si se aumenta m?

7. Una reacción química de segundo orden envuelve la interacción (colisión) de una molécula de una sustancia P con una molécula de una sustancia Q para producir una molécula de una nueva sustancia X.

   Sean p y q las concentraciones iniciales de P y Q, respectivamente, y sea $x(t)$ la concentración de X en el instante t. Entonces $(p - x(t))$ y $(q - x(t))$ son las concentraciones de P y Q en el tiempo t. Suponer que la velocidad de reacción es descripta por la ecuación:

   $$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)(q - x)$$

   donde α es una constante positiva.

   Encontrar $x(t)$ dada la condición $x(0) = 0$.

   Ayuda: Considerar los dos casos: $p = q$ y $p \neq q$.

   Rta. $x(t) = \begin{cases} p^2\alpha t/(p\alpha t + 1) & \text{si } p = q, \\ \dfrac{pq(e^{\alpha(q-p)t} - 1)}{qe^{\alpha(q-p)t} - p} & \text{si } p \neq q. \end{cases}$

8. Si la ecuación de un plano está dada por $x + 2y - 2z + 7 = 0$, hallar:

   (a) un vector unitario normal al plano.

   (b) los puntos en que el plano corta a los ejes.

   (c) la distancia del plano al origen.

   (d) la distancia del plano a $P = (1, 3, 0)$.

   (e) la ecuación de un plano que sea paralelo al plano dado y que pase por el origen.

9. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Calcular:
   i) $\phi(1/2, 0)$ ii) $\phi(1/4, 1/2)$ iii) $\phi(1/6, -1/6)$ iv) $\phi(-1/7, 1/7)$
   (b) ¿Es ϕ continua en el origen? Justificar.

10. Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones
    a) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ b) $f(x,y) = \int_x^y e^{\operatorname{sen}(t)}dt$ c) $f(x,y) = \ln(x \operatorname{tg}(y))$

11. Hallar la derivada direccional de f en la dirección de U en el punto P donde
    a) $f(x,y) = 3x^2 - 6y^2$, $P = (8,2)$ y U forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje x.
    b) $f(x,y) = y + x\cos(xy)$, $P = (0,0)$ y U forma un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$ con el eje x.

12. Sea $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{y}$.
    (a) Dar el dominio de f.
    (b) Calcular el gradiente de f.
    (c) Sea $g(x) = f(x,2)$. Calcular: *i)* $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,2)}$, *ii)* $g'(x_0)$.

13. Hallar la recta normal a la superficie $z = e^{x\cos(y)}$ en el punto $P = (1, \pi, e^{-1})$.

14. Hallar el plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 29$ en los puntos:
    i) $P = (2,3,4)$, ii) $Q = (4,2,3)$.

15. (a) Demostrar que $z = \sqrt{x^2+y^2}$ satisface la ecuación diferencial $xz_x + yz_y = z$.
    (b) Demostrar que $z = \ln\sqrt{u^2+v^2}$ satisface la ecuación diferencial $uz_u + vz_v = 1$.

16. Si $z = \ln(x^2+y^2)$ dar su dominio y calcular sus derivadas parciales. Si $x = e^{-t}$ e $y = e^t$, calcular $\frac{dz}{dt}$ usando la regla de la cadena.

17. Si $z = 2x^2y$ y además $x = u^2$ e $y = uv$, hallar las derivadas parciales de z con respecto a u y a v.

18. La temperatura de un punto (x,y,z) está dada por $T = x^2y + yz - e^{xy}$. Indicar la dirección de máximo crecimiento en el punto $(1,1,1)$.

19. Hallar los puntos críticos de $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$; clasificarlos como puntos de máximo, mínimo o de silla.