Probabilidad y Estadística
Profesorados y Licenciatura en Computación

Guía N°3: Variables aleatorias discretas y distribuciones de probabilidad.

Ejercicio 1:
Sea X = número de neumáticos de un automóvil, seleccionado al azar, que tenga baja la presión.
a) ¿Cuál de las siguientes tres funciones $p(.)$ es una función de distribución de probabilidad para X? Justifique.

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.3	0.2	0.1	0.05	0.05
$p(x)$	0.4	0.1	0.1	0.1	0.3
$p(x)$	0.4	0.1	0.2	0.1	0.3

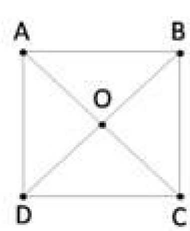
b) Con la función de distribución de probabilidad obtenida en (a), calcular: $P(2 \leq X \leq 4)$, $P(X \leq 2)$ y $P(X \neq 0)$.
c) Obtener la función de distribución acumulada de X.
d) Si $p(x) = k\ (5 - x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4$, ¿cuál debe ser el valor de la constante k para que p sea una función de distribución de probabilidad?

Ejercicio 2:
Un negocio de computadoras que atiende pedidos por correo tiene seis líneas telefónicas. Denotemos por X el número de líneas en uso en un momento específico. Supongamos que la función de distribución de probabilidad de X está dada en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.06	0.04

Calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:
a) A= A lo sumo tres líneas están en uso.
b) B= Menos de tres líneas están en uso.
c) C= Por lo menos tres líneas están en uso.
d) D= Entre 2 y 5 líneas están en uso.
e) E= Entre 2 y 4 líneas no están en uso.
f) F= Por lo menos 4 líneas no están en uso.
g) Obtener la función de distribución acumulada de X.

Ejercicio 3:
Silvina vive en el punto O del siguiente diagrama y tiene cuatro amigos que viven en A, B, C y D. Un día Silvina decide ir de visita, así que lanza al aire dos veces una moneda para decidir a cuál de los cuatro ir a visitar. Una vez que está en la casa de un amigo, o regresa a su casa o continúa a una de las dos casas adyacentes, teniendo para cada una de las tres posibilidades una probabilidad de 1/3. Así continúa Silvina de visita a amigos hasta que regresa a casa.
a) Sea X= número de visitas que realiza. Obtener la función de distribución de probabilidad de X.
b) Obtener la función de distribución acumulada de X.
c) Sea Y= número de segmentos que transita Silvina. Obtener la función de distribución de probabilidad de Y.



Ejercicio 4:
Una compañía de seguros ofrece a sus tenedores de pólizas varias opciones diferentes para el pago de primas. Para un tenedor seleccionado al azar, sea X = número de meses entre pagos sucesivos. La función de distribución acumulada de X es como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.30 & 1 \leq x < 3 \\ 0.40 & 3 \leq x < 4 \\ 0.45 & 4 \leq x < 6 \\ 0.60 & 6 \leq x < 12 \\ 1 & 12 \leq x \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la función de distribución de probabilidad de X?
b) Sólo con el uso de la función de distribución acumulada, calcule $P(3 \leq X \leq 6)$ y $P(4 \leq X)$.

Ejercicio 5:
Sea X= resultado cuando un dado no cargado se hace rodar una vez.
a) Calcular la esperanza de X y de $1/X$.
b) Si antes de arrojar el dado se ofrece al tirador retirarse con $(1/3.5)$ dólares o jugar obteniendo $h(X) = (1/X)$ dólares, ¿le conviene retirarse o jugar? Justifique.

Ejercicio 6:
Un distribuidor de aparatos electrodomésticos vende tres modelos de diferentes congeladores verticales con capacidad de 13.5, 15.9 y 19.1 pies cúbicos de espacio de almacenaje, respectivamente. Sea X la cantidad de espacio de almacenaje comprado por un cliente que va a comprar un congelador. Supongamos que X tiene la siguiente función de distribución de probabilidad:

x	13.5	15.9	19.1
$p(x)$	0.2	0.5	0.3

a) Calcular $E(X)$, $E(X^2)$ y $V(X)$.
b) Si el precio de un congelador que tiene una capacidad de X pies cúbicos es de $25X - 8.5$, ¿cuál es la esperanza y varianza del precio pagado por un cliente que va a comprar un congelador?
c) Suponga que mientras la capacidad nominal de un congelador es X, la capacidad real es $h(X) = X - 0.01X^2$. ¿Cuál es la capacidad real esperada del congelador comprado por un cliente?

Ejercicio 7:
Suponga que sólo el 20% de los automovilistas se detienen por completo en un cruce donde hay un semáforo con luz roja intermitente en todas las direcciones, cuando no haya otros automóviles visibles.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que de 20 automovilistas, seleccionados al azar, que lleguen al cruce en estas condiciones:
i) a lo sumo 5 se detengan por completo?
ii) exactamente 5 se detengan por completo?
iii) por lo menos 5 se detengan por completo?
b) ¿Cuántos, de los siguientes 20 automovilistas, espera el lector que se detengan por completo?

Ejercicio 8:
Un tipo particular de raqueta de tenis se fabrica en tamaños mediano y extragrande. El 60% de todos los clientes, de cierta tienda, buscan el tamaño extragrande.
a) Entre 10 clientes seleccionados al azar que desean ese tipo de raqueta, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 6 busquen el tamaño extragrande?
b) Entre 10 clientes seleccionados al azar que desean ese tipo de raqueta, ¿cuál es la probabilidad de que el número de clientes que buscan el tamaño extragrande esté dentro de una desviación estándar del valor medio?
c) La tienda tiene actualmente 6 raquetas de cada modelo. ¿Cuál es la probabilidad de que los siguientes diez clientes que buscan esta raqueta puedan comprar el modelo que buscan, de entre la existencia actual?

Ejercicio 9:
De todas las reparaciones hechas en aparatos de TV en cierta tienda, el 80% se hace en aparatos que ya no tienen garantía.
a) Entre 20 aparatos llevados a reparación, ¿cuál es el número esperado de aparatos que ya no tengan garantía?
b) Entre 20 aparatos llevados a reparación, ¿cuál es el número esperado de aparatos que tienen garantía?
c) Entre 20 aparatos llevados a reparación, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos el 75% ya no tengan garantía?
d) Suponga que hay 12 aparatos ahora en la tienda, de los cuales 4 tienen garantía. Si 5 de los 12 son llevados a reparación en orden aleatorio y se reparan en el mismo orden, ¿cuál es la la función de distribución de probabilidad de $X=$ número de aparatos con garantía entre los 5 reparados? ¿Cuánto vale $E(X)$ y $V(X)$?

Ejercicio 10:
Cada uno de 10 refrigeradores de cierto tipo ha sido devuelto a un distribuidor debido a la presencia de un ruido oscilante agudo cuando está funcionando. Supongamos que 7 de esos 10 tienen compresores defectuosos y los otros tienen problemas menos serios. Si se examinan 6 refrigeradores al azar, sea $X=$ número de refrigeradores que tienen el compresor defectuoso entre los 6 examinados.
a) Calcular: i) $P(X = 1)$ ii) $P(X \geq 4)$ iii) $P(3 \leq X \leq 5)$
b) ¿Cuánto vale $E(X)$ y $V(X)$?

Ejercicio 11:
Suponga que $p = P(\text{nace niño}) = 0.5$. Una pareja desea tener exactamente dos niñas en su familia. Tendrán hijos hasta que se satisfaga esta condición.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la familia tenga x hijos varones?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la familia tenga 4 hijos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la familia tenga a lo sumo 4 hijos?
d) ¿Cuántos hijos varones se esperaría que tenga esta familia? ¿Cuántos hijos se esperaría que tenga esta familia?

Ejercicio 12:
Suponga que $X=$ número de tornados observados, en una región particular, durante un período de un año tiene distribución de Poisson con $\lambda = 8$.
a) Calcular: $P(X \leq 5)$, $P(6 \leq X \leq 9)$, $P(10 \leq X)$ y $P(X \geq 1)$.
b) ¿Cuántos tornados se puede esperar que se observen durante un período de un año? ¿Cuál es la desviación estándar de X?

Ejercicio 13:
Un estacionamiento tiene dos entradas. Los coches llegan por hora a la entrada I de acuerdo con una distribución Poisson de parámetro $\lambda = 3$ y a la entrada II de acuerdo con una distribución Poisson de parámetro $\lambda = 4$. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 coches lleguen al estacionamiento durante una hora dada? (Se supone que los números de coches que llegan a las dos entradas son independientes).

Ejercicio 14:
Se supone que el número de defectos Y (por cm) de la producción diaria de cierto tipo de soga tiene una distribución de Poisson con una media de 2. Cuando se vende la soga, la ganancia por cm está dada por $X = 50 - 2Y - Y^2$. Dar la ganancia esperada por cm.

Ejercicio 15:
a) Suponga que X es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica de parámetros (n, M, N). Demuestre que $E(X) = n\frac{M}{N}$ y $V(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.
b) Suponga que X es una variable aleatoria con distribución binomial negativa con parámetros r y p. Demuestre que $E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$ y $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.