Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 1 - 2018

Problema 1: Reducir las siguientes operaciones a números complejos de la forma $x+iy$ y representarlos geométricamente en el plano $\mathbb{C}$.

a) $(2-3i)(2+3i)$ *b)* $\dfrac{(3+i)}{3-4i}-\dfrac{(2-i)}{8i}$ *c)* $(1-i)^4$

Problema 2: En cada caso determinar $\overline{z}$, $\mathrm{Re}(\,z)$, $\mathrm{Im}(\,z)$ y $|z|$

a) $z=4i-3$

b) $z=-2i$

c) $z=(4i)^2$

d) $z=\dfrac{-1+3i}{2-i}$

Problema 3: Resolver la ecuación $z^2+z+1=0$ para $z=(x,y)$.

Problema 4: En cada caso hallar el valor de $\arg(z)$ y $\mathrm{Arg}(z)$:

a) $z=\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$, *b)* $\dfrac{i}{-2-2i}$, *c)* $z=(\sqrt{3}-i)^6$.

Problema 5: Probar las siguientes y utiles desigualdades:

a) $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$

b) $|z_1-z_2|\le|z_1-z_3|+|z_2-z_3|$

c) Si $|z_2|\neq|z_3|$ entonces $\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right|\le\frac{|z_1|}{||z_2|-|z_3||}$

d) $\sqrt{2}|z|\ge|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$

Problema 6: Representar gráficamente en el plano $\mathbb{C}$ los siguientes conjuntos y determinar para cada caso: el interior del conjunto y su frontera; cuáles constituyen dominios (es decir, son abiertos y conexos) o regiones. Indique si estos conjuntos son abiertos, cerrados, acotados, compactos.

a) $|z|=1$

b) $\mathrm{Im}\,(z)=0$

c) $|3z+2|<1$

d) $|z-(2+i)|\le 1$

e) $|z-4|\ge|z|$

f) $0<\mathrm{Arg}z\le\pi$

g) $\{\mathrm{Im}\,(z)\ge 2\}\cup\{\mathrm{Re}\,(z^2)>0\}$

h) $\mathrm{Im}\,\big(z+1/z\big)=0$

i) $0<\mathrm{Arg}(z)<\pi/4 \quad (z\neq 0)$

j) $\pi/4<\mathrm{Arg}(z)\le\pi/2 \quad (z\neq 0)$

Problema 7: Usar las formas polares y exponenciales para simplificar las siguientes expresiones. Hallar en cada caso el módulo y el argumento principal del resultado. Represente geométricamente estos números.

a) $i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)$

b) $\dfrac{3}{(\sqrt{3}-i)^2}$

c) $(1+i)^3$

d) $i^5\cdot i^3$

e) $(1+\sqrt{3}i)^{-10}$

Problema 8: Hallar todas las raíces de las siguientes ecuaciones y representarlas en el plano $\mathbb{C}$. Indique en cada caso cuál es la raíz principal.

a) $z^5 - 32 = 0$

b) $z^2 - 2i = 0$

c) $z^3 + 1 = 0$

d) $z^6 - 1 = 0$

e) $(-8i)^{1/3}$

f) $8^{1/6}$

Problema 9: Hallar las raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$ y usarlas para factorizar $z^4 + 4$ en producto de polinomios de grado dos con coeficientes reales.

Problema 10: Usando el hecho de que $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre los puntos z_1 y z_2, determinar qué curvas describen los siguientes conjuntos:

a) $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$,

b) $|z - 1| = |z + i|$,

c) $z^2 + \overline{z}^2 = 2$ (recuerde las expresiones para Re(z), Im(z)),

d) $|z|^2 - 2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$, donde R es una constante.

Problema 11:

a) Probar la identidad

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \qquad z \neq 1.$$

Ayuda: Tomar $s = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ y calcular $(1 - z)s$.

b) Mostrar que si c es una raíz n-ésima de la unidad, $c \neq 1$, entonces

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = 0$$

c) Probar la identidad trigonométrica de Lagrange:

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n + \frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\theta/2)}$$