Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 2 - 2018

Problema 1: Describir el dominio de definición de las siguientes funciones y representarlo en el plano-z:

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ b) $f(z) = \dfrac{\overline{z}-1}{z^2+i}$ c) $f(z) = \dfrac{1}{1-|z|^2}$

d) $f(z) = \dfrac{z}{z+\overline{z}}$ e) $f(z) = \text{Arg}\left(\dfrac{1}{z}\right)$

Problema 2: Demostrar que toda sucesión de números complejos z_n convergente es acotada y la sucesión formada por los módulos correspondientes es convergente.

Problema 3: Calcular $\lim_{n\to\infty} z_n$, con $z_n \in \mathbb{C}$, de las siguientes sucesiones:

a) $z_n = \dfrac{i^n}{n}$ b) $z_n = \dfrac{1}{(1+i)^n}$ c) $z_n = \dfrac{(1+i)^n}{n}$

d) $z_n = \dfrac{n^2+in}{n^2+i}$ e) $z_n = \dfrac{3n+5}{in^2+2in-1}$ f) $z_n = \text{Arg}\left(-1+\dfrac{i}{n}\right)$

Problema 4: Expresar las siguientes funciones en la forma $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$:

a) $f(z) = z^3 + z - 1$ b) $f(z) = \dfrac{\overline{z}-1}{z^2+1}$

c) $f(z) = e^{3z}$ d) $f(z) = e^z + e^{-z}$

e) Bonus 1: Sea $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i2x(1-y)$, donde $z = x + iy$. Exprese $f(z)$ en términos de z.

f) Bonus 2: Use la representación exponencial para un número complejo y exprese la función $f(z) = z + 1/z = u + iv$. ¿Para qué valores de z la función f es una función a valores reales?

Problema 5: Pruebe que no existe el límite de la función

$$f(z) = (\text{sen}\,(x) + i\text{sen}\,(y))/(x-iy), \text{ cuando } z \to 0.$$

Problema 6: Probar que si $f(z)$ y $g(z)$ son continuas en $z_0 \in \mathbb{C}$ entonces las funciones $f+\alpha g$, con $\alpha \in \mathbb{C}$, fg y f/g cuando $g \neq 0$, son continuas en z_0. Probar que la composición de funciones continuas es continua.

Problema 7: La función $z \mapsto z^3$ es claramente continua como producto de la función $z \mapsto z$ que es obviamente continua (pruébelo!). Dé una demostración directa usando que

$$z^3 - w^3 = (z-w)(z^2+w^2+zw)\ , z, w \in \mathbb{C}\ .$$

¿Puede delinear una estrategia para demostrar que cualquier potencia entera es continua?

Problema 8: Hallar los siguientes límites:

a) $\lim_{z\to i} \dfrac{iz^3-1}{z+i}$ c) $\lim_{z\to\infty} \dfrac{z^2+1}{z+1}$ e) $\lim_{z\to -\pi i} = \exp\left(\dfrac{z^2+\pi^2}{z+\pi i}\right)$

b) $\lim_{z\to\infty} \dfrac{4z^2}{(z-1)^2}$ d) $\lim_{z\to 1-i} (z + 2i\text{R}e(z))$ f) $\lim_{z\to 2i} = \dfrac{z^2+9}{2z^2+8}$

Problema 9: Para cada una de las siguientes funciones complejas, usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para determinar si existe f'. Si existe la derivada, calcularla:

a) $f(z) = \overline{z}$

b) $f(z) = \overline{z}^2$

c) $f(z) = \mathrm{I}m(z)$. Idem con $\mathrm{R}e(z)$.

d) $f(z) = |z|^2$

e) $f(z) = iz + 2$

f) $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

g) $f(z) = \exp(z)$

h) $f(z) = \cos x \, \cosh y + i \,\mathrm{sen}\, x \,\mathrm{senh}\, y$

i) $f(z) = \cos x \, \cosh y - i \,\mathrm{sen}\, x \,\mathrm{senh}\, y$

Problema 10: Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ funciones de valores reales cuyas derivadas parciales de primer orden existen en un entorno ε de un punto $(x, y) \neq (0, 0)$ y son continuas en dicho punto.

a) Usando la transformación de coordenadas Cartesianas a polares y la regla de la cadena muestre que:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{sen}\,(\theta), \qquad u_\theta = -\frac{\partial u}{\partial x} r\mathrm{sen}\,(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos(\theta).$$

b) Muestre que si las funciones u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (en Cartesianas) en (x, y) entonces satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}. \tag{1}$$

c) Recíprocamente, resuelva las ecuaciones del ítem (a) y sus similares para v despejando $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ en función de $\partial u/\partial r$, $\partial u/\partial \theta$, $\partial v/\partial r$ y $\partial v/\partial \theta$ y muestre que si las ecuaciones (**??**) se satisfacen entonces se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (en Cartesianas).

Problema 11: Considere una varilla (infinitamente larga y delgada) uniformemente cargada. El campo eléctrico en cualquier punto $\mathbf{r}$ es de magnitud inversamente proporcional a la distancia a la varilla y tiene como dirección a la perpendicular a la varilla que pasa por el punto.
Teniendo en cuenta la correspondencia entre el complejo $z = x + iy$ y el par cartesiano (x, y), considere un plano perpendicular a la varilla:

a) muestre que para cualquier punto z del plano el campo eléctrico puede escribirse como $E(z) = 1/(\overline{z} - \overline{z_o})$ —en unidades apropiadas— donde z_o es la posición de la varilla en el plano.

b) considere tres varillas paralelas idénticas ubicadas perpendicularmente en el plano en los puntos distintos z_1, z_2 y z_3. Determine los puntos donde el campo total se anula.

c) considere los casos particulares $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 1 - i$ y $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = -2$.

d) muestre que siempre hay dos puntos donde el campo se anula salvo en el caso donde las varillas están ubicadas en los vértices de un triángulo equilatero.