Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, U.N.C.

Métodos Matemáticos de la Física I

Guía N° 3 (2018)

Problema 1: Determine las partes real e imaginaria de la función f definida por:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Muestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en $z = 0$, sin embargo $f'(0)$ no existe.

Problema 2: Sea $f = u + iv$ una función analítica en un región D abierta y conexa (i.e. un dominio). Probar que:

a) Si $f'(z) = 0$, para todo $z \in D$ entonces f es constante.

b) Si $u(x, y) =$ constante $\in D$ (similarmente con $v(x, y)$), luego f es constante en D.

c) Si $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in D$ entonces f es constante.

d) Si $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$ para todo $z \in D$ entonces f es constante.

e) Si $\overline{f(z)}$ es analítica en D, entonces f es constante.

f) Si $|f(z)|$ es constante en D, entonces f es constante.

Problema 3: Suponga que $g(z)$ es analítica en un dominio D y $f(z) = e^{g(z)}$ tiene derivada $f' = 0$ en todo $z \in D$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera y por qué?

a) para todo $z \in D$, $g(z) = 0$.

b) $g(z)$ tiene derivada constante no nula en D.

c) $g(z)$ es constante en D.

Problema 4: ¿Existe una función analítica $f = u + iv$ definida sobre el disco unitario, tal que $u_x = 0$ pero f es *no* constante?

Problema 5: Probar que las siguientes funciones $u(x, y)$ satisfacen la ecuación de Laplace en el plano $\mathbb{R}^2$, es decir, son armónicas y hallar una conjugada armónica $v(x, y)$:

a) $u(x, y) = y^3 - 3x^2 y$, *b)* $u(x, y) = 2x(1 - y)$, *c)* $u(x, y) = \cosh x \cos y$.

Problema 6: Probar que las curvas de nivel de una función armónica y las curvas de nivel de su conjugada armónica son perpendiculares en todo punto donde sus gradientes no se anulan. Grafique cualiltativamente las curvas de nivel de las partes reales e imaginaria de $f(z) = z^2$.

Problema 7: Sea $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ una función analítica en un dominio D que no incluye al origen. Mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann, demuestre que la función $u(r, \theta)$ (lo mismo para $v(r, \theta)$) satisface en D la ecuación de Laplace:

$$r^2 u_{rr}(r, \theta) + r u_r(r, \theta) + u_{\theta,\theta}(r, \theta) = 0.$$

La función exponencial

Problema 8: Probar que e^z es una función entera, es decir, analítica en todo el plano complejo.

Problema 9: Hallar todos los valores de z tales que:

a) $e^z = -2$, *b)* $e^z = 1 + \sqrt{3}i$, *c)* $\exp(2z - 1) = 1$.

Problema 10: Compruebe los siguientes resultados:

a) $\exp\left\{\dfrac{2 + \pi i}{4}\right\} = \sqrt{\dfrac{e}{2}}(1 + i)$, *b)* $\exp(z + \pi i) = -\exp z$, *c)* $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

d) Si e^z es real o imaginario: ¿qué restricción significa sobre z?

e) $\exp(iz) = \overline{iz}$, sí y solo sí $z = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Problema 11: Muestre que $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$, y $|\exp(z^2)| \leq \exp(|z|^2)$.

Algunas funciones trigonométricas e hiperbólicas.

Problema 12: Se definen las funciones trigonométricas de variable compleja como sigue:

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \qquad \cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}.$$

Pruebe que

a) $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$, y $\cos(-z) = \cos(z)$.

b) $\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

c) $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen}(z_1)\cos(z_2) + \operatorname{sen}(z_2)\cos(z_1)$.

d) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \operatorname{sen}(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$.

e) Tanto $\operatorname{sen}(z)$ como $\cos(z)$ son periódicas con período real 2π.

Problema 13: Encuentre todas las raíces de $\cos(z)$ y $\sin(z)$.

Problema 14: Se definen las funciones hiperbólicas de variable compleja como sigue:

$$\operatorname{senh}(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}, \qquad \cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}.$$

Pruebe que:

a) $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh}(z)$ y $\cosh(-z) = \cosh(z)$.

b) $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$.

c) $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh}(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\operatorname{senh}(z_2)$.

d) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \operatorname{senh}(z_1)\operatorname{senh}(z_2)$.

e) $\operatorname{senh}(z) = \operatorname{senh}(x)\cos(y) + i\cosh(x)\operatorname{sen}(y)$.

f) $\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\operatorname{senh}(x)\operatorname{sen}(y)$.

g) $|\operatorname{senh}(z)|^2 = \operatorname{senh}^2(x) + \operatorname{sen}^2(y)$.

h) $|\cosh(z)|^2 = \operatorname{senh}^2(x) + \cos^2(y)$.

La función logaritmo

Problema 15: Calcular

a) $\text{Log}(-ei)$, *b)* $\text{Log}(1-i)$, *c)* $\log e$, *d)* $\log(i)$, *e)* $\log(-1+i\sqrt{3})$.

Problema 16: Lleve las siguientes expresiones a la forma $a+ib$, o dependiendo del caso resuelva la ecuación planteada. Para todos los casos que se requiera, tenga en cuenta todos los posibles valores que pueden obtenerse de un logaritmo complejo, mas allá de su valor principal:

a) $(i^i)^i$ *b)* $\big(\text{Log}(i)\big)^{(i\pi)}$ *c)* $\dfrac{\exp(iz)}{5} = \text{senh}(iz)$.

Problema 17: Muestre que

a) $\log(i^{1/2})$ y $(1/2)\log(i)$ representan el mismo conjunto de valores.

b) $\log(i^2)$ y $2\log(i)$ NO representan el mismo conjunto de valores.

Problema 18: Muestre que para todos los puntos del semiplano complejo derecho ($z = x+iy$, $x > 0$) vale

$$\text{Log}(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\arctan\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Problema 19: ¿Para cuál de los siguientes valores de $z = 1-i, i, -2, -i, -1$, la función $\text{Log}(z+1)$ es diferenciable? Justifique.

Algunas funciones inversas

Problema 20: Se define la inversa del $\text{sen}(z)$ (análogamente $\cos(z)$) como todos los valores $w \in \mathbb{C}$ tales que $w = \sin^{-1}(z)$, donde $z = \sin(w)$. Muestre que:

a) $\text{arc sen}(z) = -i\log\Big(iz + (1-z^2)^{1/2}\Big)$,

b) $\text{arc cos}(z) = -i\log\Big(z + i(1-z^2)^{1/2}\Big)$,

c) $\text{tg}^{-1}(z) = \dfrac{i}{2}\log\dfrac{i+z}{i-z}$.

Problema 21: Muestre que:

a) $\dfrac{d}{dz}\sin^{-1}(z) = \dfrac{1}{(1-z^2)^{1/2}}$, *b)* $\dfrac{d}{dz}\cos^{-1}(z) = \dfrac{-1}{(1-z^2)^{1/2}}$, *c)* $\dfrac{d}{dz}\text{tg}^{-1}(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)}$.