Cálculo de soluciones para $N \to \infty$ y P finito

Calculemos los valores $\langle m_\nu \rangle$, o sea, los valores de $\langle m_\nu \rangle$ en los atractores.

$$\langle S_i \rangle_T = (+1)P(S_i=1) + (-1)P(S_i=-1) = \frac{1}{2}[1+\tanh(\beta h)] - \frac{1}{2}[1-\tanh(\beta h)]$$
$$= \tanh(\beta h)$$

$$\langle S_i \rangle_T = \tanh\left(\frac{1}{T}\sum_{j\neq i} w_{ij}\langle S_j \rangle\right)$$

Esto define un sistema AUTO CONSISTENTE $N \times N$. Puede ser terrible resolverlo, pero si lo resolvemos luego hacemos

$$\langle m_\nu \rangle = \frac{1}{N}\sum_i \xi_i^\nu \langle S_i \rangle$$

Esto es inconducente. Avancemos

$$\langle S_i \rangle = \tanh\left(\frac{1}{T}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{P}\xi_i^\mu \xi_j^\mu \langle S_j \rangle\right)$$

$$= \tanh\left(\frac{1}{T}\sum_{\mu=1}^{P}\frac{\xi_i^\mu}{N}\sum_{j\neq i}^{N}\xi_j^\mu \langle S_j \rangle\right)$$

$$= \tanh\left(\frac{1}{T}\sum_{\mu=1}^{P}\left(\frac{\xi_i^\mu}{N}\sum_{j=1}^{N}\xi_j^\mu\langle S_j\rangle - \frac{\xi_i^\mu\xi_i^\mu}{N}\langle S_i\rangle\right)\right)$$

$$\langle S_1 \rangle = \tanh\left(\frac{1}{T}\left(w_{12}\langle S_2 \rangle + w_{13}\langle S_3 \rangle\right)\right)$$

$$\langle S_2 \rangle = \tanh\left(\frac{1}{T}\left(w_{21}\langle S_1 \rangle + w_{23}\langle S_3 \rangle\right)\right)$$

$$\langle S_3 \rangle = \tanh\left(\frac{1}{T}\left(w_{31}\langle S_1 \rangle + w_{32}\langle S_2 \rangle\right)\right)$$

$$= \tanh\left(\frac{1}{T}\left[\sum_{\mu=1}^{p}\left(\xi_i^\mu \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\xi_j^\mu\langle S_j\rangle - \frac{p}{N}\langle S_i\rangle\right)\right]\right)$$

Si $\frac{p}{N} \ll 1$ o $\lim_{N\to\infty} \frac{p}{N} = 0$

$$\langle m_\nu\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^\nu\langle S_i\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^\nu \tanh\left(\frac{1}{T}\sum_{\mu=1}^{p}\xi_i^\mu\langle m_\mu\rangle\right)$$

Tenemos p ecuaciones y p incógnitas: $\langle m_\nu\rangle$ con $\nu = 1, 2, \dots, p$. Pero la definición de cada ecuación tiene N sumas. Podríamos resolverlo pero seguiría siendo terrible.

Veamos dos cuestiones importantes.

1) ¿Cómo sabemos que $\langle S\rangle$ alcanza un valor constante para $t \to \infty$?

Veremos que después de un transitorio, el sistema visita el espacio de todas las posibles configuraciones con determinada probabilidad.

Sea $P(\{S_i\}, t)$ la distribución de prob. al tiempo t.

Si alcanza un valor estacionario, no depende de t

$$\frac{\partial P(\{S_i\},t)}{\partial t} = 0 = \sum_{\{S_i\}}^{2^N} \left[W(S' \to S) P(S') - W(S \to S') P(S) \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{W(S' \to S)}{W(S \to S')} = \frac{P(S)}{P(S')}$$

$$W(S' \to S) = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh(\beta h S)\right]$$

$$W(S \to S') = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh(\beta h S')\right]$$

$$\tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$1 + \tanh(x) = 1 + \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{x} + e^{-x} + e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$= \frac{2e^{x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\frac{P(S)}{P(S')}=\frac{W(S'\to S)}{W(S\to S')}=\frac{e^{\beta h S}}{(e^{\beta h S}+e^{-\beta h S})}\cdot\frac{(e^{\beta h S'}+e^{-\beta h S'})}{e^{\beta h S'}}$$

Pero $S'=-S$

$$\frac{W(S'\to S)}{W(S\to S')}=\frac{e^{\beta h S}(e^{-\beta h S}+e^{\beta h S})}{(e^{\beta h S}+e^{-\beta h S})e^{-\beta h S}}=\frac{e^{-\beta h S}}{e^{+\beta h S}}$$

$$=e^{-2\beta h S}$$

$$=e^{-2\beta \Delta H_i}=\frac{P(S)}{P(S')}$$

$(H(S)-H(S'))$

$$P(S)\propto e^{-\beta H(S)}$$

O sea, todas las configuraciones que tienen la misma H, tienen la misma probabilidad.

2) ¿Cómo nos deshacemos de las sumas en i?

Para cada neurona i tenemos p variables ξ_i^μ con $\mu=1,2,\dots,p$. Como son variables aleatorias $+1$ o -1 (binarias), tenemos 2^p posibles configuraciones.

Si p es finito, 2^p es finito aunque grande.

Podemos agrupar las neuronas de acuerdo a la configuración de $(\xi_i^1, \xi_i^2, \ldots \xi_i^p)$

Imaginen que $P=3$, entonces hay 8 clases de neuronas, conforme lo que valen estas variables

Los que	tienen		$(+1,+1,+1)$	grupo 1
"	"	"	$(+1,+1,-1)$	grupo 2
"	"	"	$(1,-1,1)$	grupo 3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮
Los que	tienen		$(-1,-1,-1)$	grupo 8

Noten que son todas las configuraciones igualmente probables.

Entonces, si $N \longrightarrow \infty$ y p es finito

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i^\mu) \longrightarrow \sum_{\xi^\mu} P(\xi_i^\mu) f(\xi_i^\mu)$$

$$= \frac{1}{2^p}\sum_{\xi^\mu} f(\xi^\mu)$$

$$= \langle\langle f(\xi) \rangle\rangle$$

↓

Promedio sobre la ξ

Ahora

$$\langle m_\nu \rangle = \langle\langle \xi^\mu \tanh\left(\frac{1}{T}\sum_\mu \xi^\mu \langle m_\mu \rangle\right)\rangle\rangle$$

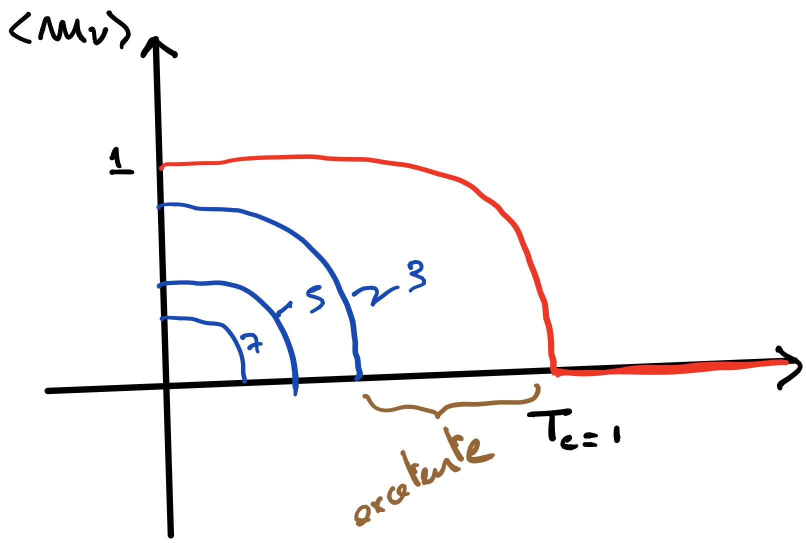
Solución de reconocimiento

Buscamos una solución de reconocimiento

$$\bar{m} = (0, 0, \dots, m^\nu, 0, \dots, 0)$$

$$\langle m_\nu \rangle = \langle\langle \xi^\nu \tanh\left(\frac{1}{T}\xi^\nu m^\nu\right)\rangle\rangle$$

$$\langle m_\nu \rangle = \tanh\left(\frac{1}{T}\langle m_\nu \rangle\right) \qquad \langle m^\mu \rangle = \langle \xi$$



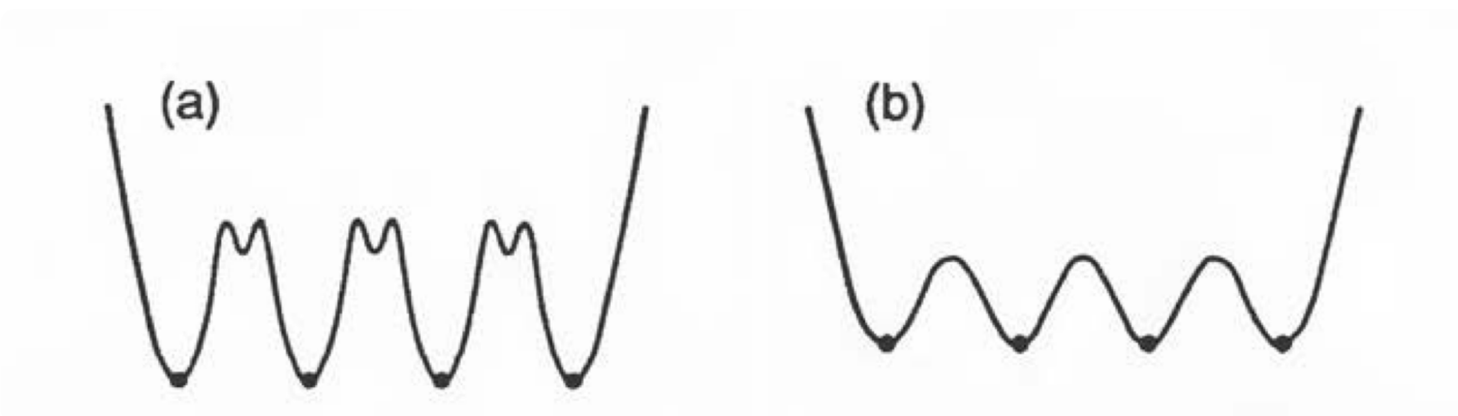
$T = 1/\beta$

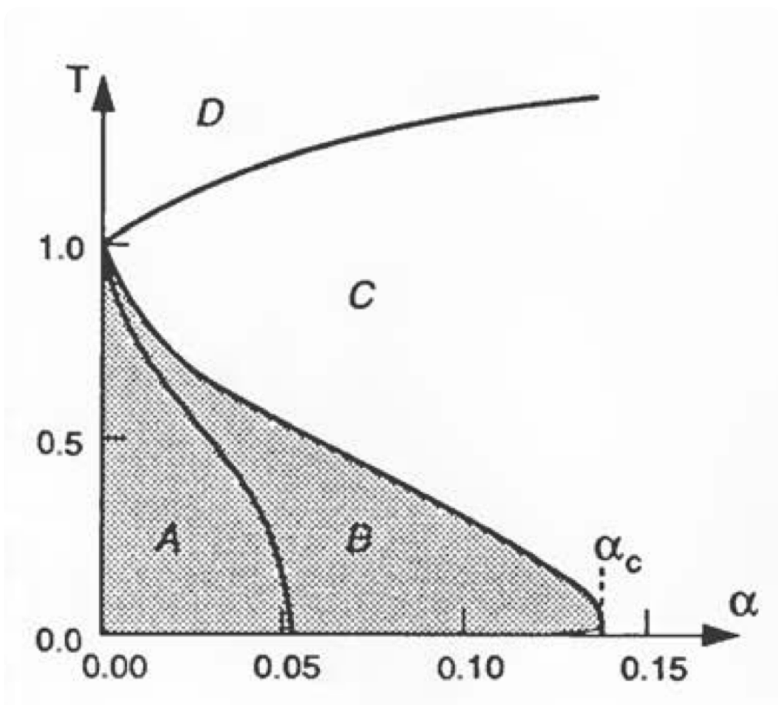
La energía es

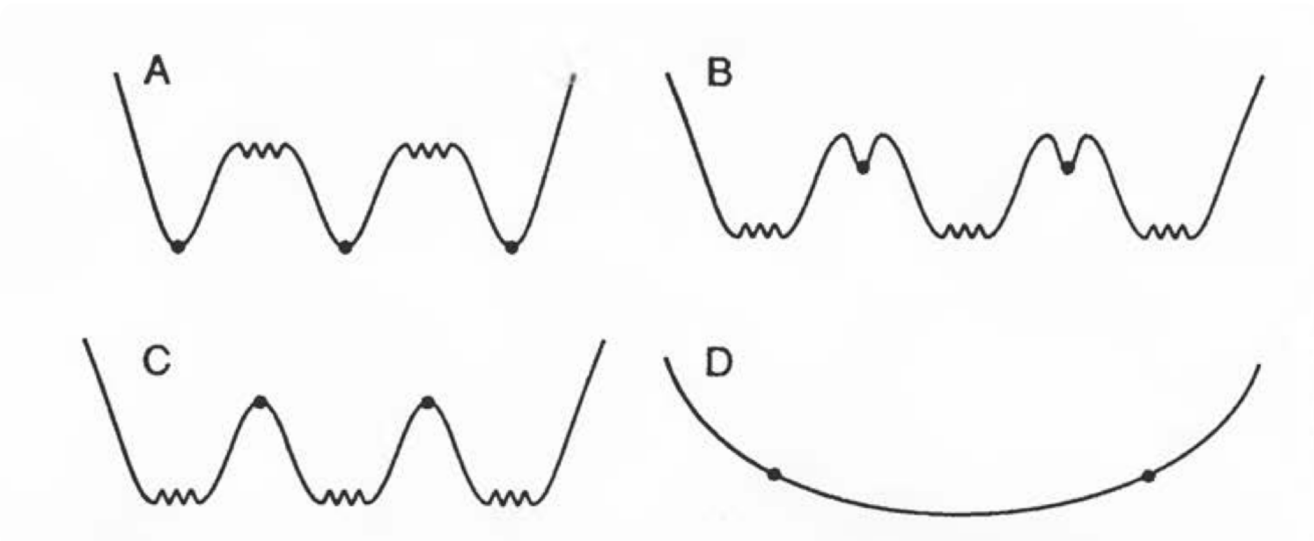
$$H = -\frac{1}{2} N \sum_\mu (m^\mu)^2 + \frac{P}{N} \simeq -\frac{N}{2}\, \bar{m}\cdot\bar{m}$$

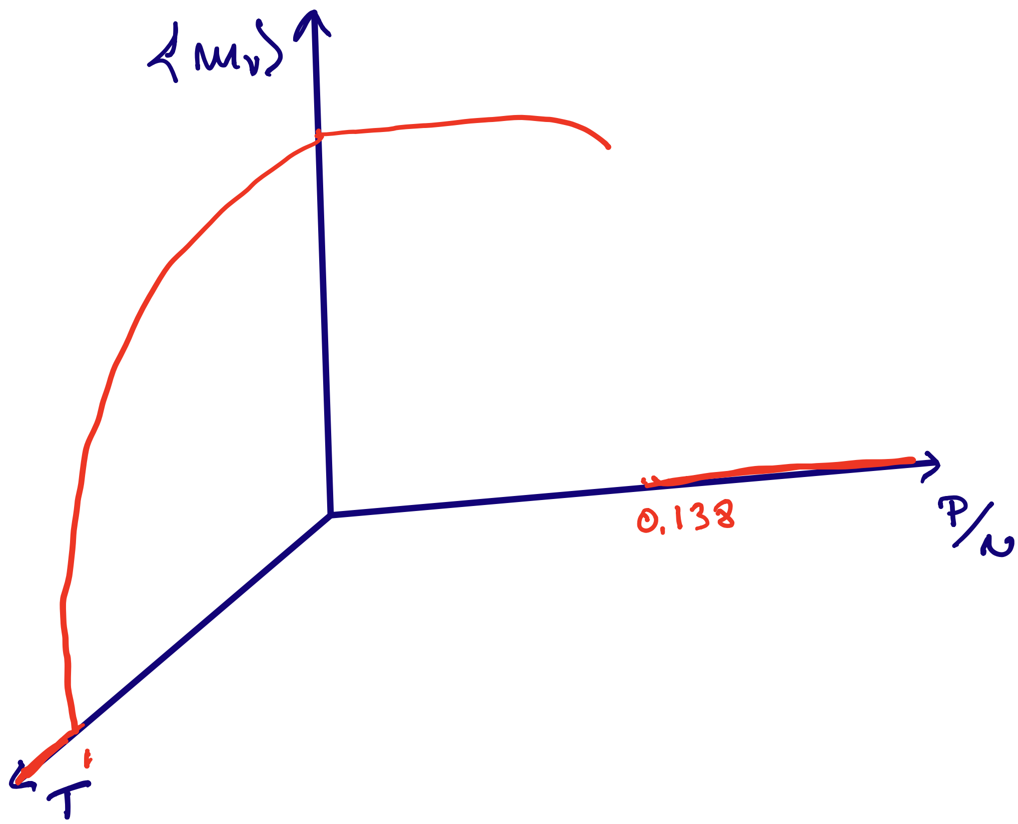
Soluciones simétricas

Si mezclan un número par, son máximos
Si " " " impar, son mínimos.






A
B
C
D


{m_ν}
0.138
P/N
T

$$
\begin{aligned}
C \equiv \beta(1-q) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha r}}\exp\left(-\frac{m^2}{2\alpha r}\right) \\
r &= \frac{1}{(1-C)^2} \\
m &= \operatorname{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2\alpha r}}\right)
\end{aligned}
$$