1º Parte: Sistemas dinámicos

Dos tipos

1) Continuos (ecuaciones diferenciales ordinarias)

2) Discretos (mapas iterativos)

Comenzamos con continuos.

Vamos a ir aumentando la dimensión

¿qué es la dimensión?

El nº de variables dinámicas

¿Qué significa resolver una EDO? (Ecuación diferencial

EDO: (ecuación diferencial ordinaria)

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t))$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t))$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(x_1(t), x_2, \dots x_n(t))$$

CASO UNIDIMENSIONAL

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

Notación

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}(t) \equiv \dot{x}$$

$$\dot{x} = f(x)$$

Podríamos tener

$$\dot{x} = f(x,t)$$

$$x_1 = x \qquad x_2 = t \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases}$$

Si no aparece t el sistema se llama "AUTÓNOMO"

El ORDEN del sistema es el orden de la derivada de mayor orden

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{orden } 1$$

$\ddot{x} = f(x)$ orden 2

$x_1 = x \qquad \dot{x}_2 = f(x_1)$

$x_2 = \dot{x} \qquad \dot{x}_1 = x_2$

Ejemplos

$m\ddot{x} + kx = 0$

$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

Ejemplo <u>uniDimensional</u>

$\dot{x} = \text{sen}(x)$

$\frac{dx}{dt} = \text{sen}(x)$

$dt = \frac{dx}{\text{sen}(x)}$

$t \qquad x$

$$\int_0 dt' = \int_{x_0} \operatorname{cosec}(x')\, dx'$$

$$t = -\ln\left|\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{cotg}(x)\right| + C$$

Si en $t=0$ $x(0) = x_0$

$$C = \ln\left|\operatorname{cosec}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)\right|$$

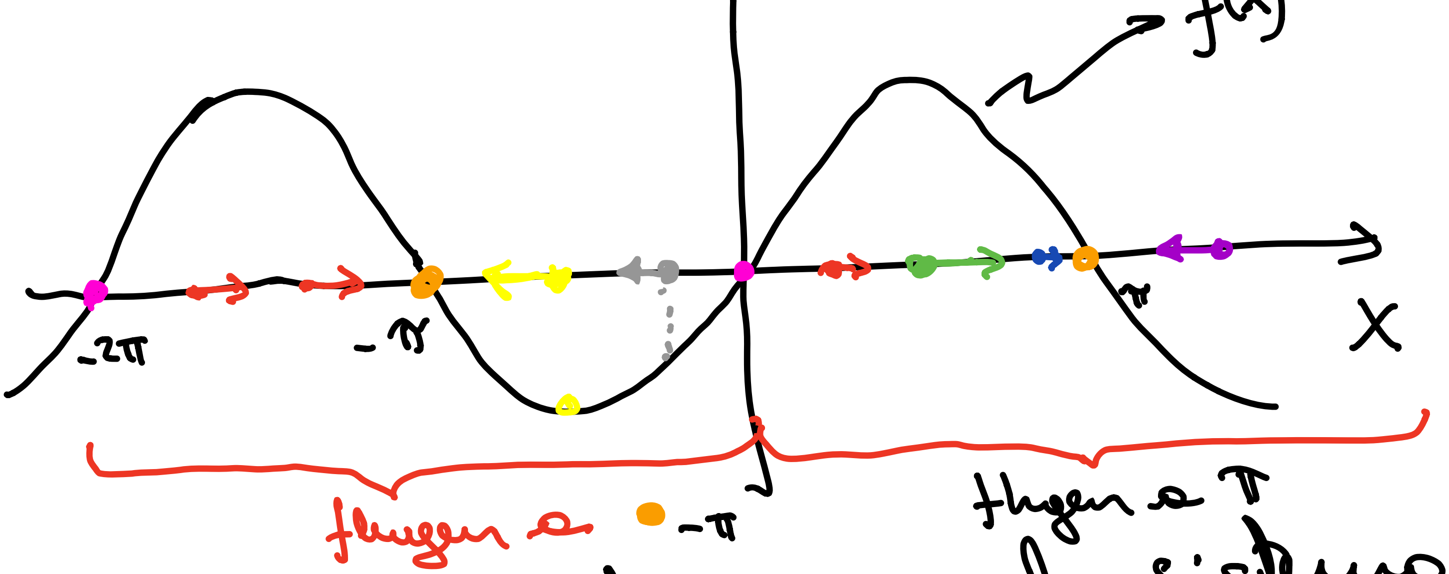
Entonces

$$t = \ln\left|\frac{\operatorname{cosec}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)}{\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{cotg}(x)}\right|$$

Un truco geométrico

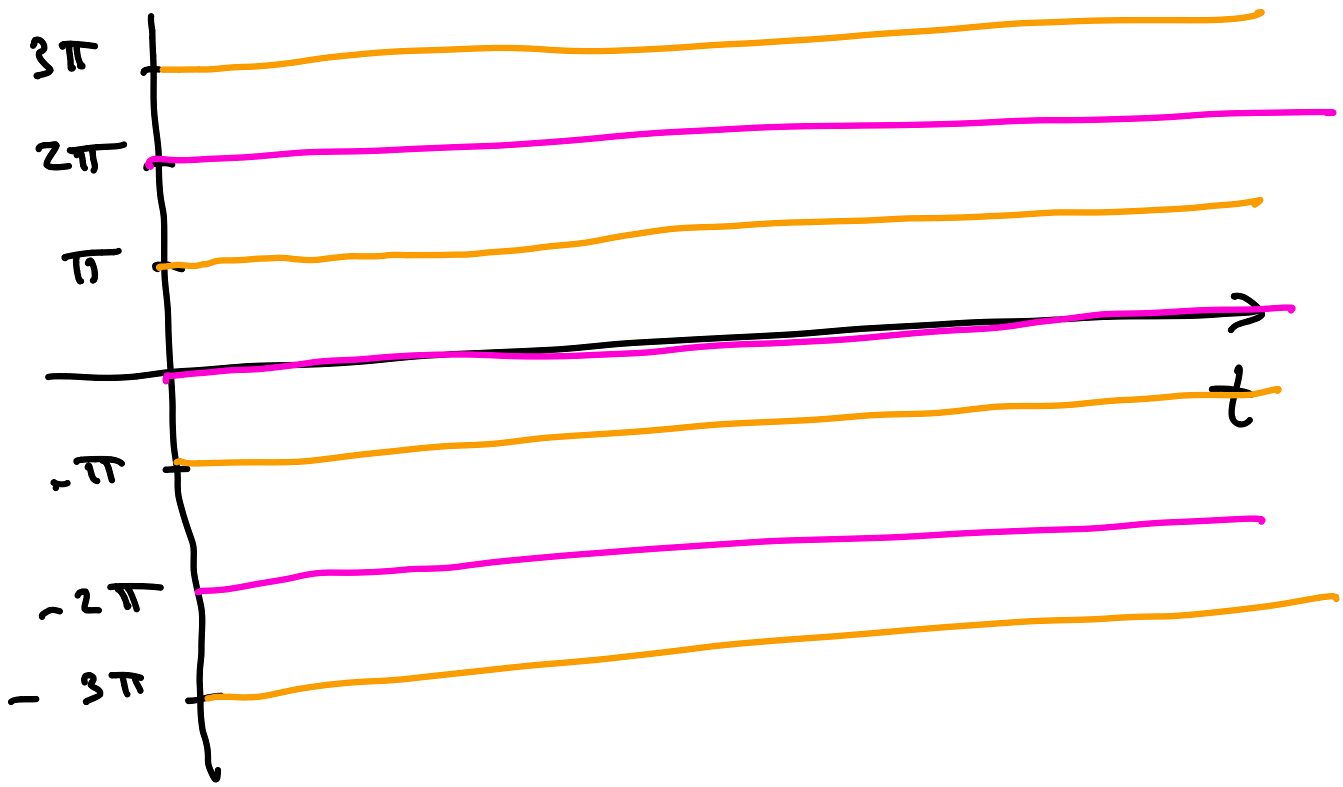
Grafico $\dot{x}$ vs. x

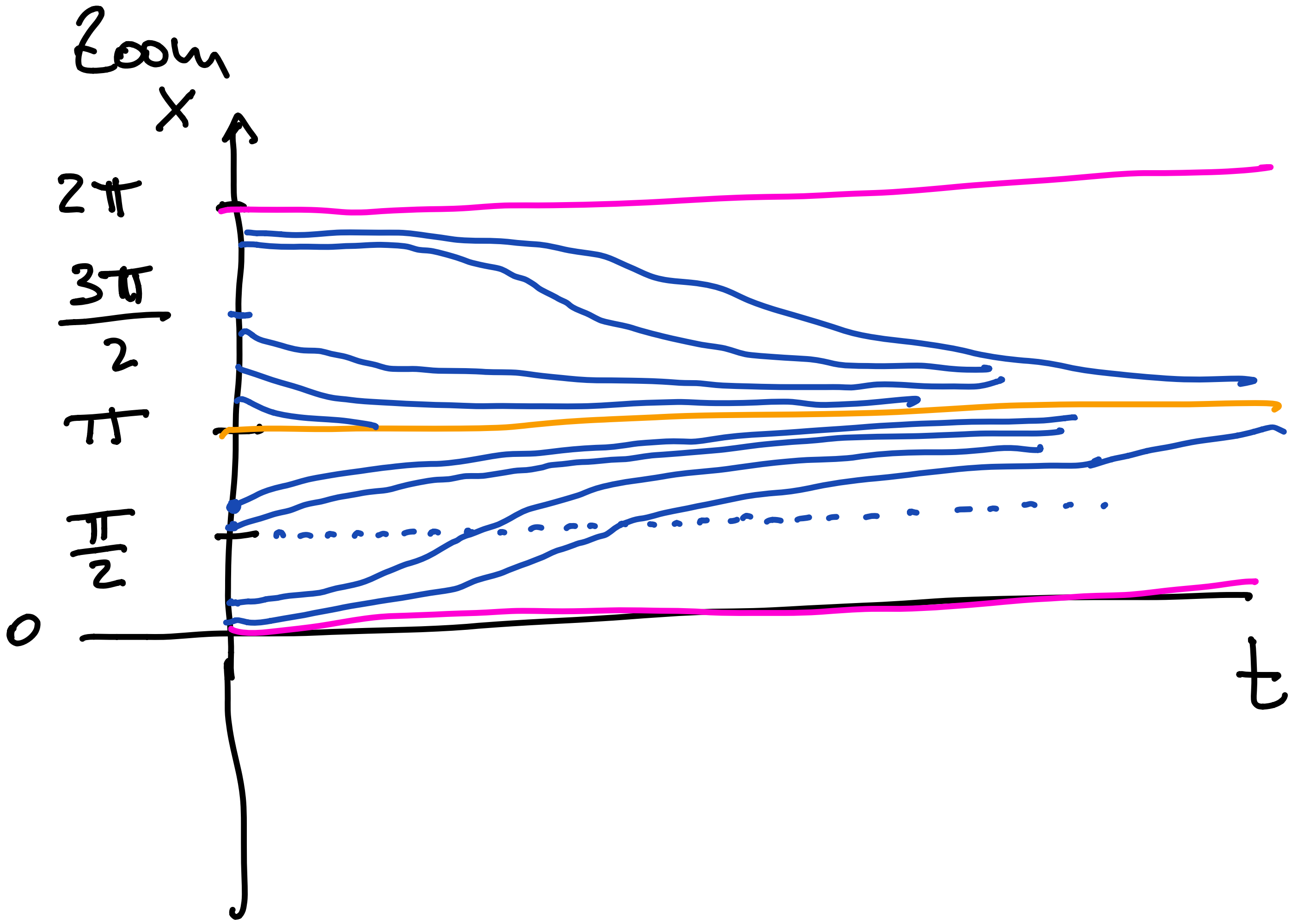
$$\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$$



Cuando $t \to \infty$ el sistema tiende a una de las raíces de $f(x)$. Las raíces de f se llaman

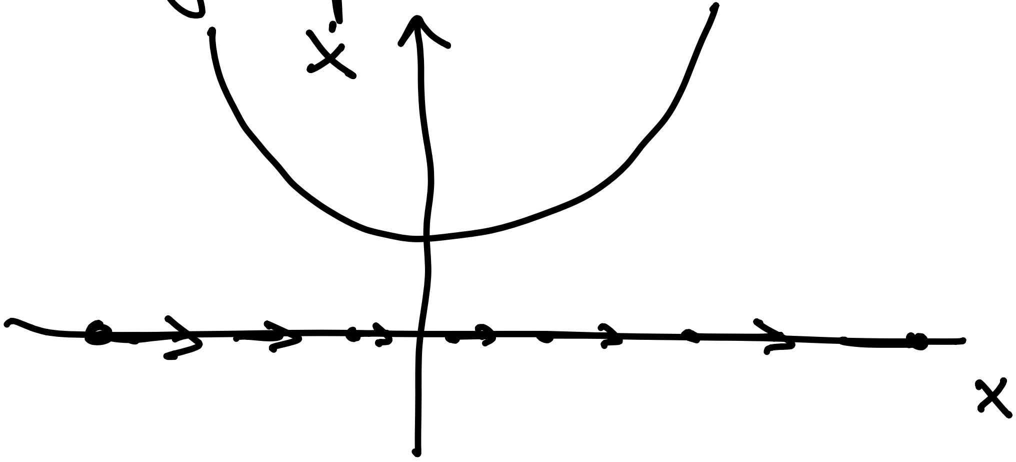
- atractores o
- puntos fijos



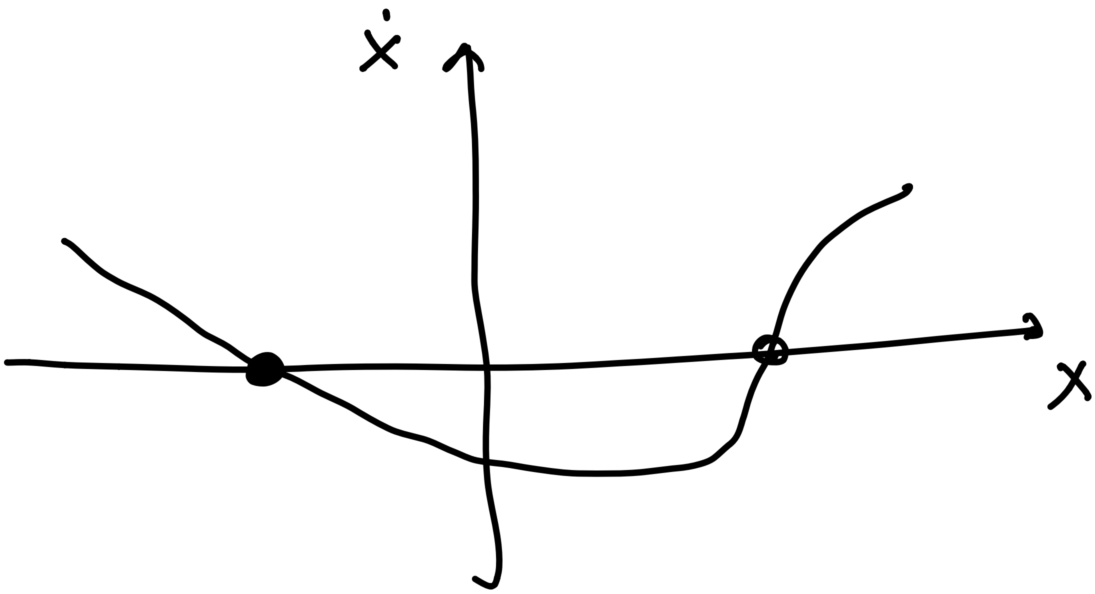


Para $t \to \infty$ el sistema evolucionará hacia uno de los puntos fijos estables salvo que lo preparemos en un punto fijo inestable en cuyo caso se mantendrá en él o en $\pm\infty$

Ejemplo



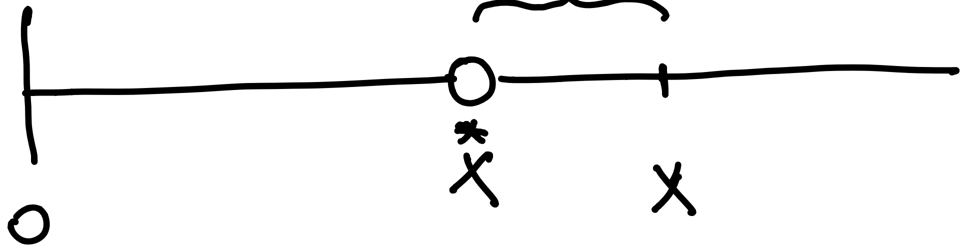
ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS FIJOS



Hacemos un análisis lineal

. supongo que estoy cerca de un pto fijo x^* $\left(f(x^*) = 0 \right)$

$\eta(t)$



$$x(t) = x^* + \eta(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}^* + \dot{\eta}(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{\eta}(t)$$

$$f(x(t)) = f(x^* + \eta(t))$$

$$\simeq f(x^*) + f'(x^*)\,\eta(t)$$

$$\dot{x} = f(x)$$

$$\dot{\eta} = \overset{=0}{f(x^*)} + f'(x^*)\,\eta(t)$$

$$\boxed{\dot{\eta}(t) = f'(x^*)\,\eta(t)}$$

$f'(x^*)$ es un número

$$\eta(t) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cte}}}{A}\, e^{f'(x^*).t}$$

$$= \eta(0)\, e^{f'(x^*).t}$$

Si $f'(x^*) > 0$ la perturbación crece exponencialmente y el pto fijo es inestable

si $f'(x^*) < 0$ la perturbación tiende a cero exponencialmente y el pto fijo es estable