

## Sistemas Tridimensionales

$$\dot{x} = f(x, y, z)$$

$$\dot{y} = g(x, y, z)$$

$$\dot{z} = h(x, y, z)$$

Todo lo visto describe pero aparece CAOS.

Lo estudiaremos con un ejemplo (el primer ejemplo)

las ecuaciones de Lorenz.

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

no lineales

Parámetros son

$\sigma > 0$   
número de  
Prandtl

$R > 0$   
número  
Rayleigh

$b > 0$

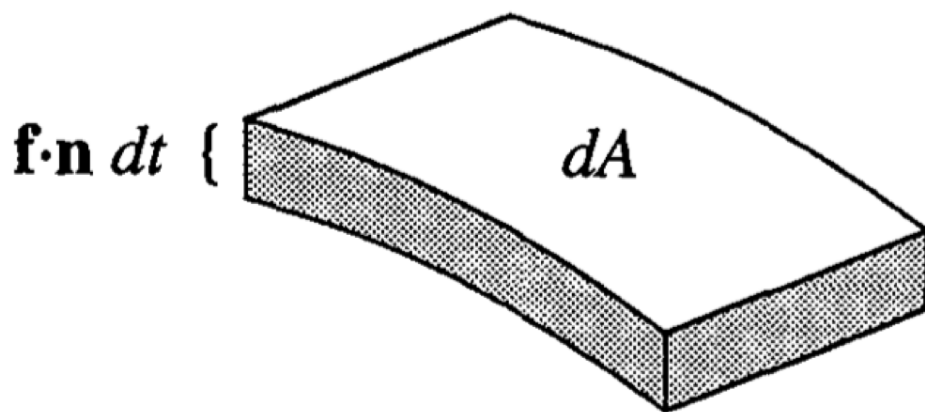
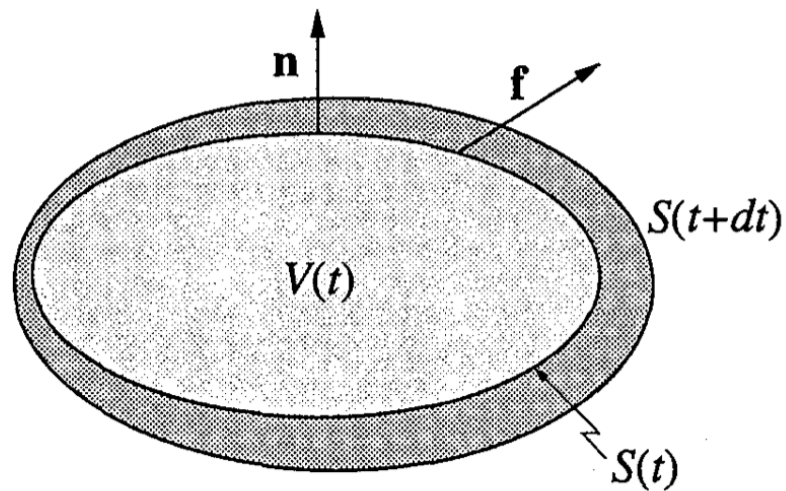
las incógnitas  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Simetría si cambias  $x \rightarrow -x$   
e  $y \rightarrow -y$  tengo las mismas  
ecuaciones

Si encuentras una solución  
 $(x(t), y(t), z(t))$  entonces  
 $(-x(t), -y(t), z(t))$  también lo es.

# Contracción de volumen



$$V(t+dt) = V(t) + \int_S ((\vec{f} \cdot \vec{n}) dt) \cdot dA$$

$$\frac{V(t+\delta t) - V(t)}{\delta t} = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{n}) dA$$

$$\dot{V}(t) = \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} dA = \int_V \nabla \cdot \vec{f} dV$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Proof here

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} [\sigma(y-x)] + \frac{\partial}{\partial y} [rx-y-x^2]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} [xy - bz]$$

$$= -\sigma - 1 - b = -(\sigma + 1 + b) < 0$$

$$\dot{V} = \int_V \nabla \cdot \vec{f} \, dV = \int_V -(\sigma + 1 + b) \, dV$$

$$= -(\sigma + 1 + b) \int_V dV \stackrel{=V}{=} V$$

$$= -(\sigma + 1 + b)V < 0$$

# Puntos fijos

$$\textcircled{1} \quad (x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Para } r > 1$$

$$x^* = y^* = + \sqrt{b(r-1)} \quad C^+$$

$$x^* = y^* = - \sqrt{b(r-1)} \quad C^-$$

$$z^* = r - 1$$

# Linearisierung

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = (R - z)x - y$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ R - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Evaluieren in  $(0, 0, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ R & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

$-b = \lambda_3$

tiene 3 autovalores

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ R & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Obviamente  $\lambda_3 = -b < 0$  es uno de los tres autovalores, pues vemos que la componente  $z$  este desacoplada de los componentes  $x$  e  $y$  en este punto fijo. Para calcular los otros dos autovalores debemos "diagonalizar" la matriz

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ R & -1 \end{pmatrix}$$

Lo hacemos



$$\det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma \\ R & -1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$+ (\sigma + \lambda)(1 + \lambda) - R\sigma = 0$$

$$\sigma + \lambda + \sigma\lambda + \lambda^2 - R\sigma = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda(\sigma + 1) + \sigma(R - 1) = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(R - 1)}}{2}$$

Como vimos, si  $R > 1$  el determinante de la matriz  $A$

$$\Delta = \sigma(1 - R)$$

es negativo, y el origen se vuelve un punto silla (ensilladura). O sea, se vuelve

inestable. El sistema  
sufre una bifurcación en  
 $r=1$  en la cual el origen  
deja de ser estable. De hecho  
el libro muestra (por favor  
estudiar) que el origen es  
"globalmente estable" para

$0 \leq R < 1$ . Esto dice que cual-  
quier trayectoria tenderá al  
origen para  $R < 1$ .

Para mostrar esto mostramos  
que existe una función definida  
positiva y suave que decrece  
a lo largo de cualquier trayectoria

Esto es algo "equivalente" pero más general que la "energía".

$$\text{Sea } V(\vec{x}) = \frac{1}{\sigma} x^2 + y^2 + z^2$$

$V(\vec{x}) = \text{cte}$  define elipsoides

La idea es mostrar que  $V(\vec{x}(t))$  tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ .

$$\frac{1}{\sigma} \dot{V} = \frac{1}{\sigma} x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma} x(\gamma - x) + y(rx - y - xz) + z(xy - bz)$$

$$= xy - x^2 + rxy - y^2 - \cancel{xyz} + \cancel{xyz} - bz^2$$

$$= (R+1)xy - x^2 - y^2 - bz^2$$

Si completamos cuadrados

$$\frac{1}{2} \dot{V} = - \left( x - \frac{(R+1)y}{2} \right)^2 - \left( 1 - \left( \frac{R+1}{2} \right)^2 \right) y^2 - bz^2$$

Deje como ejercicio mostrar que

$$\dot{V} < 0$$

si  $R < 1$

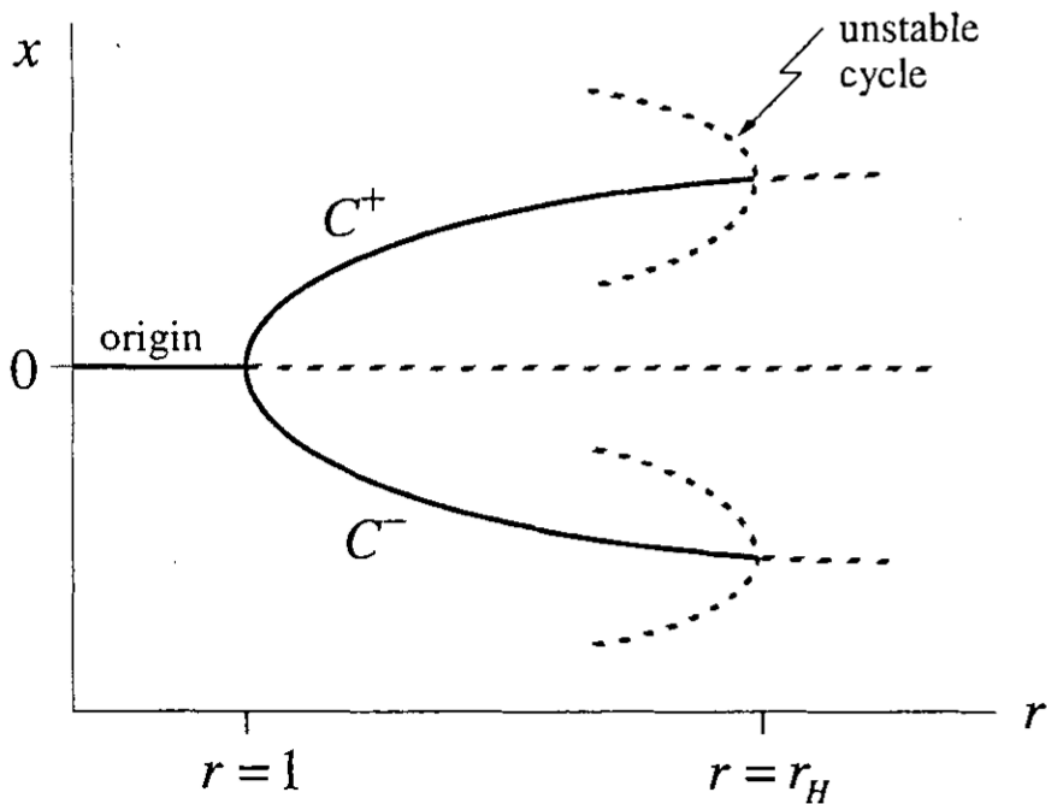
Si  $\dot{V} < 0$ , no importa donde comencemos (cual sea la condición inicial) que el sistema irá a  $(0, 0, 0)$ .

Y esto sucede para  $R < 1$

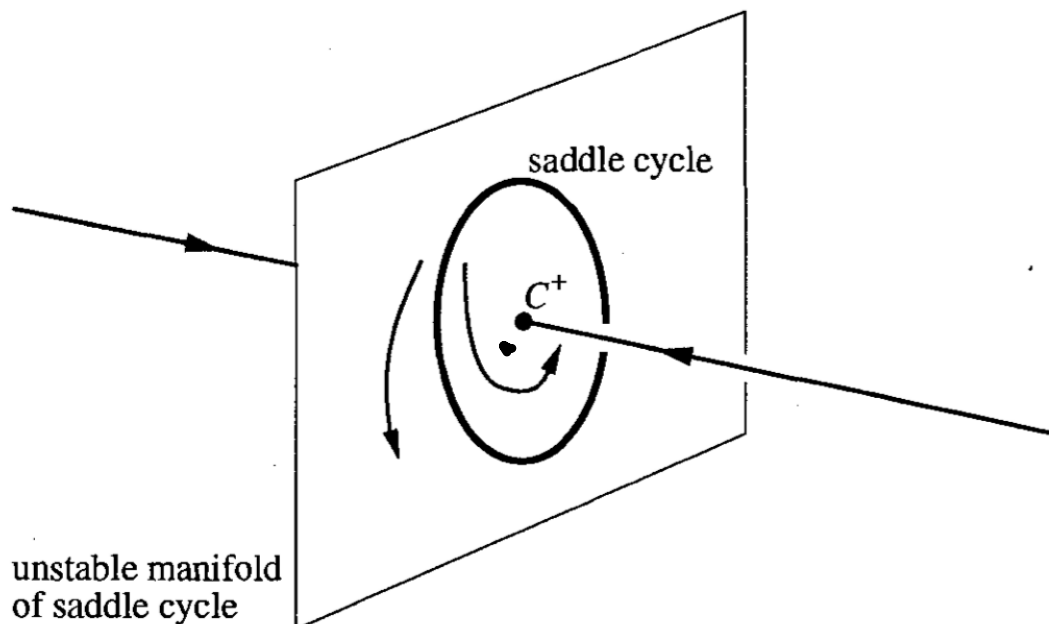
Para  $L < R < R_H = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$

se puede mostrar que  $C^+$  y  $C^-$  son estables. En  $R_H$  estas dos soluciones pierden su estabilidad mediante una bifurcación de Hopf subcrítica.

Pueden ver estas transiciones en el capítulo 8 del libro. Yo lo expliqué en la clase.



En este caso antes de llegar a  $R_H$  aumentando  $R$  el sistema tiene dos atractores estables en dos ramas y cerca de ellos dos orbitas cerradas inestables.



lo que está dentro del ciclo  
 inestable es el origen. lo que  
 está afuera es  $c^+$  infinito.

¿Pero qué pasa en el caso  
 $R > R_c$  ?

$c^+$ ,  $c^-$  y el origen son inestables

No hay otros puntos fijos.

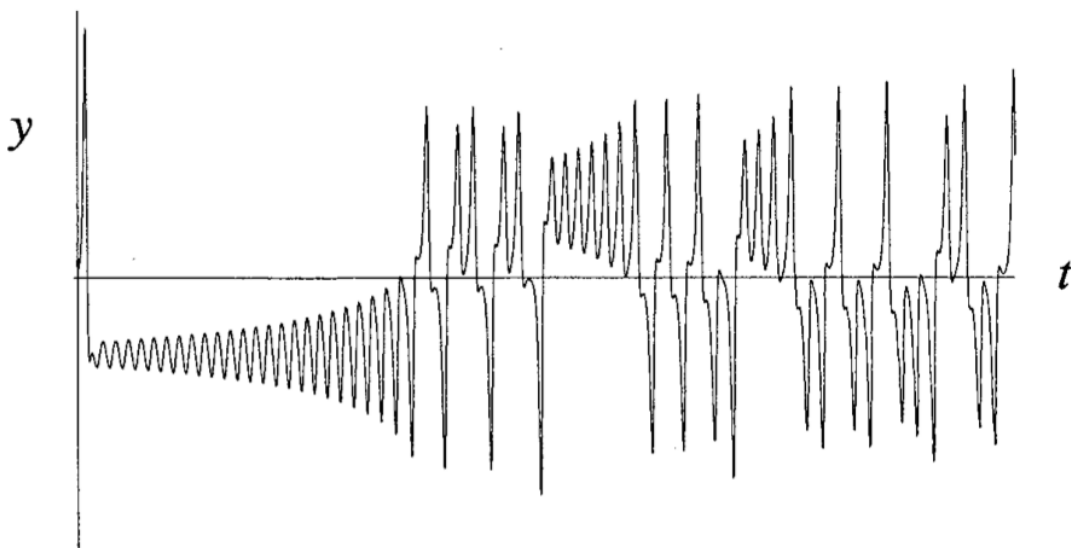
Lorenz se sorprendió y recurrió a la integración numérica.

Para  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  y  $R = 28$

(cuando  $R_H \approx 24.74$ ) grafico

$x(t)$  e  $y(t)$ . Veamos  $y(t)$

pero  $x(t)$  es similar

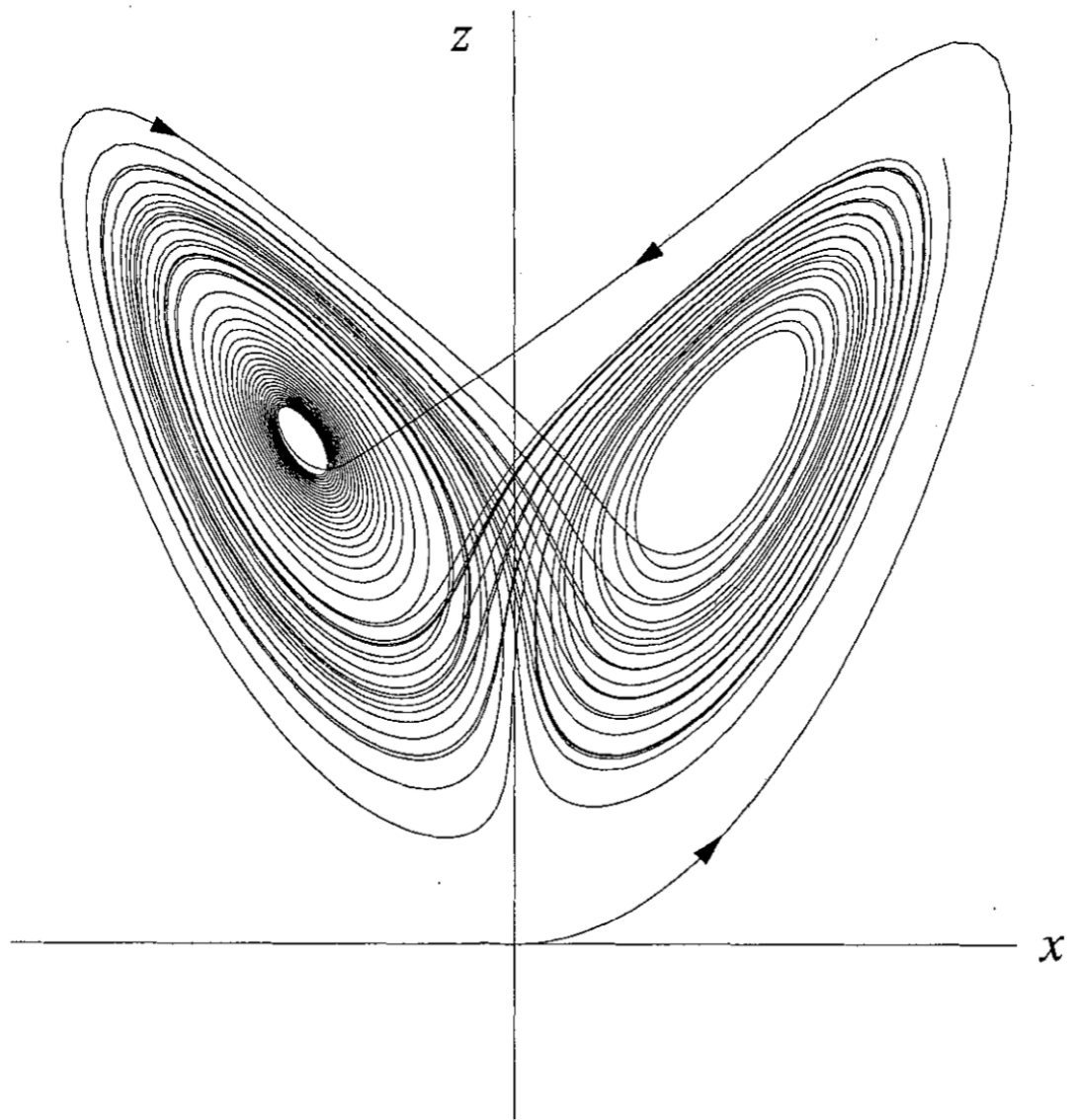




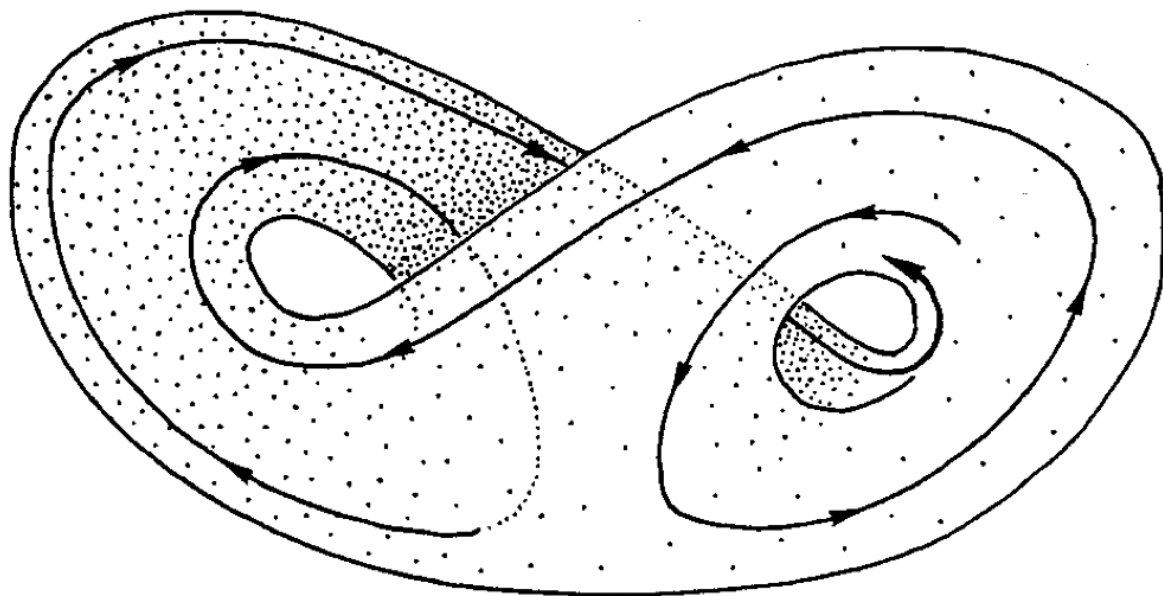
Venus en movimiento errático,  
sin aparentes regularidades, sin  
periódicidad. Y esto lo sorprendió  
pues no se había observado hasta  
entonces este comportamiento.

Comenzó en la condición  
 $(0, 1, 0)$

Cuando graficó  $x(t)$  vs.  $z(t)$  en  
forma paramétrica (sin incluir  
en los ejes el tiempo) obtuvo algo  
más sorprendente aun:



El ferro que el attractor era  
una delgada lámina como la  
de la figura abajo



Pero cuando miro en detalle  
los trayectorias parecen visitar  
2 laminas muy próximas.

Si uno mira más en detalle  
aparecen 2 en cada una,  
2 esta duplicación se repite y  
repite. Esto dice que el atractor  
contiene volumen formando un  
fractal con dimensión no entera

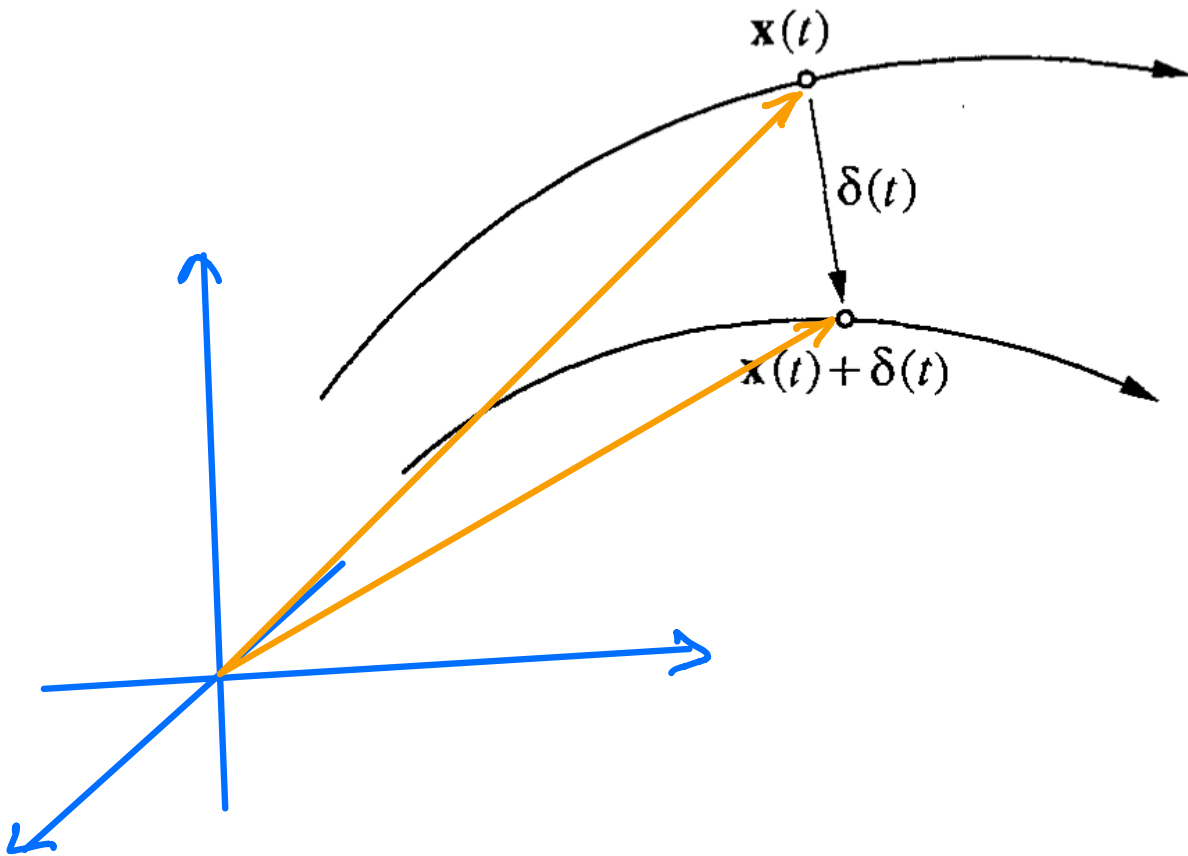
menor a 3 y mayor a 2.

Esto le permite cumplir que  
 $\forall t < 0 \forall t$  finito. En planos  
de Lorenz

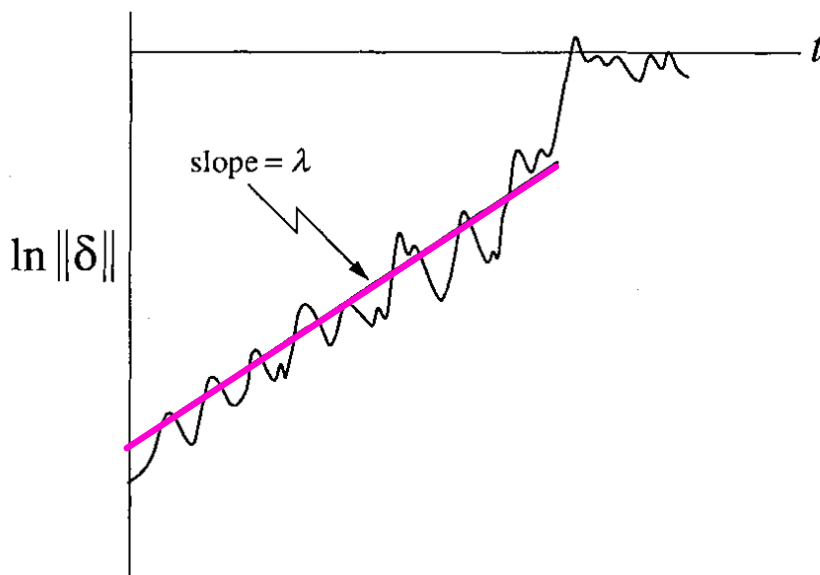
It would seem, then, that the two surfaces merely appear to merge, and remain distinct surfaces. Following these surfaces along a path parallel to a trajectory, and circling  $C^+$  and  $C^-$ , we see that each surface is really a pair of surfaces, so that, where they appear to merge, there are really four surfaces. Continuing this process for another circuit, we see that there are really eight surfaces, etc., and we finally conclude that there is an infinite complex of surfaces, each extremely close to one or the other of two merging surfaces.

Numericamente se puede ver que  
la dimensión es  $\sim 2,05$ , o sea,  
es "poco" más que un objeto  
dimensional, pero no es bidimensional

luego estudié la sensibilidad a  
las condiciones iniciales



Dejó evolucionar los dos trayectorias desde  $\bar{x}$  y desde  $\bar{x} + \delta \bar{x}$  y los siguió. Mide  $\|\delta \bar{x}(t)\|$  vs.  $t$ .  
 Muestra el gráfico del libro



Como tiene inicialmente un comportamiento lineal en el gráfico  $\ln \|f\|$  vs  $t$ , se sigue que  $\|f\|$  crece exponencialmente

Nota: Supergeometría

$$y = y_0 e^{\lambda t}$$

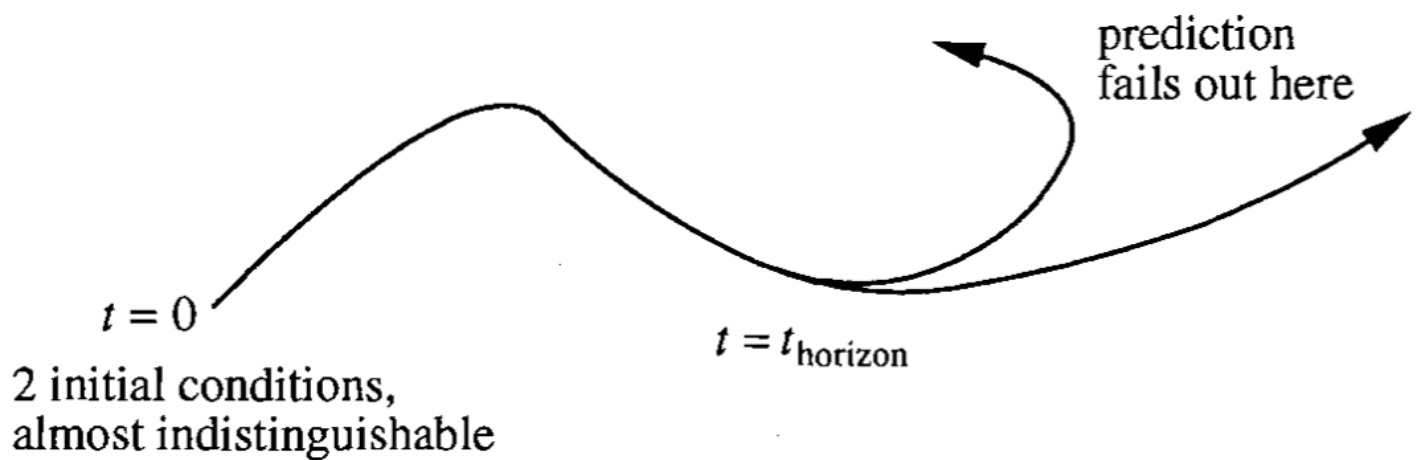
Si calculo  $\ln$  (logaritmo natural) a ambos lados

$$\ln(y) = \ln(y_0) + \lambda t \quad \textcircled{A}$$

donde usé que  $\ln(e^{\lambda t}) = \lambda t$ .

Esto explica porque  $y = y_0 e^{\lambda t}$  da una recta si grafico  $\ln(y)$  vs  $t$   
y porque la pendiente es el exponente

Se observa lo siguiente:



Al principio las dos trayectorias son próximas, pero en cierto tiempo  $t_{\text{horizon}}$  se separan exponencialmente.

Ejercicio: mostrar que

$$t_{\text{horizon}} \approx \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{a}{\|d_0\|} \right)$$

donde  $\epsilon$  es la precisión con que medimos distancias y  $\|x_0\|$  es la distancia inicial entre las condiciones iniciales.

Con esto podemos definir este atractor nuevo el que llamamos caótico y lo hacemos diciendo que de lugar a un movimiento:

- ① Aperiódicos
- ② Deterministas
- ③ Sensible a las condiciones iniciales



Si el atractor caótico tiene estructura fractal, diremos que es un

ATRACTOR EXTRAÑO

— o —  
FIN

otros temas

- El mapa logístico

$$X_{n+1} = r X_n (1 - X_n)$$

Leer del capítulo 9  
ver cómo aparece caos

en un mapa unidimensional  
iterativo

- El conjunto de Mandelbrot

Ver desde donde pueden

¿Se animan a programarlo?

¡ Chau !