# SISTEMAS DINÁMICOS

Un SISTEMA DINÁMICO, para nosotros, es un sistema cuyo estado evoluciona EN EL TIEMPO.

Para nosotros, lo interesante será analizar cómo evolucionan el tiempo neuronas, sus componentes, sus señales y por último, conjuntos, muy pequeños o muy grandes, de neuronas.

Hay 2 tipos de sistemas dinámicos

Continuos: se describen con funciones continuas y sus razones de cambio

$$\frac{d\,x(t)}{dt} = a\,x(t)\,(1 - x(t))$$

El tiempo, la variable independiente es continuo

**Discretos:** se describen por relaciones recursivas

$$X(t+1) = a\, X(t)\,(1 - X(t))$$

El tiempo, la variable independiente, es discreta

En ambos casos la variable dinámica, $X(t)$, es real

$$X(t) \in \mathbb{R}$$

$$X_t \in \mathbb{R}$$

Nosotros comenzaremos analizando los sistemas dinámicos continuos, aunque en la segunda parte nos acercaremos a esos modelos discretos.

La forma general de la ecuación DIFERENCIAL ORDINARIA será

$$\frac{d\,X(t)}{dt} = f(X(t), t)$$

el tiempo puede aparecer explícitamente

Si el tiempo no aparece explícitamente en el lado derecho decimos que el sistema dinámico, y también la ecuación entonces, es AUTÓNOMO. Nos ocuparemos de sistemas autónomos.

Esto se puede generalizar de varias formas.

Podemos tener más de 1 EDO (ecuación diferencial ordinaria)

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$$

Esto se llama Sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas.

Además, podemos tener más derivas involucradas

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = f\left( x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \ldots \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}} \right)$$

En física en particular, la dinámica newtoniana se basa en ecuaciones de SEGUNDO ORDEN

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F(x(t), t)$$

masa

aceleración

fuerza

la masa por la aceleración es igual a la fuerza que se ejerce sobre la partícula. Y esta fuerza depende de la posición de la partícula y del tiempo (explícitamente e implícitamente a través de la posición, que depende del tiempo).

Pero si la partícula se mueve en tres dimensiones

$$m \frac{d^2 \bar{x}(t)}{dt^2} = \bar{F}(\bar{x}(t), t)$$

$\bar{X} \in \mathbb{R}^3$ es un vector

$\bar{F} \in \mathbb{R}^3$ es un vector

y los componentes se pueden mezclar.

$$\tilde{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

sistema de coordenadas cartesianas

$$\bar{F}(x(t), t) = \begin{bmatrix} f_x(\bar{X}(t), t) \\ f_y(\bar{X}(t), t) \\ f_z(\bar{X}(t), t) \end{bmatrix}$$

Newton inventó el cálculo diferencial (la idea de una razón de cambio "instantánea" o derivada), las ecuaciones diferenciales y luego su magnífica SEGUNDA LEY. Y ayudó muchísimo a encontrar algoritmos para resolverlas.

Si tenemos un sistema de una ecuación diferencial ordinaria no autónoma

Miremos un ejemplo de sistema físico no autónomo

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(1-x(t)) + F\cos(t)$$

Hacemos:

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = t$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)(1-x_1(t)) + F\cos(x_2(t))$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 1$$

O sea, si tenemos 1 EDO no autónoma, agregamos una variable más $x_2(t) = t$ y recuperamos un sistema autónomo de 2 EDO.

Supongamos que tenemos 1 EDO de segundo orden

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k\,x(t)$$

Ahora hacemos un truco parecido:

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$$

$$\frac{d\,x_2(t)}{dt} = -\frac{k}{m}x_1(t)$$

$$\frac{d\,x_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

Si es de tercer orden

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} = -x(t) + \gamma\frac{dx}{dt}(t)$$

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dx(x)}{dt}$$

$$x_3(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

y obtenemos

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -x_1(t) + \gamma x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

El orden de una EDO o de un sistema de EDO es el orden de la derivada de mayor orden que aparece. En general, si tenemos una EDO de orden n tenemos

$$\frac{d^n x(t)}{dt} = f\left(\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dx(t)}{dt}, x(t), t\right)$$

y se puede convertir en un sistema de $(n+1)$ ecuaciones de orden 1 y autónomas

Por esta razón nos enfocaremos solamente de sistemas de EDO de orden 1 y AUTÓNOMAS

## CUESTIONES DE NOTACIÓN

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}$$

omitiremos denotar las dependencias en t, pero están ¡ojo!

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),t) \longrightarrow \dot{x} = f(x,t)$$

notación simplificada

# SOBRE NUESTRO INTERÉS

NO queremos encontrar soluciones cerradas (analíticas) ante un sistema de EDS.

Nos interesa en cambio saber donde estará el sistema cuando $t \longrightarrow \infty$, y conocer la naturaleza dinámica del atractor.

Si tenemos 1 EDO, $\dot{x} = f(x)$, el lado derecho $f(x)$ nos da valiosa información que aprenderemos a usar.

Si la función $f$ es lineal, el problema es mucho más simple y el álgebra lineal nos asiste para conocer las soluciones sin mayores complicaciones.

Pero en las ciencias naturales, sociales y de la vida, los problemas están representados por funciones $f(x)$ no lineales.

Una fenómeno dinámico es lineal si las funciones que describen las reglas de cambio son a lo sumo polinomios de grado 1

Ejemplos

$$\dot{x} = -kx$$

$$\dot{x} = \pi$$

Cualquier otra función es NO LINEAL

La DIMENSIÓN del sistema dinámico no se refiere a la dimensión espacial en la cual uno describe el fenómeno (usualmente 3D), sino a la dimensión del espacio en el cual debo representar el problema, o sea, el número de variables dinámicas.

Por ejemplo, si para describir una neurona uso 27 variables, la neurona, desde el punto de vista dinámico vive en $\mathbb{R}^{27}$ (dimensión 27)

# ACLARACIÓN

Muchas veces la función incógnita depende del tiempo $t$ y de otras variables independientes, como por ejemplo, la posición $\vec{r} = (x, y, z)$. Así ni $x$, ni $y$, ni $z$ dependen de $t$.

En este caso la ecuación viene dada con una función de muchas variables como incógnita $g(x, y, z, t)$ y describe la relación entre diferentes razones de cambio parciales (derivadas parciales).

EJEMPLO

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

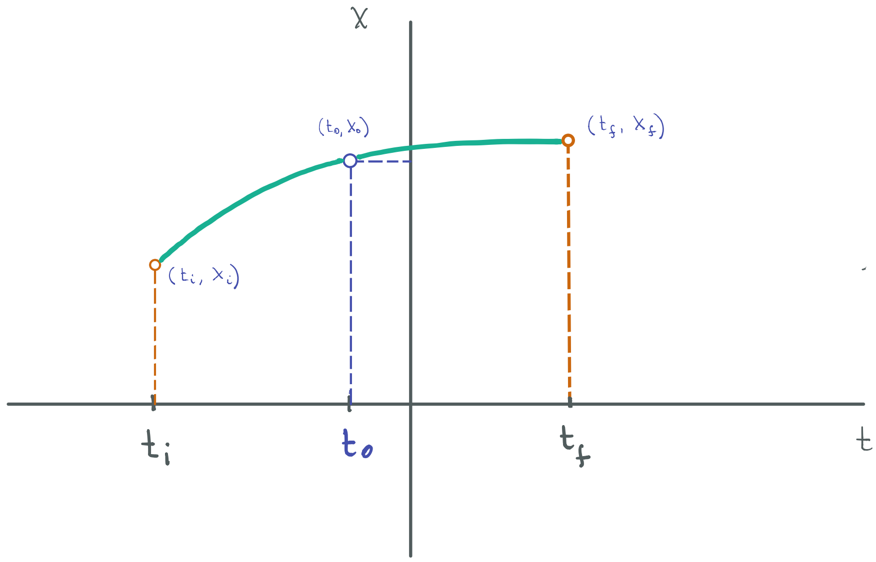
Esta es una ECUACIÓN A DERIVADAS PARCIALES (no de derivadas ordinarias).

¡¡EN ESTE CURSO NO VEREMOS Ecuac. Deriv. Parciales!!

Nos interesa MUCHO como la NO LINEALIDAD y la dimensión del problema afectan la naturaleza del comportamiento de un sistema dinámico para tiempos muy largos ($t \to \infty$)

Si lo que buscan son trayectorias particulares que describen el cambio $x(t)$ deben apelar a métodos numéricos (por ejemplo, el método de Runge Kutta de 4to orden) para resolver un problema más simple y acotado llamado PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Dada la EDO $\dot{x} = f(x)$, el problema de valor inicial consiste en encontrar o aproximar la trayectoria que vale $x_0$ en $t_0$ ($x(t_0) = x_0$) en cierto intervalo de tiempo que incluye $t_0$.


x
(t₀, x₀)
(t_f, x_f)
(t_i, x_i)
t_i
t₀
t_f
t

# UN POCO DE HISTORIA

**Dynamics - A Capsule History**

| | | |
|---|---|---|
| 1666 | Newton | Invention of calculus, explanation of planetary motion |
| 1700s | | Flowering of calculus and classical mechanics |
| 1800s | | Analytical studies of planetary motion |
| 1890s | Poincaré | Geometric approach, nightmares of chaos |
| 1920–1950 | | Nonlinear oscillators in physics and engineering, invention of radio, radar, laser |
| 1920–1960 | Birkhoff<br>Kolmogorov<br>Arnol'd<br>Moser | Complex behavior in Hamiltonian mechanics |
| 1963 | Lorenz | Strange attractor in simple model of convection |
| 1970s | Ruelle & Takens | Turbulence and chaos |
| | May | Chaos in logistic map |
| | Feigenbaum | Universality and renormalization, connection between chaos and phase transitions |
| | | Experimental studies of chaos |
| | Winfree | Nonlinear oscillators in biology |
| | Mandelbrot | Fractals |
| 1980s | | Widespread interest in chaos, fractals, oscillators, and their applications |

# ÚLTIMA ACLARACIÓN DE ESTA PARTE

Un sistema dinámico se define formalmente como un espacio de los estados $X$, un conjunto de tiempos $T$ y una regla $f$ que especifica como el espacio de los estados $X$ evoluciona en el tiempo. La regla $f$ es una función cuyo dominio es $X \times T$ y cuya imagen es $X$, o sea,

$$f : X \times T \to X$$

O sea, $f$ toma dos entradas, $f(x, t)$, siendo que $x \in X$.

Una forma alternativa de ver un sistema dinámico es pensarlo como una regla que define cómo el estado de un sistema cambia en el tiempo. Formalmente, es la action de los reales (si el sistema es continuo) o los enteros (si el sistema es discreto) sobre una variedad (un espacio topológico que puede representarse por un espacio euclídeo localmente en la vecindad de cada uno de sus puntos).