

SISTEMAS DINÁMICOS UNIDIMENSIONALES

Flujo en la línea

Consideremos a partir de ahora (y por ahora) un sistema unidimensional, descrito por una variable x real (topológicamente equivalente a \mathbb{R}). Suponemos además que no depende explícitamente del tiempo t .

$$\dot{x} = f(x)$$

Miremos un ejemplo supuestamente simple

$$\dot{x} = \sin(x)$$

Notemos que $\sin(x)$ es una función muy buena, desde el punto de vista del análisis.

Intentemos resolverla:

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow dt = \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$\int_0^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$t = \int_{x_0}^x \operatorname{cosec}(x)$$

$$= -\ln(|\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{cotg}(x)|) + C$$

Si $x = x_0$ en $t = 0$:

$$t_0 = 0 = -\ln(|\operatorname{cosec}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)|) + C$$

$$C = \ln(|\operatorname{cosec}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)|)$$

Donc

$$t = -\ln(|\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{cotg}(x)|) + \ln(|\operatorname{cosec}(x_0) + \operatorname{cotg}(x_0)|)$$

$$t = \ln \left(\left| \frac{\csc(x_0) + \cotg(x_0)}{\csc(x) + \cotg(x)} \right| \right)$$

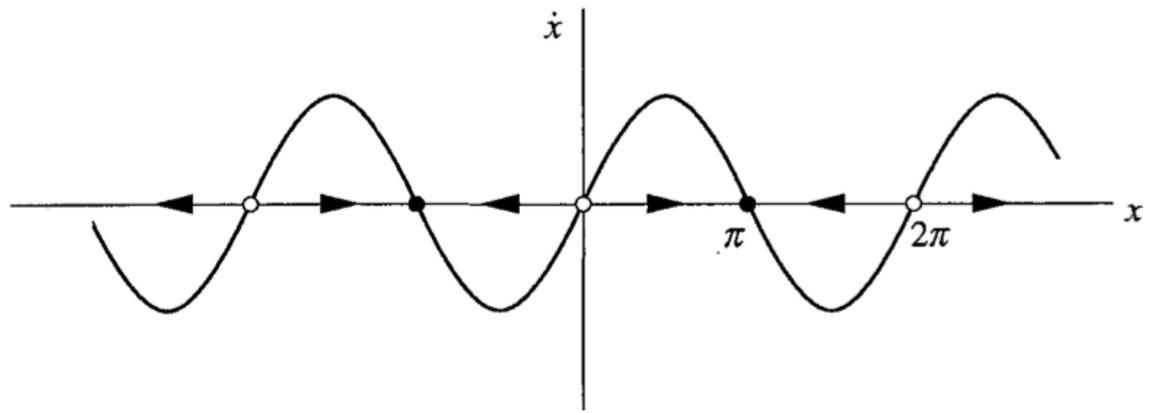
Observamos que siendo $f(x) = \sin(x)$ una función matemáticamente bien comportada, hemos llegado tan lejos como podemos en la búsqueda de la expresión analítica de la solución de $\dot{x} = \sin(x)$.

No podemos invertir esta expresión para encontrar $x(t)$

A lo sumo podríamos resolver la inversión en forma numérica, pero no es una opción muy interesante.

Nos preguntamos, dada una condición inicial arbitraria $x(t=t_0) = x_0$, ¿cuál será el comportamiento de $x(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$?

Comenzaremos graficando el lado derecho, que modela la razón de cambio de $x(t)$ en función de $x(t)$.



Tengamos en cuenta que el tiempo no aparece en este gráfico x vs. \dot{x} .

La curva representa la región de cambios. Si $f(x) > 0$ el punto x estará en un instante posterior a la derecha, pues su región de cambios es positiva. Si $f(x) < 0$ se desplazará hacia la izquierda.

Si $f(x) = 0$, el sistema se quedará en ese punto para siempre ($t \rightarrow \infty$).

Las raíces (los ceros) de la función $f(x)$ se denominan **PUNTOS FIJOS** del sistema, pues si en t_0 el sistema está en ese valor, se quedará allí (recuerden que nuestro sistema es determinista).

Si $f(x^*) = 0$, decimos que x^* es un **PUNTO FIJO** del sistema $\dot{x} = f(x)$.

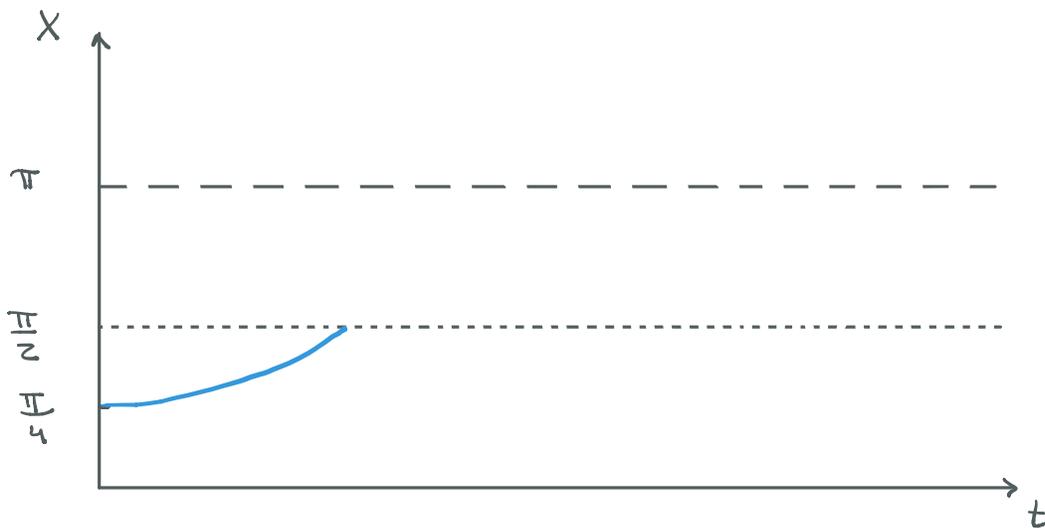
En el gráfico vemos que hay puntos que atraen a ciertas porciones del dominio de f , y son puntos fijos **ATRACTORES** o **ESTABLES**. Se lo representa con círculos llenos en el gráfico.

También hay puntos que repelen trayectorias, y son puntos fijos **REPULSORES** o **INESTABLES**. Se representan con círculos vacíos en el gráfico.

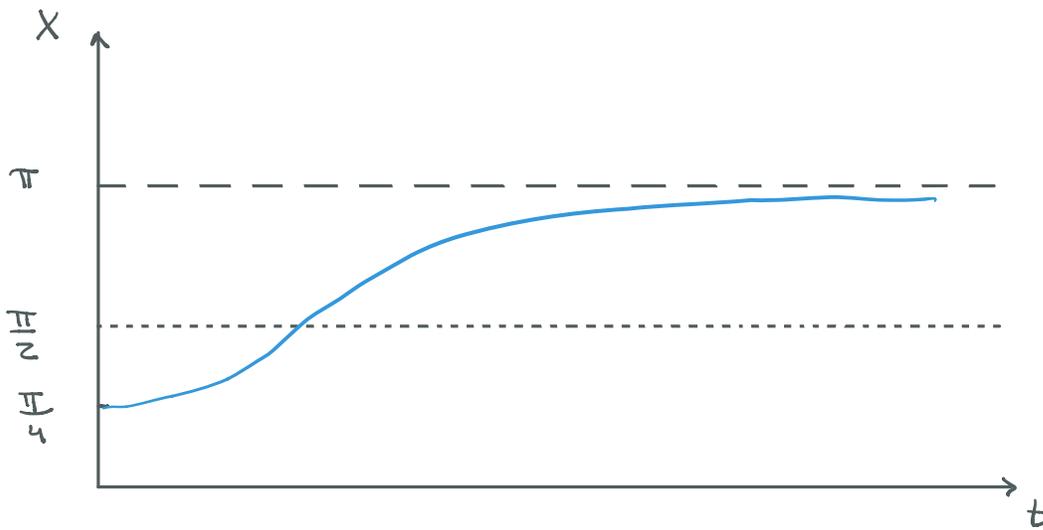
Si por ejemplo, comenzamos con $x_0 = \frac{\pi}{4}$ en $t=0$, el punto se desplazará hacia la derecha, hacia $x^* = \pi$.

Noten que en cada punto de dominio de f (en este caso \mathbb{R}) un vector cuya magnitud es $|f(x)|$ y sentido es hacia la derecha si $f(x) > 0$ y hacia la izquierda si $f(x) < 0$. Esto define un campo vectorial (flechas) que representa **EL FLUJO**.

Miremos que pasa si comenzamos con $\frac{\pi}{4}$. El sistema comienza a crecer (va hacia la derecha), y como la razón de cambio, además de ser positiva crece más, la derivada segunda de $X(t)$ es positiva.

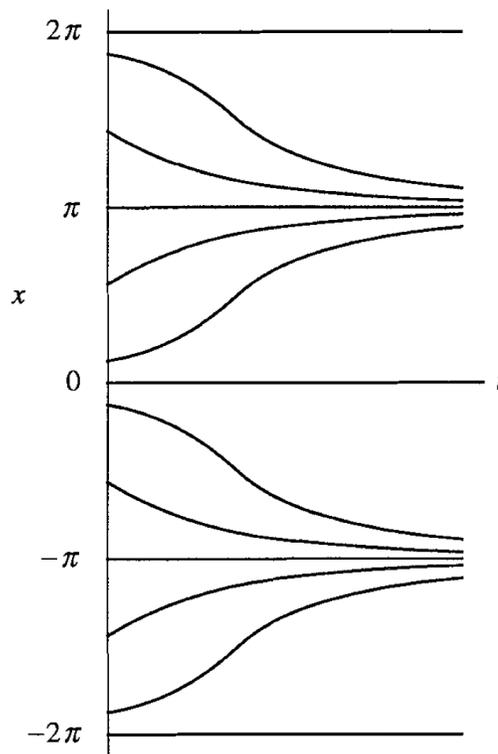


Cuando alcanza $x = \frac{\pi}{2}$, vale 1. A partir de ahora la razón de cambio sigue siendo positiva, pero cada vez es menos importante, y entonces la derivada primera es positiva pero la segunda es negativa.



El sistema se aproxima a π asintóticamente, pero nunca llega, pues a medida que se aproxima la velocidad tiende a cero.

Con esto podemos hacernos una idea cualitativa de las trayectorias posibles, y precisar sobre dónde estará el sistema cuando $t \rightarrow \infty$.



Los **ATRACTORES** son los múltiplos de π .

$$X_k^* = k\pi \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$k \in \mathbb{Z}$

Los atractores con k par o cero son inestables. El sistema puede estar en ellos, pero para estar en uno de estos puntos cuando $t \rightarrow \infty$, debió estar ahí todo el tiempo medido.

Los atractores con k impar son estables. Estos atractores atraen flujo de infinitas trayectorias.

$$X_{2k+1}^* = (2k+1)\pi \text{ atrae trayectorias que están en } (2k\pi, 2(k+1)\pi)$$

abierta

Vemos en la próxima clase que para $t \rightarrow \infty$ el sistema puede

- ir hacia infinito $X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$
- ir hacia menos infinito $X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -\infty$
- ir hacia o permanecer en un punto fijo estable.
- permanecer en un punto fijo inestable.

SEGUIMOS EN LA PRÓXIMA CLASE