REPASO DE LA CLASE ANTERIOR

Estamos analizando el caso unidimensional, o sea, una única ecuación diferencial ordinaria (EDO) autónoma

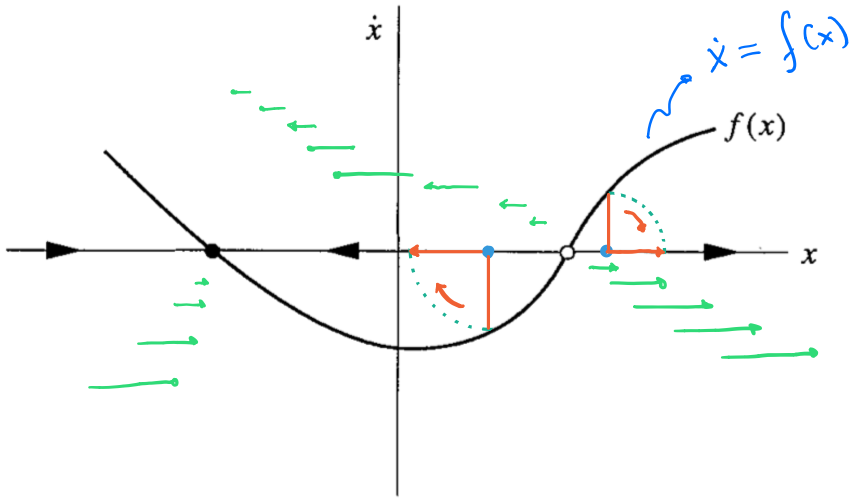
$$\dot{x} = f(x)$$

ACLARACIONES

- $\dot{x} \equiv \dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv x'(t)$ (notación)
- es autónomo no porque no aparece el tiempo t explícitamente
- no aspiramos a encontrar la solución, que es una función $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface que su razón de cambio viene dada por $f(x(t))$. Solo queremos saber

$$\lim_{t \to \infty} x(t)$$

Aprendimos ya que el lado derecho de nuestra EDO guarda MUCHÍSIMA información sobre el comportamiento a tiempos largos



A cada punto del eje x le asignamos un vector que apunta hacia la derecha si la razón de cambio $f(x)$ es positiva y hacia la izquierda si es negativa, y cuya magnitud es $|f(x)|$

Esto es un campo vectorial que a cada vector en $\mathbb{R}$ le asigna un vector en $\mathbb{R}$.

El campo vectorial nos dice hacia dónde se mueve un sistema cuya variable DINÁMICA x vale $x(t)$ en t.

A tiempo infinito el sistema unidimensional SÓLO PUEDE ESTAR EN

- uno de los puntos fijos.
- en $+\infty$.
- en $-\infty$.

Recuerden: un PUNTO FIJO es una raíz de $f(x)$, o sea, un valor de $x(t)$ para el cual la razón de cambio de $x(t)$ es nula

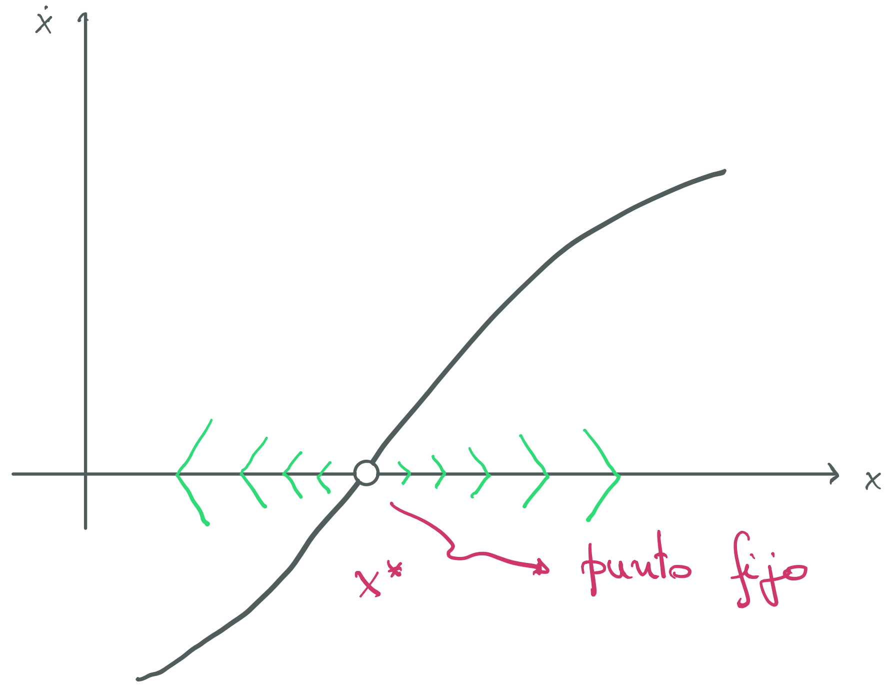
$$f(\underbrace{x^*}_{\text{número real}}) = 0$$

Si en cierto instante de tiempo t sucede que

$$x(t) = \underbrace{x^*}_{\text{número real}}$$

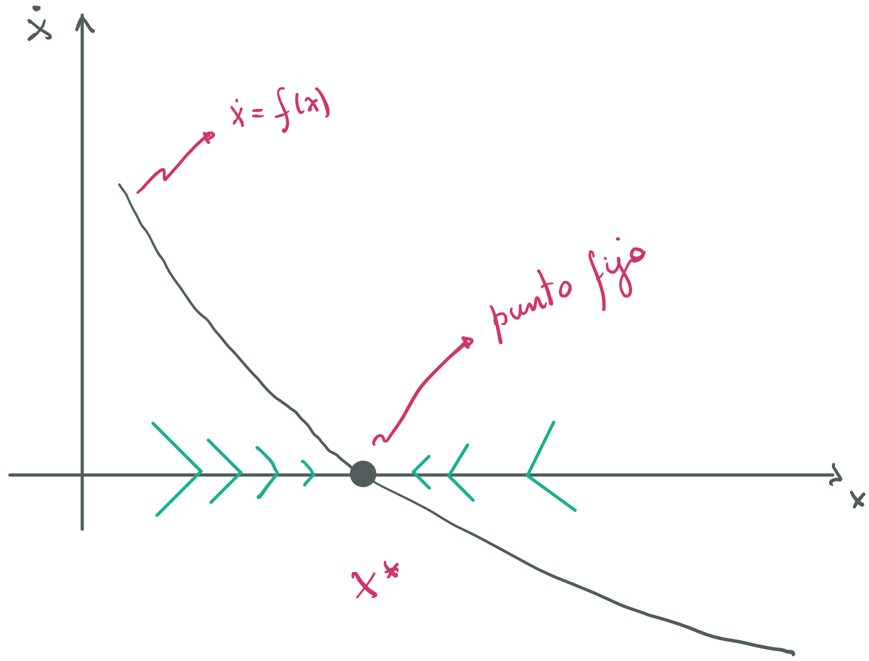
entonces quedaré en ese valor hasta el final de los tiempos (tiempo infinito).

Miremos con más detalle los puntos fijos. Dijimos ya que los hay de 2 tipos

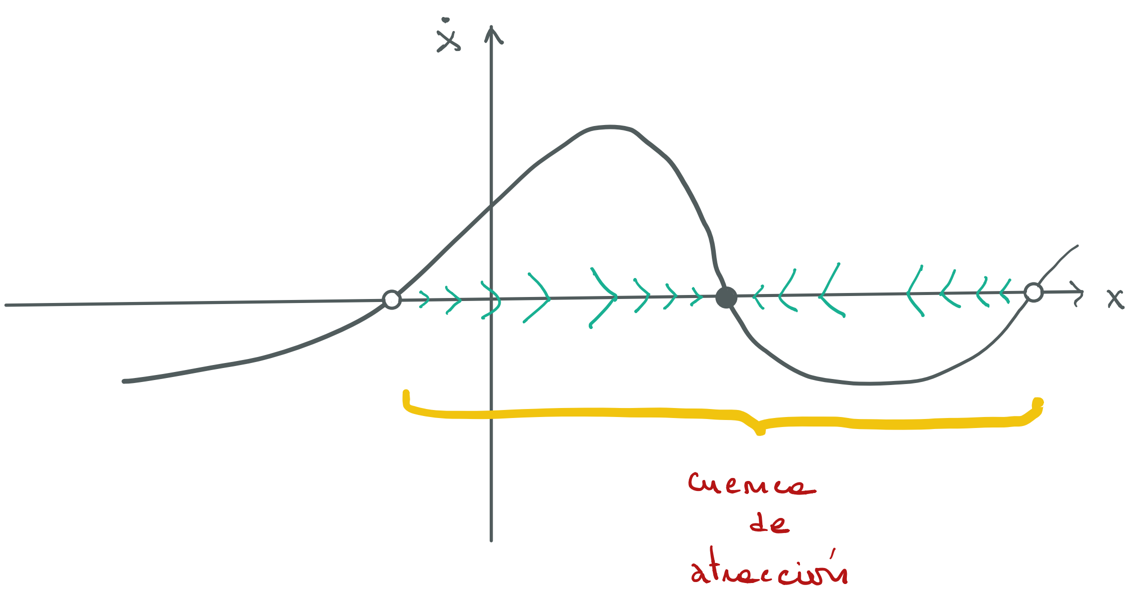


Los vectores del campo EMERGEN del punto fijo. Si el sistema está infinitesimalmente cerca del punto fijo (por derecha o por izquierda) será repelido, expulsado, apartado del punto fijo. Pero si el sistema está EXACTAMENTE en el punto fijo, se quedará allí, repeliendo a todos

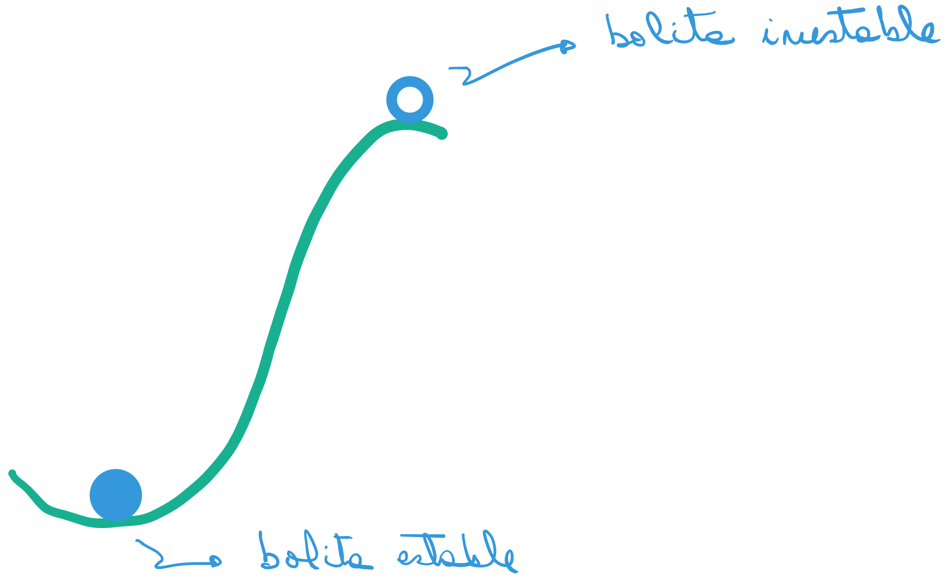
Los puntos REPELENTES atraviesan el eje x con pendiente positiva $f'(x^*) > 0$.



Ahora los vectores del campo CONVERGEN al punto fijo. Es un sumidero de vectores. Si el sistema está alrededor de x^* (y hasta sus puntos fijos vecinos) entonces atraerá todos los sistemas que en $t=0$ se preparen en esa cuenca.



ANALOGÍA

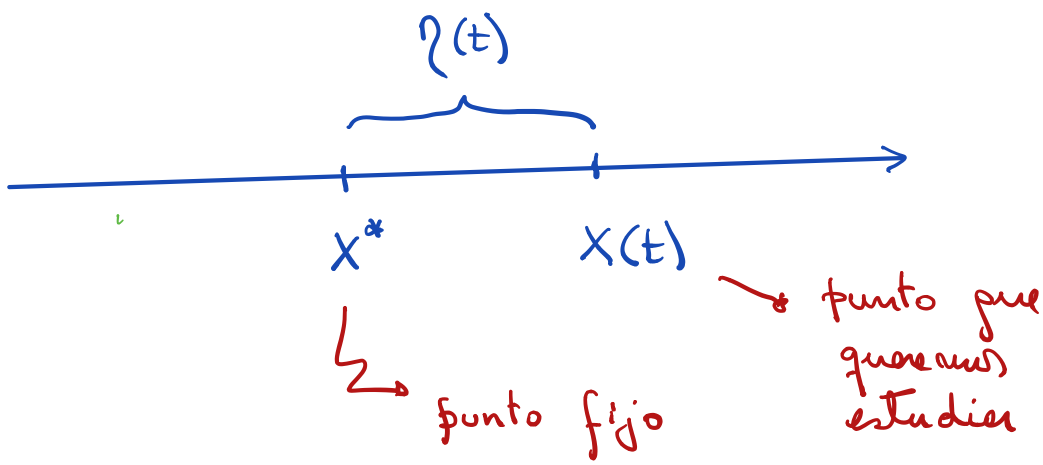


Repitamos este análisis usando buen cálculo. Esto será útil en dimensiones mayores, donde no podremos apelar a la intuición que nos brinda la geometría.

PAISAJES Y MACHINE LEARNING

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD LINEAL

$$x(t) = x^* + \eta(t)$$



$$\dot{x} = f(x)$$

$$(x^* + \eta(t))^{\bullet} = f(x^* + \eta(t))$$

$$\underbrace{\cancel{\dot{x}^*}}_{=0} + \dot{\eta}(t) = f(x^* + \eta(t))$$

x^* es una constante

$$\dot{\eta}(t) = f(x^* + \eta(t))$$

Ahora tenemos una descripción alternativa pero equivalente para $\eta(t)$ (cambio de coordenadas).

Si asumimos $\eta(t) \ll 1$ (pequeño) podemos usar el teorema de Taylor y aproximar la función por una recta, para lo cual exigimos que f sea continua y diferenciable y que así lo sean su derivada y su segunda derivada:

$$f(x^*+\eta(t)) = f(x^*) + \eta(t)\, f'(x^*) + \frac{1}{2}\,\eta^2(t)\, f''(\xi)$$

con $\xi \in (x^*, x^*+\eta(t))$

Suponiendo que $\eta(t)$ es pequeño, podemos despreciar el error y aproximar

$$f(x^*+\eta(t)) \approx \underbrace{\cancel{f(x^*)}}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{por ser} \\ \text{punto crítico}}} + \eta(t)\, \underbrace{f'(x^*)}_{\substack{\text{número} \\ \text{real}}}$$

Reemplazando en la ecuación

$$\dot{x} = f(x)$$

$$\downarrow$$

$$\dot{\eta}(t) = f(x^* + \eta(t))$$

$$\boxed{\dot{\eta}(t) \approx \eta(t)\, f'(x^*)}$$

ecuación para la perturbación

Ahora tenemos una ecuación para la perturbación, fácil de resolver

$$\eta(t) = A\, e^{\overbrace{f'(x^*)}^{=\text{cte}}\, t}$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = A\, f'(x^*)\, e^{f'(x^*)t}$$

$$= f'(x^*)\left(A e^{f'(x^*)t}\right)$$

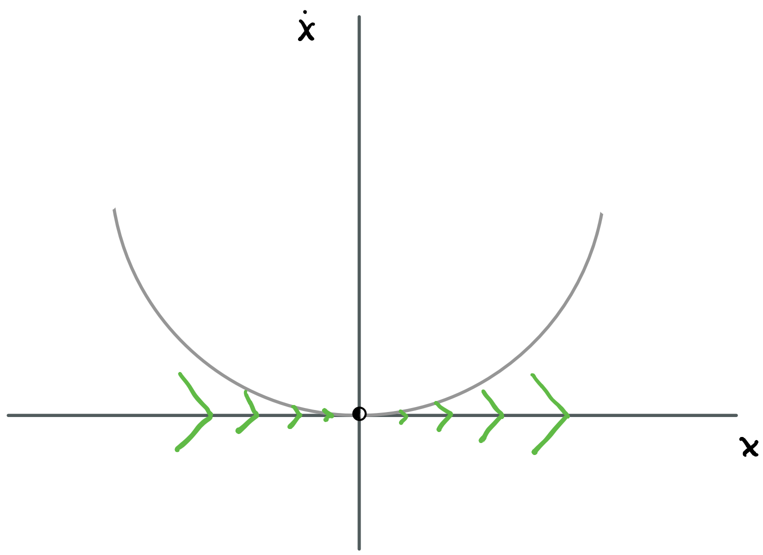
$$= f'(x^*)\, \eta(t)$$

Si $f'(x^*) > 0$ la perturbación crece exponencialmente

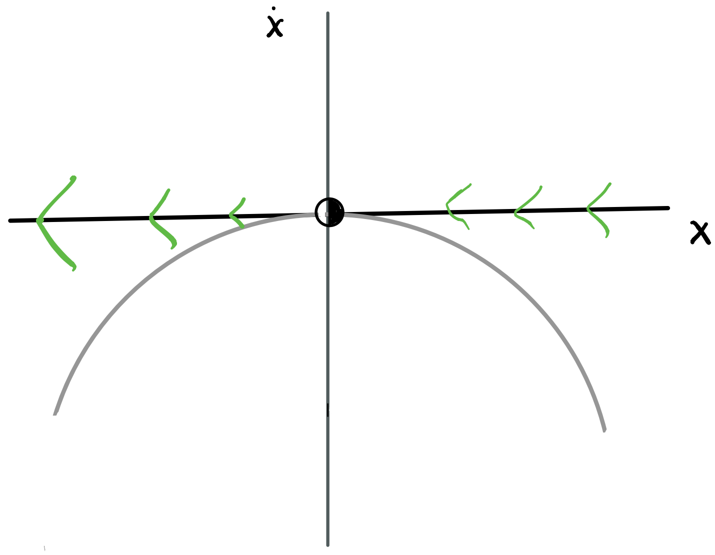
Si $f'(x^*) < 0$ la perturbación decrece exponencialmente

$$\frac{1}{|f'(x^*)|}$$: tiempo característico

PUNTOS FIJOS SEMI ESTABLES



Este punto fijo es estable por izquierda e inestable por derecha.



Este punto fijo es inestable por izquierda y estable por derecha.

Teorema: consideremos el problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x) \quad y \quad x(0) = x_0$$

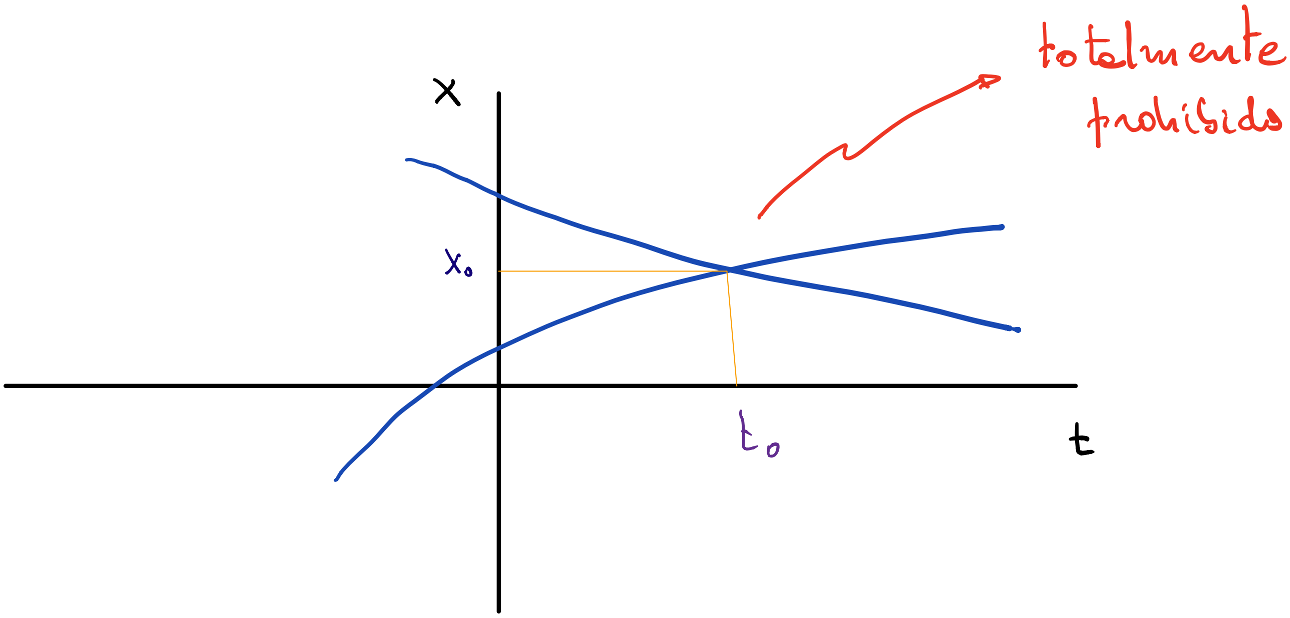
Supongamos que $f \in C^1$, o sea, que f y f' son continuas en un intervalo abierto I en el eje x y supongamos $x_0 \in I$. Entonces este problema tiene solución en cierto intervalo

$$(-\varepsilon, \varepsilon)$$

y además la solución es única.

Resumiendo, con que f sea "un poco suave", alcanza para que la solución exista y sea única.

Volvamos a la trayectoria $x(t)$



Si las trayectorias se cruzaran, en ese t habría dos soluciones diferentes para el problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x) \quad y \quad x(t) = x_0$$

IMPOSIBILIDAD DE SOLUCIONES OSCILATORIAS

No puede el sistema crecer un tiempo y decrecer después, o viceversa. Para eso el sistema debería pasar sobre un punto fijo, pero al llegar se detendría.

NO HAY OSCILACIONES COMO SOLUCIONES DE

$$\dot{x} = f(x) \quad y \quad x(0) = x_0$$

CUALQUIERA SEA f, x_0 y el origen del tiempo

EJEMPLO

Miremos el caso de una población de bacterias

$$\dot{N}(t) = f(N(t))$$

$$\dot{N} = rN \qquad r = 0$$

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

$$N_0 = N(t=0)$$

Esto es poco realista por cierto. En algún momento el crecimiento exponencial debe detenerse

$$\dot{N} = rN - g(N)$$

debe disminuir la razón de cambio

Si no se puede supongo cuadrático (explicar por qué).

$$\dot{N} = rN - \alpha N^2$$

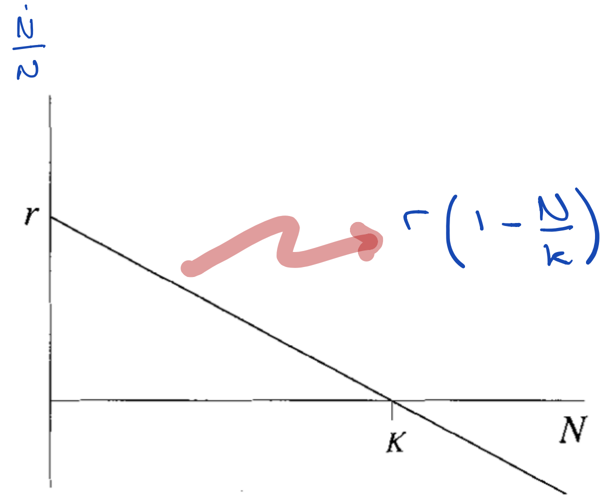
$$= rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \qquad \alpha = \frac{r}{K}$$

$$\frac{\dot{N}}{N} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Dos puntos fijos

$N^* = 0$

$N^* = K$



$$N^* = K \quad \text{punto fijo}$$

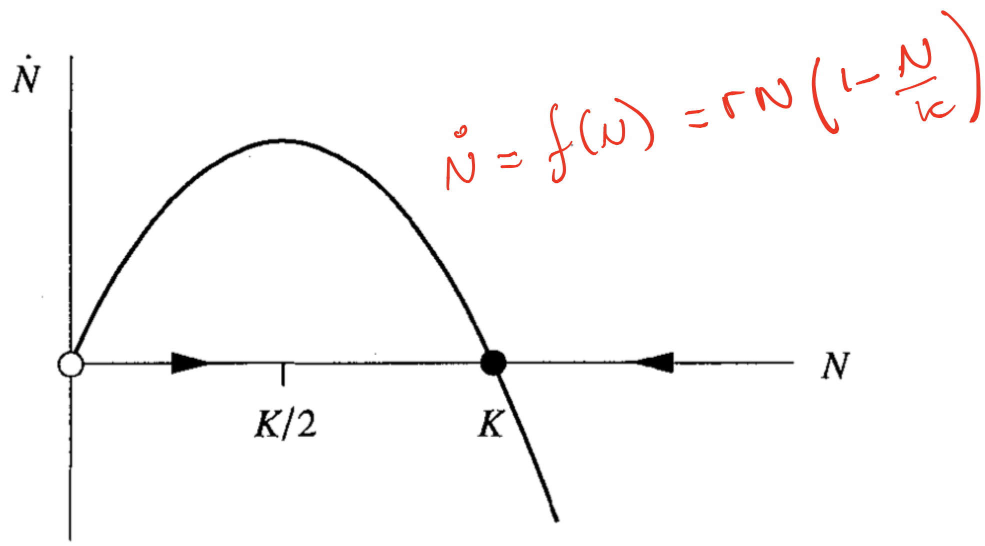
$$N' = r - \frac{2r}{K}N$$

$$N'(K) = r - \frac{2r\cancel{K}}{\cancel{K}} = r - 2r = -r < 0$$

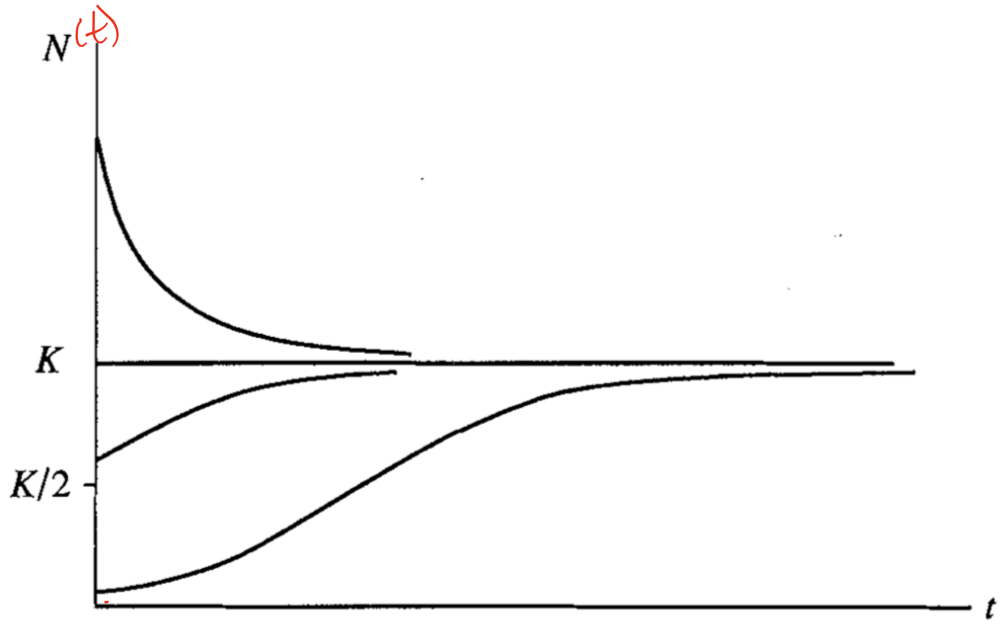
Entonces el punto fijo es estable.

$$N(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} K \quad \text{si } N_0 > 0$$

K : carrying capacity
capacidad de carga



$$\dot{N} = f(N) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$



Los puntos fijo son dos:

$$N^* = 0 \qquad N^* = K$$

$$f'(N) = r - \frac{2Nr}{K}$$

$N^* = 0$ $\quad f'(0) = r > 0$ punto fijo inestable

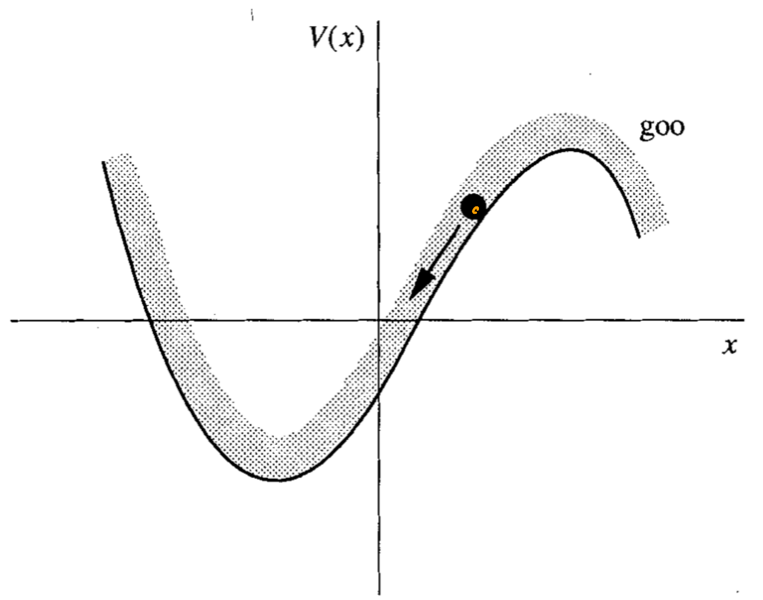
$N^* = K$ $\quad f'(K) = -r < 0$ punto fijo estable

POTENCIALES

$$\dot{x} = f(x) \quad y \quad f(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

Si esto se puede hacer, $V(x)$ se llama potencial

Esto se usa para redes neuronales recurrentes (Hopfield, BM, y RBM).



partícula en medio muy viscoso

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -f(x)\,\dot{x}$$

$$= -\left[f(x)\right]^2 < 0$$

Entonces V decrece en el tiempo. Los puntos críticos de $\dot{x} = f(x)$ son los mínimos de $V(x)$

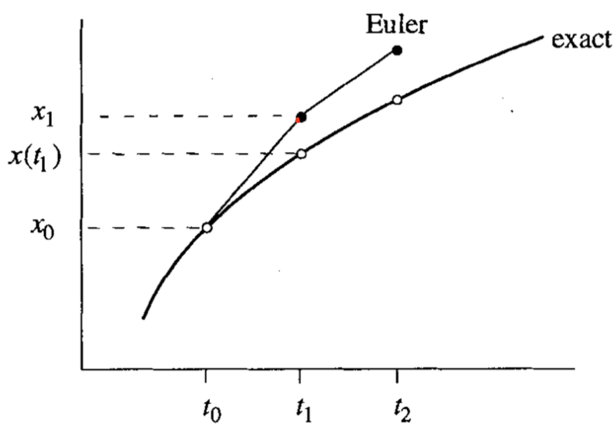
$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad y \quad \frac{d^2V}{dx^2} > 0$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right) = -\frac{d}{dx}(f)$$

SOLUCIONES NUMERICAS

Veamos cómo encontrar numéricamente una solución, pero no del problema de conocer los atractores ($t \to \infty$) de la ecuación diferencial, sino del problema de valor inicial:

$$\dot{x} = f(x) \quad y \quad x(t_0) = x_0$$



$$\dot{x}(\quad = f(x(t_0)) = f(x_0)$$

$$\frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \approx f(x_0)$$

$$x_0 + \Delta t = x_1$$

$$\frac{x(t_1) - x(t_0)}{\Delta t} \approx f(x_0)$$

$$x(t_1) \approx x(t_0) + \Delta t\, f(x_0)$$

$t = t_0 \qquad t_n = t_0 + n\,\Delta t$

Método de Euler

$$\begin{cases} \tilde{x}_0 = x(t_0) = x_0 \\ \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + f(\tilde{x}_n)\,\Delta t \end{cases}$$

Método de Euler Mejorado

$$\begin{cases} \tilde{x}'_{n+1} = \tilde{x}_n + f(\tilde{x}_n)\,\Delta t \\ \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \frac{1}{2}\left[f(x_n) + f(\tilde{x}'_{n+1})\right]\Delta t \end{cases}$$

Método Runge Kutta 4to Orden

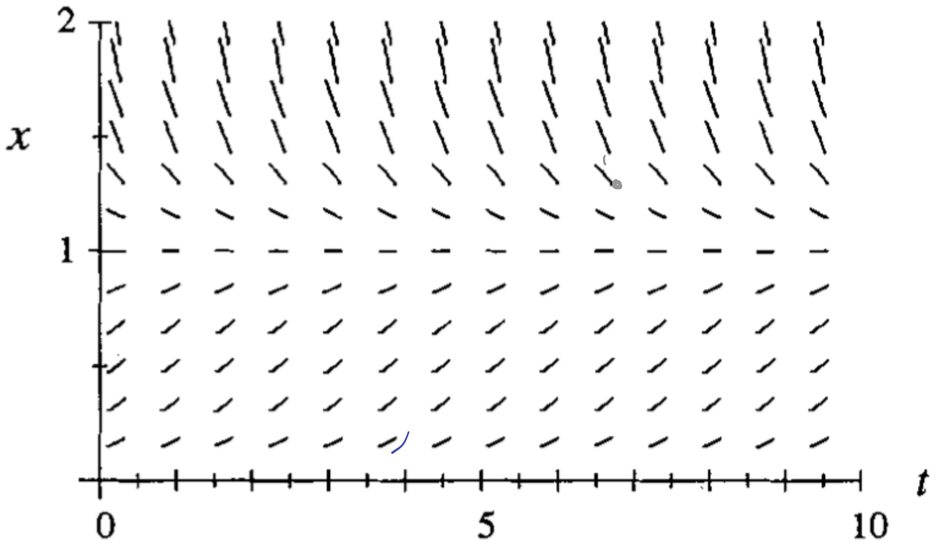
$$\begin{cases} k_1 = f(\tilde{x}_n)\,\Delta t \\ k_2 = f(\tilde{x}_n + \frac{1}{2}k_1)\,\Delta t \\ k_3 = f(\tilde{x}_n + \frac{1}{2}k_2)\,\Delta t \\ k_4 = f(\tilde{x}_n + k_3)\,\Delta t \\ \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

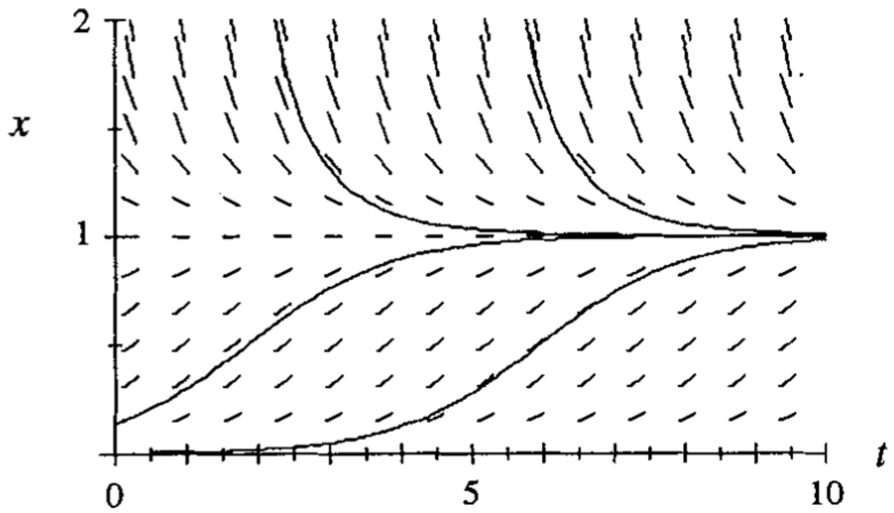
CAMPO DE PENDIENTES

Ejemplo: $\dot{x} = x(1-x)$

$x^* = 0$

$x^* = 1$





CONTINUA → PARTE 2

FIN PARTE 1