EL CASO BIDIMENSIONAL

Supongamos que queremos analizar el caso de dos ecuaciones diferenciales acopladas autónomas de forma:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f_2 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

f_1 y f_2 son dos funciones

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

incógnitas

$x_1(t)$

$x_2(t)$

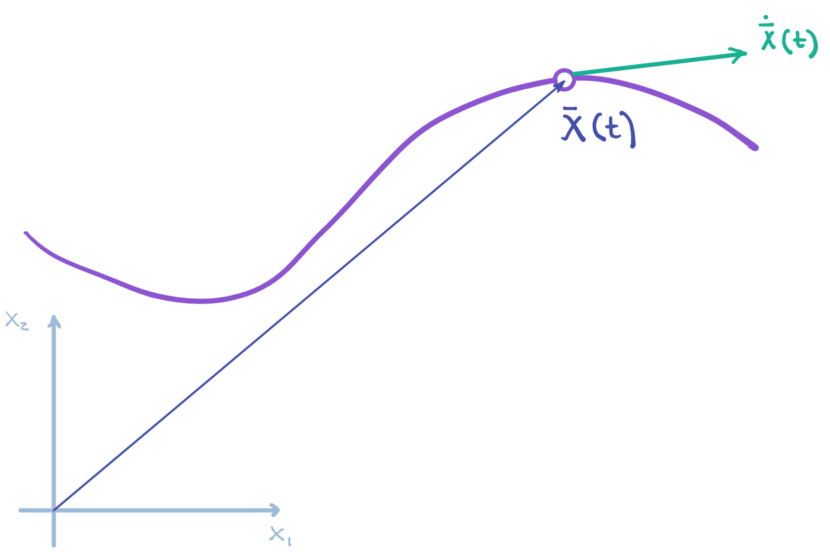
Cada función tiene dominio en el plano $\mathbb{R}^2$.

NOTACIÓN VECTORIAL

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

El vector $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ representa un punto en el plano, y $\dot{\bar{x}}(t)$ representa la velocidad en ese punto



El tiempo t no aparece en el gráfico, pero está parametrizando la curva.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que consideramos asocia a cada punto de $\mathbb{R}^2$ un vector de 2 componentes reales. Esto se denomina un campo de velocidades, pues a cada $\bar{x}$ asocia un vector $\dot{\bar{x}}$.

Como en el caso de dimensión D=1, no tenemos espiraciones de resolver analíticamente este sistema de EDO. Queremos tener información del comportamiento del sistema en tiempos muy largos, o sea, en el límite $t \to \infty$, a través de un análisis cualitativo.

EXISTENCIA y UNICIDAD

Teorema: consideremos el problema de valor inicial

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \qquad \bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

Supongamos que f_i $(i=1,2,\dots,n)$ son funciones continuas y que todas sus derivadas parciales

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \text{con} \quad i,j = 1,2\ldots,n$$

son continuas en cierto conjunto abierto

$$D \subset \mathbb{R}^n$$

Entonces para $\bar{x}_0 \in D$, el problema de valor inicial tiene UNA solución $\bar{x}(t)$ en cierto intervalo de tiempo $(-\tau, \tau)$ alrededor de $t=0$, y la solución es ÚNICA.

Otra vez, se requiere muy poco para que la solución exista, como habíamos visto en el caso unidimensional.

Esto quiere decir que diferentes trayectorias no se pueden intersectar.

LINEALIZACIÓN

Supongamos que $\bar{X}^* = (x^*, y^*)$ es un punto fijo de nuestro sistema de 2 EDO.

Noten que al linealizar, cambiamos la notación sin que esto traiga ninguna consecuencia:

$$\dot{x} = f(x, y)$$

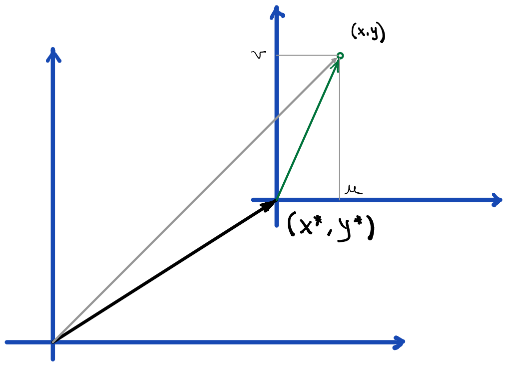
$$\dot{y} = g(x, y)$$

$$f(x^*, y^*) = 0 \qquad g(x^*, y^*) = 0.$$

Ahora describimos el problema desde el punto fijo

$$x = x^* + u, \qquad u = x - x^*$$

$$y = y^* + v, \qquad v = y - y^*$$



$$\dot{u} = \dot{x}$$

$$\dot{v} = v$$

$$\dot{u} = \dot{x} = f(x^* + u,\ y^* + v)$$

$$= \underbrace{f(x^*, y^*)}_{=0} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + \cancel{O(u^2, v^2, uv)}$$

$$\dot{u} \approx u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\dot{v} = \dot{y} = g(x^* + u,\ y^* + v)$$

$$= \underbrace{g(x^*, y^*)}_{=0} + u\frac{\partial g}{\partial x} + v\frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv)$$

$$\dot{v} \approx u\frac{\partial g}{\partial x} + v\frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

Matriz Jacobiana

Ahora tenemos un sistema lineal.

Continuamos analizando ahora un sistema lineal

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned}}$$

donde a, b, c y d son parámetros.

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Notemos que $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es siempre punto fijo.

$$A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

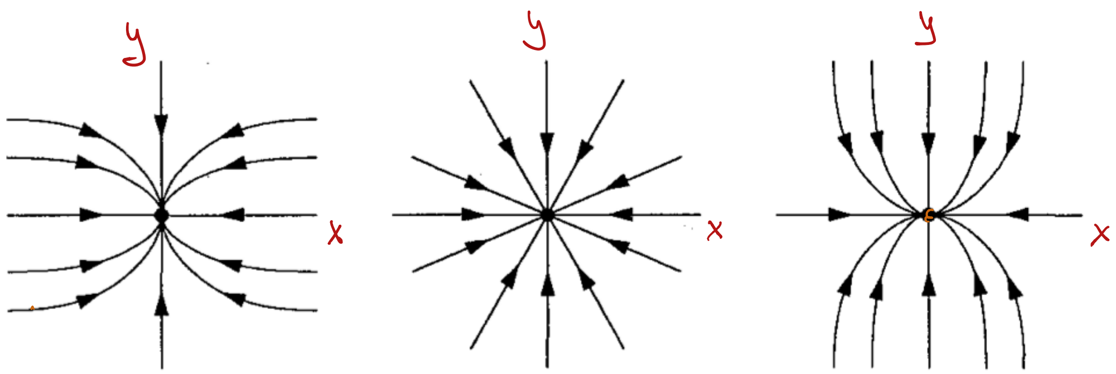
Las soluciones $\bar{x}(t)$ pueden visualizarse como trayectorias que no se cortan en $\mathbb{R}^2$.

Consideremos el caso particular

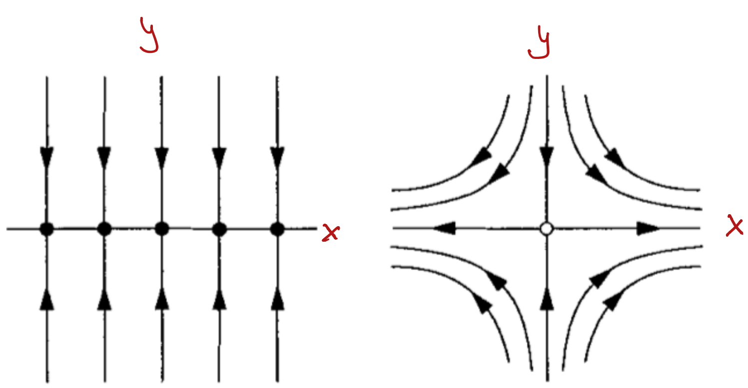
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = a x \qquad\qquad x(t) = x_0 \, e^{at}$$

$$\dot{y} = -y \qquad\qquad y(t) = y_0 \, e^{-t}$$



(a) $a < -1$ (b) $a = -1$ (c) $-1 < a < 0$



(d) $a = 0$ (e) $a > 0$