SISTEMAS CONSERVATIVOS

$$m\ddot{x} = F(x)$$

no aparece t ni $\dot{x}$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -F(x)$$

$$m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = 0$$

$$\dot{x}\left[m\ddot{x} + \frac{dV(x)}{dx}\right] = 0$$

$$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dV(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}^2\right) = \frac{m}{\cancel{2}}\cancel{2}\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x}$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{dV(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dV(x)}{dx}\dot{x}$$

$$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}^2\right) + \frac{dV(x)}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)\right] = 0$$

O sea, la cantidad

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

es conservada, o sea, no cambia en el tiempo

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Un sistema físico de este tipo se denomina

SISTEMA CONSERVATIVO

Generalizando:

Dado un sistema $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$, una CANTIDAD CONSERVADA es una función real que es constante a lo largo de las trayectorias.

Un sistema conservativo no admite puntos fijos atractivos

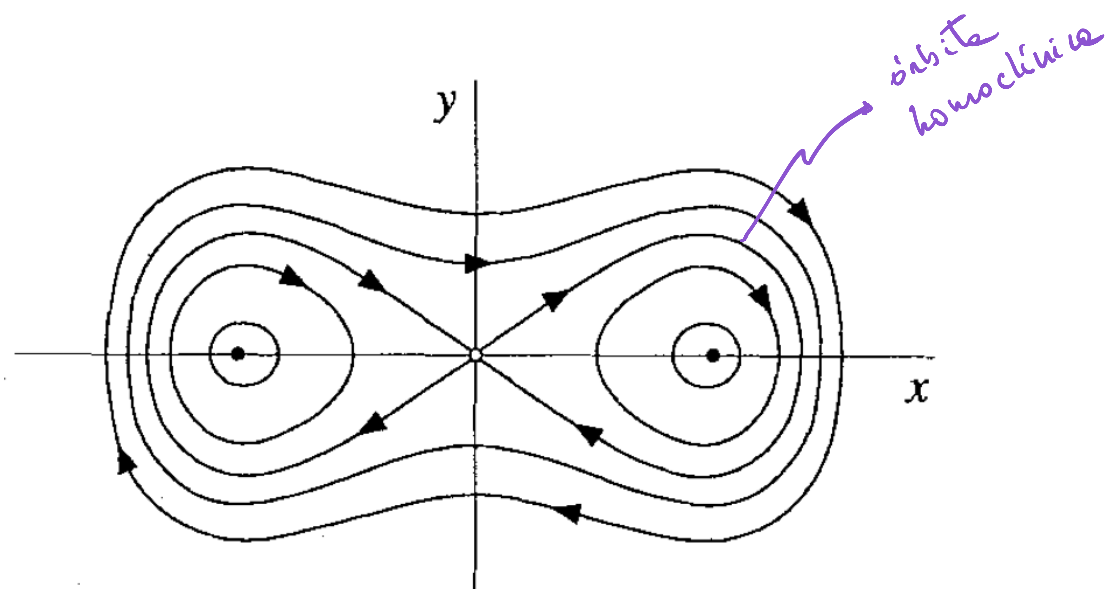
Ejemplo:

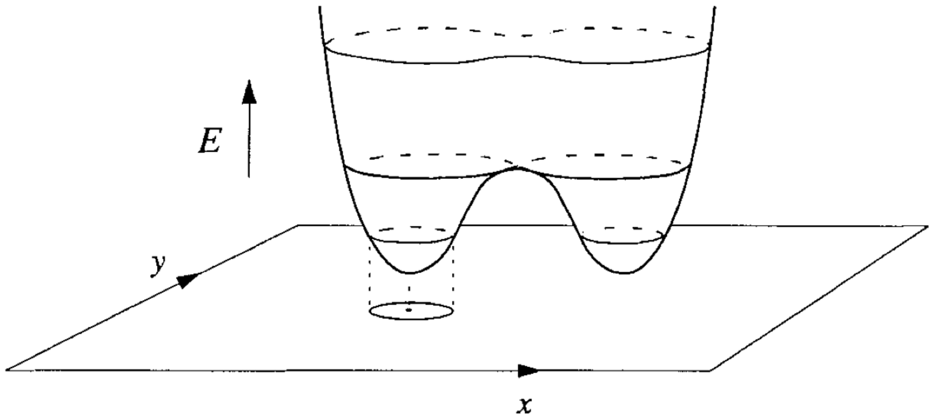
$$\ddot{x} = x - x^3 \qquad m = 1$$

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x - x^3 = F(x)$$

$$F(x) = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x^4\right) = -\frac{d}{dx}V(x)$$

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x^4$$





Teorema: Consideremos un sistema $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ con $\bar{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Si $\bar{f}$ es continua y diferenciable y existe una cantidad conservada $E(x)$, y existe un punto fijo $\bar{x}^*$ aislado, y es mínimo de $E(x)$, entonces alrededor de $\bar{x}^*$ hay trayectorias cerradas.

SISTEMAS REVERSIBLES

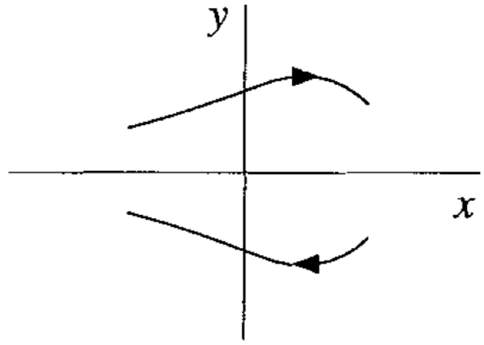
Un sistema es reversible si es simétrico ante la transformación $t \longrightarrow -t$

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = \frac{1}{m} F(x)$$

$$x(t) \longrightarrow x(-t)$$
$$y(t) \longrightarrow y(-t) = -y(t)$$

$$\dot{x}(-t) = y(-t)$$
$$-\dot{y}(-t) = \frac{1}{m} F(x(-t))$$

Si $(x(t), y(t))$ es solución, también lo es $(x(-t), y(-t))$



Para que esto pase

$$\dot{x} = f(x,y)$$

$$\dot{y} = g(x,y)$$

f impar en y : $f(x,-y) = -f(x,y)$

g par en y : $g(x,-y) = f(x,y)$

<u>Teorema</u> : Sea el

$$\dot{x} = f(x,y) \qquad\qquad \text{conservativo}$$
$$\dot{y} = g(x,y)$$

con f y g continuamente diferenciables.
Sea $\bar{x}^*$ un punto fijo centro (autovalores imaginarios puros).
Entonces, suficientemente cerca del origen las órbitas son cerradas.

SISTEMAS GRADIENTE

Si un sistema puede escribirse como

$$\dot{\bar{x}} = -\nabla V(\bar{x})$$

para cierta $V(\bar{x})$ continuamente diferenciable, se denomina SISTEMA GRADIENTE.

Teorema: los sistemas gradientes no tienen órbitas cerradas.

$$\Delta V = \int_0^T \frac{dV}{dt}\,dt = \int_0^T (\nabla \bar{V} . \dot{\bar{x}})\,dt$$

$$\frac{dV}{dt} = \nabla \bar{V} . \frac{d\bar{x}}{dt} = \nabla \bar{V} . \dot{\bar{x}}$$

$$\Delta V = -\int_0^T (\dot{\bar{x}} . \dot{\bar{x}})\,dt$$

$$= -\int_0^T \|\dot{x}\|^2\,dt \quad < 0$$

FUNCIÓN DE LIAPUNOV

Consideramos $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ y $\bar{x}^*$ punto fijo.

Supongamos que podemos encontrar una función univaluada real y continuamente diferenciable tal que

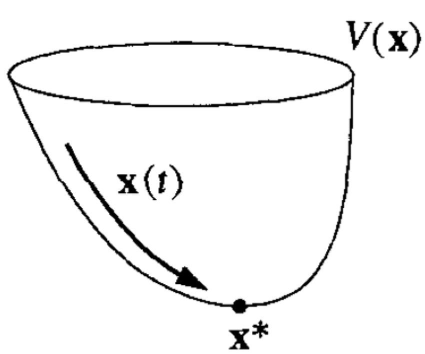
1. $V(\bar{x}) > 0 \quad \forall \, \bar{x} \neq \bar{x}^*$ y $V(\bar{x}^*) = 0$

(definida positiva)

2. $\dot{V} = \dfrac{dV}{dt} < 0 \quad \forall \, \bar{x} \neq \bar{x}^*$

entonces $\bar{x}^*$ es globalmente estable, o sea, para todas las condiciones iniciales

$$\bar{x}(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \bar{x}^*$$



CRITERIO DE DULAC

Si $\bar{f}(\bar{x})$ es continuamente diferenciable real sobre un subconjunto R simplemente conectado en el plano y existe $g(x)$ continuamente diferenciable tal que

$$\nabla \cdot (g\bar{x})$$

tiene el mismo signo en todo R, entonces no existen órbitas cerradas en R.

Teorema Poincaré - Bendixson

Supongamos que

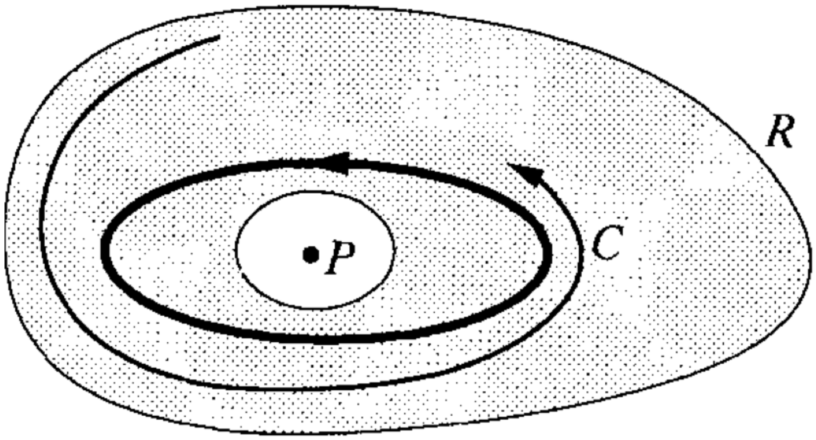
1) R es un subconjunto R cerrado del plano

2) $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ con $\bar{f}$ continuamente diferenciable

3) R no tiene punto fijo

4) $\exists$ una trayectoria cerrada en R

Entonces $\exists$ una órbita cerrada (no hay caos)


R
C
P