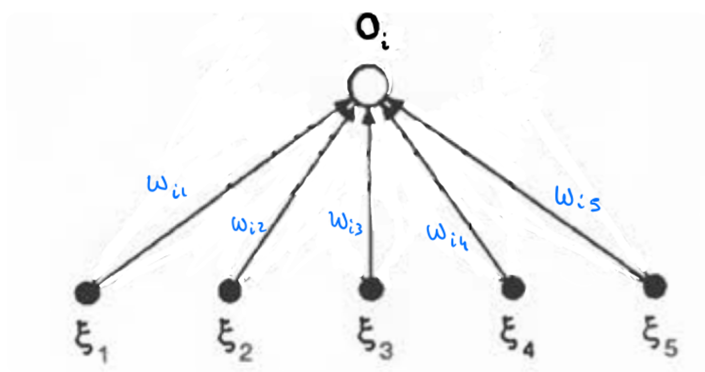
PERCEPTRON SIMPLE: UN CLASIFICADOR



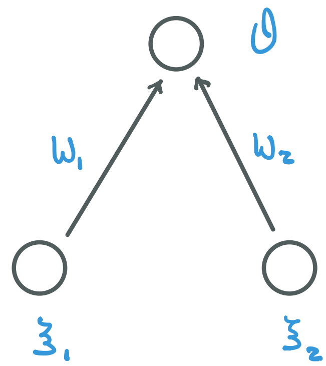
Vamos a analizar la red neuronal más simple posible, en la cual tenemos N entradas

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$$

y la salida es binaria. Entre las entradas está considerada la neurona del umbral (repasar el pizarrón anterior).

Para simplificarlo aún más, asumiremos que tenemos solo 2 entradas.

Esto nos permitirá visualizar el problema.



Le sacamos el índice i pero no olvidemos que los perceptrones se pueden combinar sin que se sobrepongan las sinapsis.

ξ_1 y ξ_2 pueden tomar cualquier valor real

$$\vec{\xi} \in \mathbb{R}^2 \qquad \vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$$

$$\vec{w} \in \mathbb{R}^2 \qquad \vec{w} = (w_1, w_2)$$

Como es un clasificador binario, la salida puede tomar dos valores, que asumiremos $+1$ o -1.

$$\mathcal{O} = \text{signo}\,(h)$$

$$= \text{signo}\left(\sum_{k=1}^{2} w_k\, \xi_k\right)$$

$$\mathcal{O} \in \{-1, +1\}$$

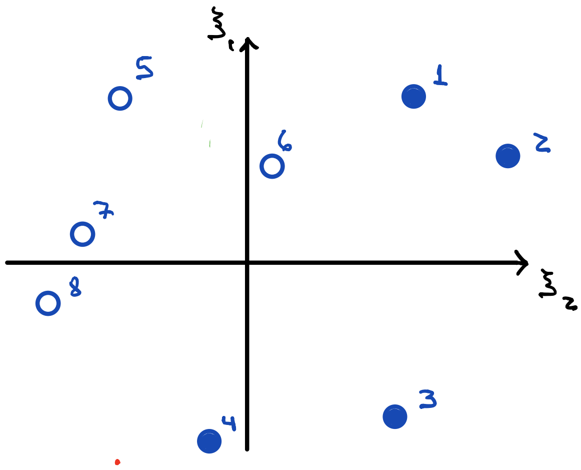
Tenemos relaciones INPUT – OUTPUT conocidas, a las que usamos para entrenar. Voy a suponer que tengo solo 8 (poquísimo para un ejemplo real)

$$\xi^{\mu} \longrightarrow \zeta^{\mu}$$: deseado o correcto

$$\mu = 1, 2, 3, \ldots \; y \; 8$$

$$\zeta^{\mu} = \begin{cases} +1 & \text{si } \xi^{\mu} \text{ pertenece a la categoría A} \\ -1 & \text{si } \xi^{\mu} \text{ pertenece a la categoría B} \end{cases}$$

Voy a representar los puntos en $\mathbb{R}^2$



Cada uno de los 8 puntos representa uno de los 8 elementos del conjunto de entrenamiento, y en este caso 4 pertenecen a la categoría A y los representamos con círculos azules llenos ● ($\mu = 1, 2, 3$ y 4) y cuatro pertenecen a la categoría B y los representamos con círculos azules vacíos ○ ($\mu = 5, 6, 7$ y 8).

Hagamos algunas cuentas simples. Supongamos

$$O^\mu = \zeta^\mu \qquad \text{(lo deseado)}$$

$$\text{signo}\left(\sum_{k=1}^{2} w_k \xi_k^\mu\right) = \zeta^\mu$$

$$\text{signo}\left(\vec{w} \cdot \vec{\xi}^\mu\right) = \zeta^\mu$$

$$\zeta^\mu \, \text{signo}\left(\bar{w}\cdot\bar{\xi}^\mu\right) = \zeta^\mu \zeta^\mu = +1 \quad \text{pues} \quad \zeta^\mu = \pm 1$$

$$\text{signo}\left(\zeta^\mu\right) \text{signo}\left(\bar{w}\cdot\bar{\xi}^\mu\right) = +1$$

$$\text{signo}\left(\left(\bar{w}\cdot\bar{\xi}^\mu\right)\zeta^\mu\right) = 1 \qquad \left(\bar{w}\cdot\bar{\xi}^\mu\right)\zeta^\mu$$

$$\text{signo}\left(\bar{w}\cdot\left(\bar{\xi}^\mu\zeta^\mu\right)\right) = 1 \qquad \bar{w}\cdot\left(\bar{\xi}^\mu\zeta^\mu\right)$$

$$\text{signo}\left(\bar{w}\cdot\bar{X}^\mu\right) = 1$$

$$\boxed{\bar{w}\cdot\bar{X}^\mu > 0}$$

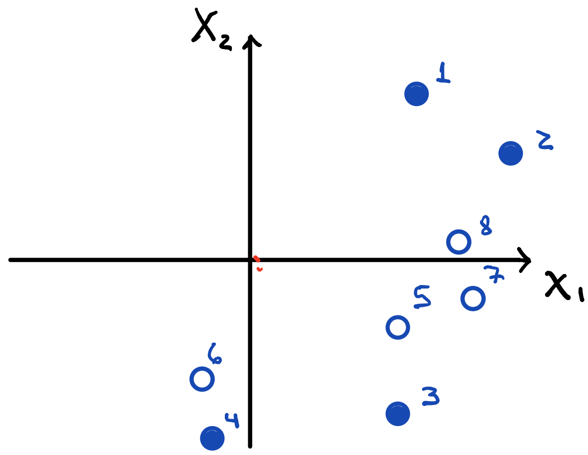
donde

$$\bar{X}^\mu = \bar{\xi}^\mu\zeta^\mu$$

Notemos que:

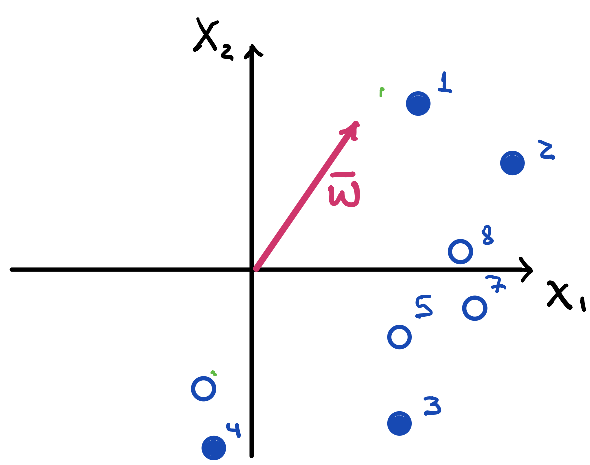
si $\zeta^\mu = +1$ entonces $\bar{X}^\mu = \bar{\xi}^\mu$

si $\zeta^\mu = -1$ entonces $\bar{X}^\mu = -\bar{\xi}^\mu$



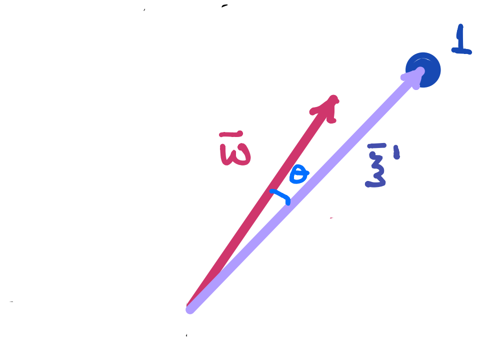
Ustedes saben que $\bar{w} \cdot \bar{x}^{\mu} > 0$ implica que la proyección de $\bar{w}$ sobre CADA UNO de los elementos del conjunto de entrenamiento. O sea, de TODOS LOS EJEMPLOS.

Como vimos, el $\bar{w}$ que buscamos, vive también en $\mathbb{R}^2$.



Aquí dibujé un posible $\vec{w}$, pero hay infinitos $\bar{w}$ posibles. ¿Este $\vec{w}$ resuelve bien los ejemplos del conjunto de entrenamiento?

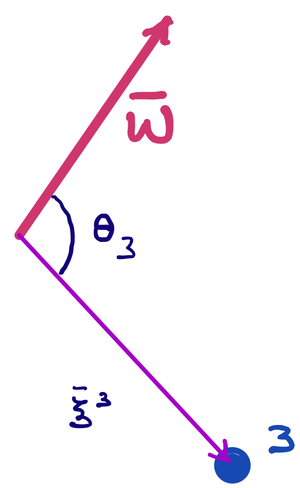
Observen que $\bar{w}\cdot\bar{\xi}^1$ es positivo



$$\bar{w}\cdot\bar{\xi}^1 = \underset{>0}{|\bar{w}|}\,.\,\underset{>0}{|\bar{\xi}^1|}\,.\,\underset{>0}{\cos(\theta)} > 0$$

pues $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (agudo).

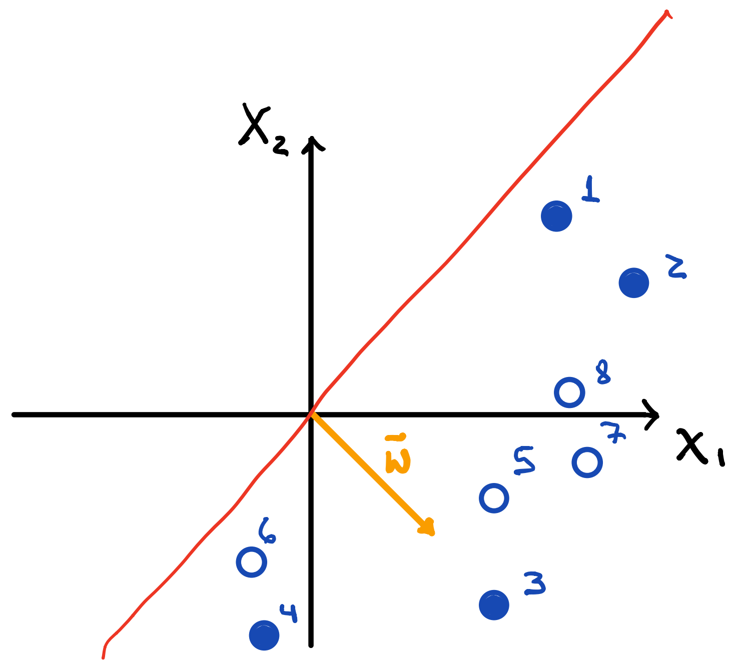
Pero miren que para con $\bar{\xi}^3$, por ejemplo.



$$\bar{w}\cdot\bar{\xi}^3 = \underbrace{|\bar{w}|}_{>0}.\underbrace{|\bar{\xi}^3|}_{>0}\,\underbrace{\cos(\theta_3)}_{<0} < 0$$

pues $\quad \frac{\pi}{2} < \theta_3 < \pi \quad$ (obtuso)

O sea, demos encontrar un $\bar{w}$ que forme un ángulo agudo con los 8 elementos del conjunto de entrenamiento. En este caso existe no un posible $\bar{w}$, sinó INFINITOS.



Este $\bar{w}$ resuelve bien todos ejemplos. O sea, con este $\bar{w}$ APRENDEMOS a resolver el problema de generalización. Resta saber si esto alcanza para resolver bien ejemplos que aún no presentamos.

Que exista uno o muchos $\overline{w}$ requiere que $\exists$ una recta que pasa por el origen que separe $\mathbb{R}^2$ en dos semiplanos, uno que contenga todos los ejemplos, y otro que no tenga ningún ejemplo.

Si existe una o infinitas rectas que hacen esta deseada separación, diremos que el problema es:

LINEALMENTE SEPARABLE

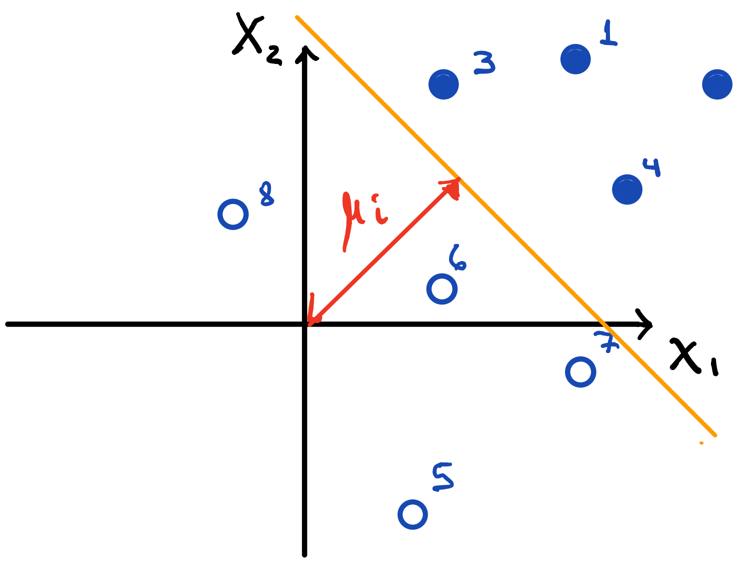
En el caso más general, separabilidad lineal significa que en $\mathbb{R}^N$ debe existir un hiperplano $\mathbb{R}^{N-1}$ que deje de un lado los vectores de entrenamiento.

¿Qué sucede si incluimos el umbral de la neurona de salida O?

$$O = \text{signo}\left(\sum_{k=1} w_k \xi_k - w_0\right)$$

$$O = \text{signo}\left(\vec{w} \cdot \vec{\xi} - w_0\right)$$

Ahora tenemos que el hiperplano $N-1$ dimensional debe pasar a una distancia w_0 del origen.

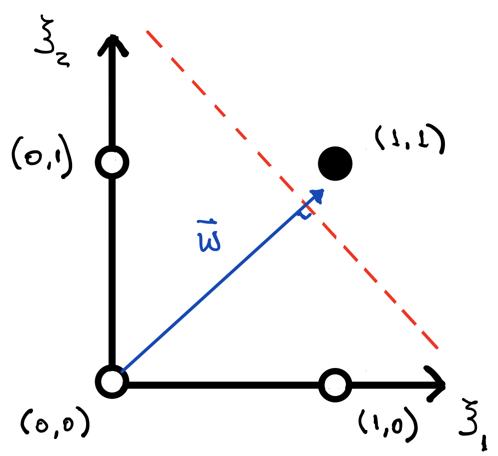


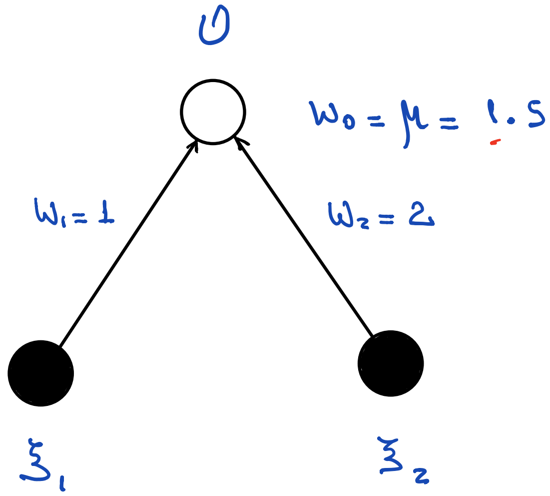
Miremos la función de lógica booleana AND (Y)

ξ_1	ξ_2	ζ
0	0	-1
0	1	-1
1	0	-1
1	1	1

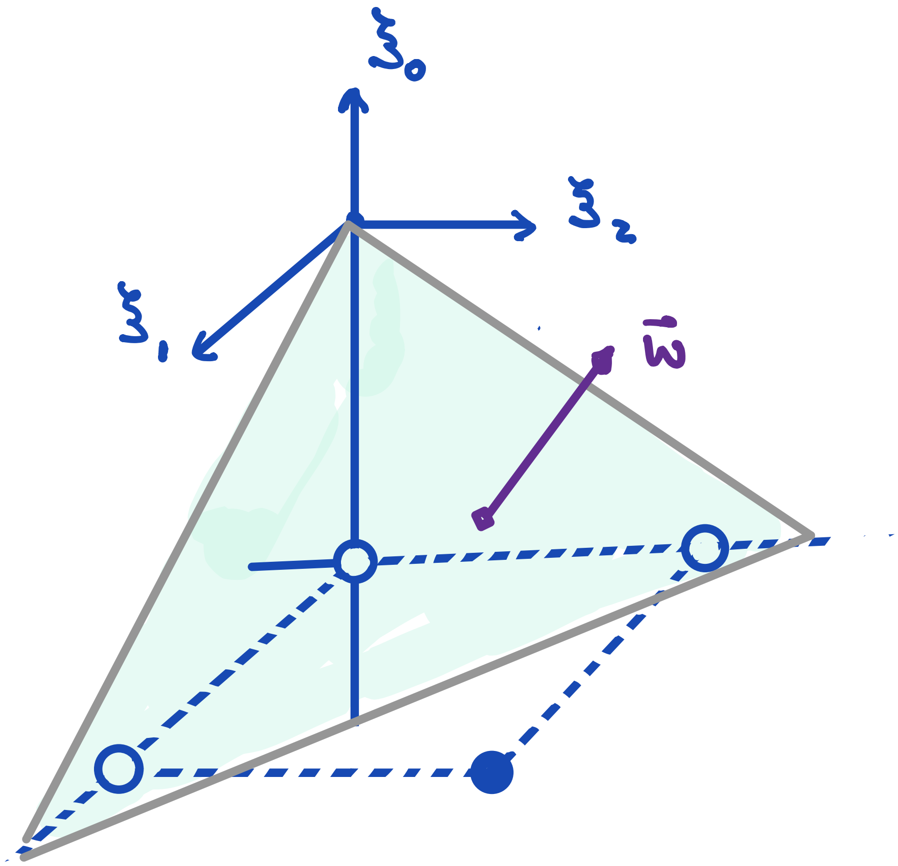
-1 F

+1 V



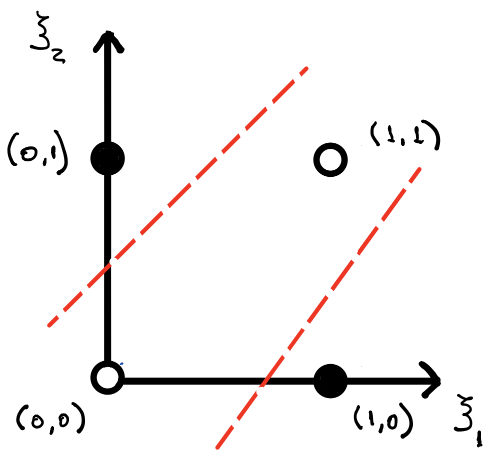


$$O = \text{signo}\left(\xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 - w_0\right)$$



Miremos ahora la función XOR

ξ_1	ξ_2	ζ
0	0	-1
0	1	+1
1	0	+1
1	1	-1



¡XOR NO ES LINEALMENTE SEPARABLE!

Minsky & Papert (1969) "Perceptrones"