

SISTEMAS DINÁMICOS EN 3D

Supongamos que tenemos un sistema de 3 EDO acopladas:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, z) \\ \dot{y} &= g(x, y, z) \\ \dot{z} &= h(x, y, z) \end{aligned} \right\}$$

La lógica es la de siempre: buscamos los puntos fijos (x^*, y^*, z^*) tal que

$$0 = f(x^*, y^*, z^*)$$

$$0 = g(x^*, y^*, z^*)$$

$$0 = h(x^*, y^*, z^*)$$

linealizados, ahora usando el desarrollo de Taylor de funciones de 3 variables y obtenemos un sistema de EDO ordinarias

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f(\bar{x}) \\ g(\bar{x}) \\ h(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}^*} & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\bar{x}^*} & \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\bar{x}^*} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}^*} & \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{\bar{x}^*} & \left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{\bar{x}^*} \\ \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\bar{x}^*} & \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{\bar{x}^*} & \left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_{\bar{x}^*} \end{vmatrix}$$

Calculando los autovalores de A y sus respectivos autovectores, podemos analizar la estabilidad.

Para tener un sistema estable los parte reales de los 3 autovalores deben ser negativos.

Podemos tener 3 autovalores reales negativos (en nodo estable) o 1 autovalor real negativo y 2 autovalores complejos conjugados con parte real negativa.

Todo lo visto en 2D sigue valiendo, aunque aparece un nuevo tipo de atractor, llamado **ATRACTOR EXTRAÑO**.

UN EJEMPLO : EL ATRACTOR DE LORENZ

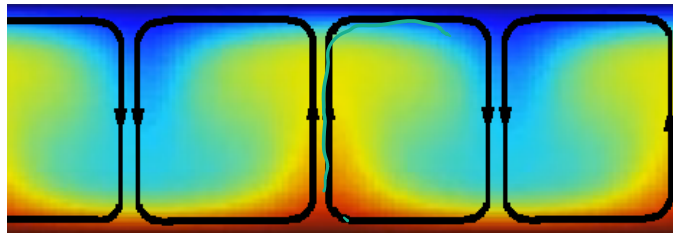
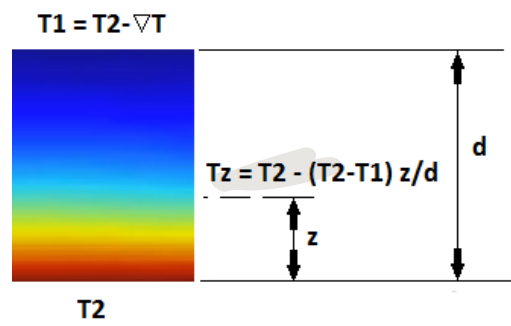
Edward Lorenz (1917-2008)

Meteorólogo y Matemático

1948 Doctorado en Matemática MIT

EDO para predicción de tormentas

Crea un modelo simplificado para convección atmosférica



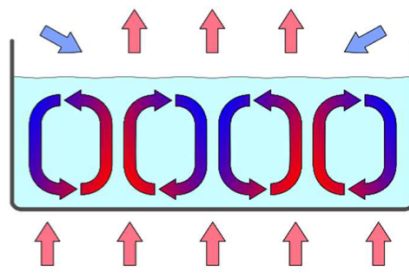
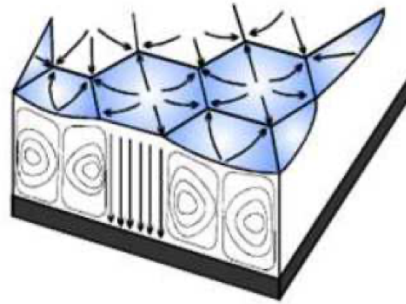
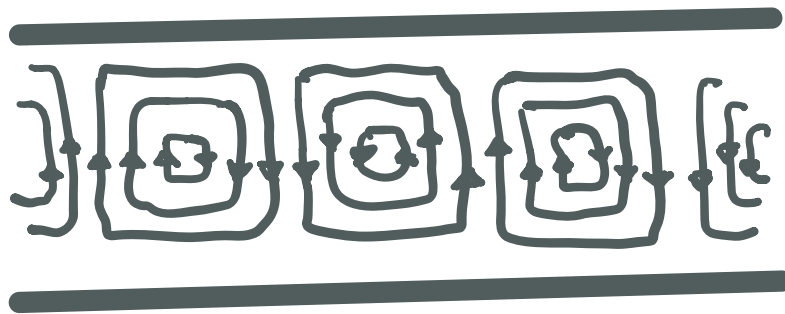


Fig.11.A





Atmósfera : 10.000 km aproximadamente
 el 75% de la masa ocupa solo 11 km

nitrógeno	78%
oxígeno	21%
argón	0.9%
dióxido de carbono	0.03%

0 - 11 km 11 - 50 km 50 - 80 km 80 - 500 km 500 - 10.000 km
 Troposfera — Estratosfera — Mesosfera — Ionosfera — Exosfera



clima

$$\dot{X} = \sigma(y - z)$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

σ : número de Prandtl.

ρ : número de Rayleigh.

β : razón entre largo y alto.

$X(t)$: velocidad y sentido de circulación del fluido

$x > 0$ movimiento horario

$x < 0$ movimiento anti-horario

$y(t)$: variación de temperatura vertical

$z(t)$: desviación del gradiente vertical de la variación lineal.

$$\sigma = 10, \quad \rho = 28, \quad \beta = \frac{8}{3}$$

NO LINEALIDAD

$$\dot{x} = \sigma(y - z)$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

SIMETRÍA

Si cambiamos

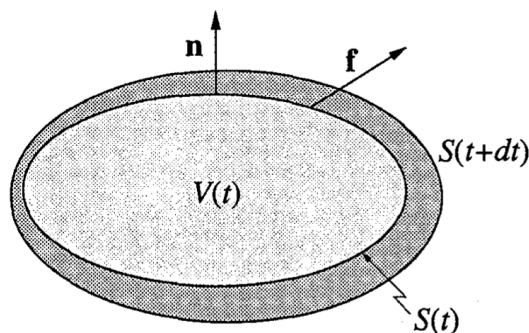
$$\begin{aligned} x &\rightarrow -x \\ y &\rightarrow -y \\ z &\rightarrow z \end{aligned}$$

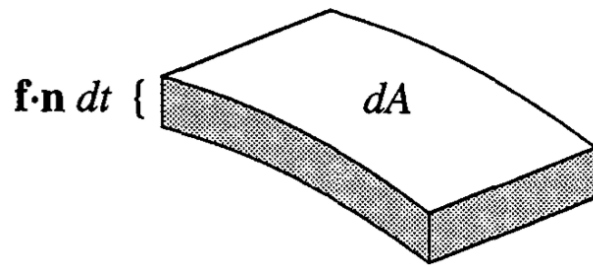
mantenemos las ecuaciones.

Si $(x(t), y(t), z(t))$ es solución, el vector $(-x(t), -y(t), z(t))$ también es solución.

CONTRACCIÓN DE VOLUMEN

El sistema es **difusivo**





$$V(t+dt) = V(t) + \Delta V$$

$$V(t+dt) = V(t) + \int_s (\bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dt) dA$$

$$V(t+dt) - V(t) = dt \int_s \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dA$$

$$\frac{V(t+dt) - V(t)}{dt} = \int_s (\bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) dA$$

$$\dot{V} = \int_v \nabla \cdot \bar{\mathbf{f}} dV$$

Aquí usamos el Teorema de Gauss o de la Divergencia

$$\int_s \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dA = \int_v \nabla \cdot \bar{\mathbf{F}} dV$$

$\bar{\mathbf{F}}$: compo vectorial

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

Pose Lorenz

$$\nabla \bar{f} = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma(y-x)) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho x - y - xz) + \frac{\partial}{\partial z} (xy - \beta z)$$

$$= -\sigma - 1 - \beta$$

$$= -(\sigma + 1 + \beta) < 0$$

① see:

$$\dot{V}(t) = \int_V \nabla \cdot \bar{f} \, dV = \int_V -(\sigma + 1 + \beta) \, dV = -(\sigma + 1 + \beta) \int_V dV$$

$$= -(\sigma + 1 + \beta) V(t) < 0$$

LINEALIZACIÓN

Si se lineariza

$$A = \begin{vmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ (\beta-z) & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{vmatrix}$$

PUNTOS FIJOS

Notemos que $\bar{X}^* = (0, 0, 0)$ es punto fijo siempre.

$$A_{(0,0,0)} = \begin{vmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \beta & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I)_{(0,0,0)} = \begin{vmatrix} (-\sigma-\lambda) & \sigma & 0 \\ \beta & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\lambda_1 = -\beta$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(1+\sigma) \pm \sqrt{(1+\sigma)^2 - 4\sigma(1-\beta)}}{2}$$

En el origen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ \beta & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{traza} \quad \Sigma = -\sigma - 1$$

$$\Delta = \sigma(1-\beta)$$

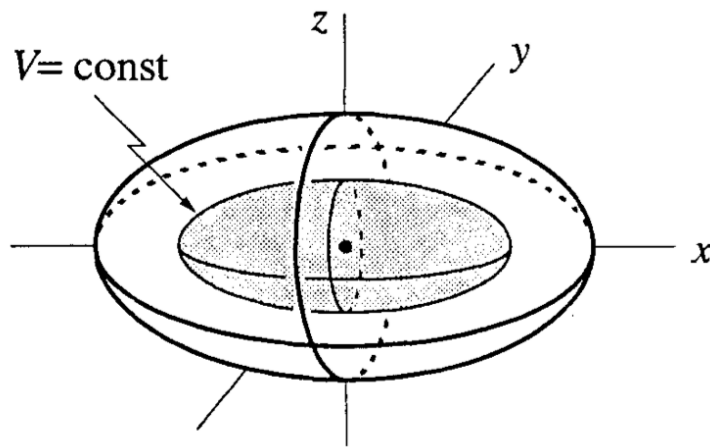
Si $\beta < 1$ el origen es un nodo estable

Si $\beta > 1$ el origen se vuelve inestable

Cuando $\beta = 1$ surgen nuevos puntos fijos

Podemos definir una función de Liapunov

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma} x^2 + y^2 + z^2$$



$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \dot{V} &= \frac{1}{\sigma} x \dot{x} + y \dot{y} + z \dot{z} \\
 &= (yx - x^2) + (\beta yx - y^2 - xyz) + (zxy - \beta z^2) \\
 &= (\beta + 1)xy - x^2 - y^2 - \beta z^2 \\
 &= -\left(x - \frac{(\beta + 1)}{2}y\right)^2 - \left(1 - \frac{(\beta + 1)}{2}\right)y^2 - \beta z^2 \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

la solución $\bar{x}^* = (0, 0, 0)$ es globalmente estable si $\beta < 1$

Las soluciones C^+ y C^-

En $\beta=1$ el origen se torna estable y surgen los nuevos puntos fijos

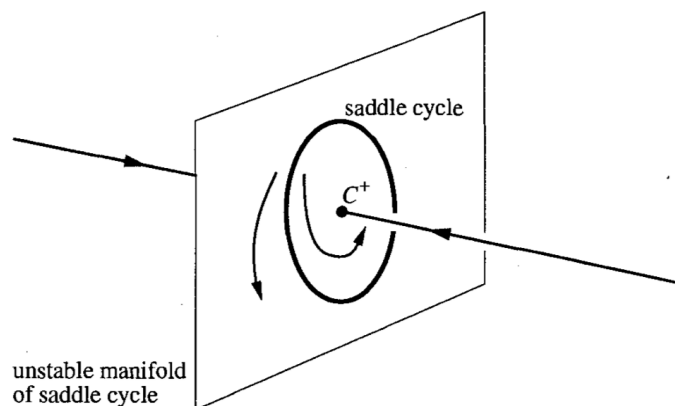
$$C^+ : x^* = y^* = \sqrt{b(\beta-1)} \quad z^* = \beta-1$$

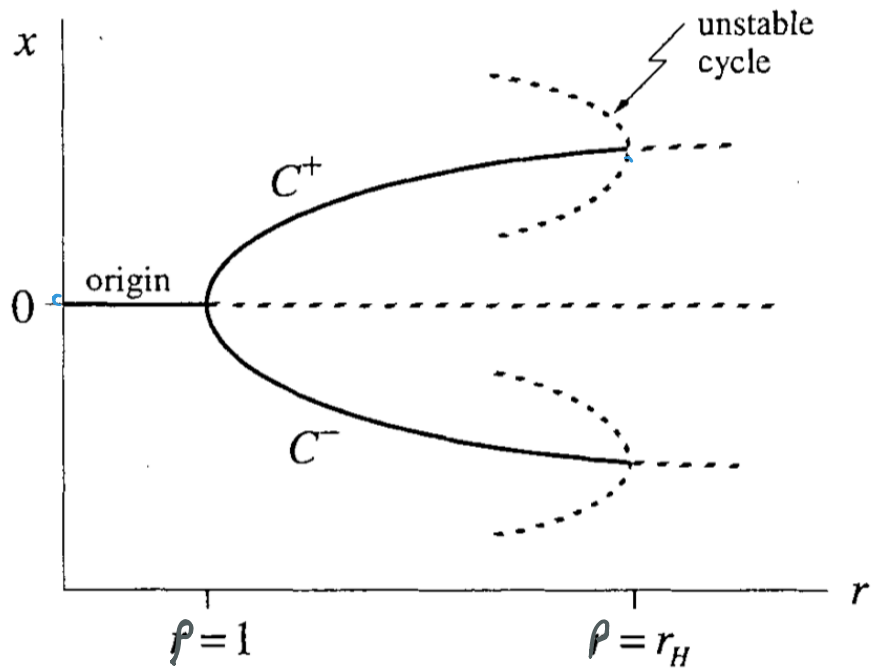
$$C^- : x^* = y^* = -\sqrt{b(\beta-1)} \quad z^* = \beta-1$$

Estas soluciones, se puede ver, son estables en tanto

$$1 < \beta < \beta_H = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1}$$

cumpliendo $\sigma - \beta - 1 > 0$. En $\beta = \beta_H$ el sistema sufre una bifurcación de Hopf subcrítica.

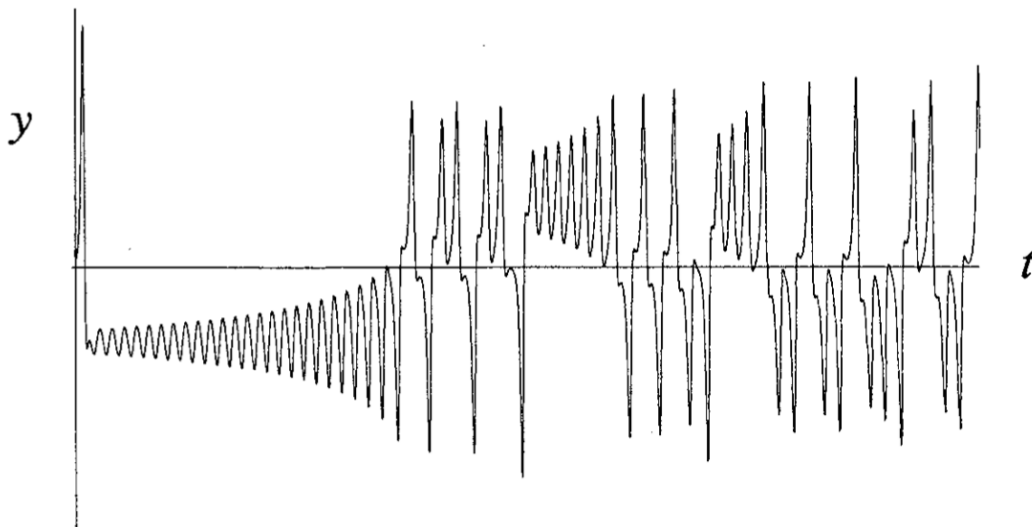




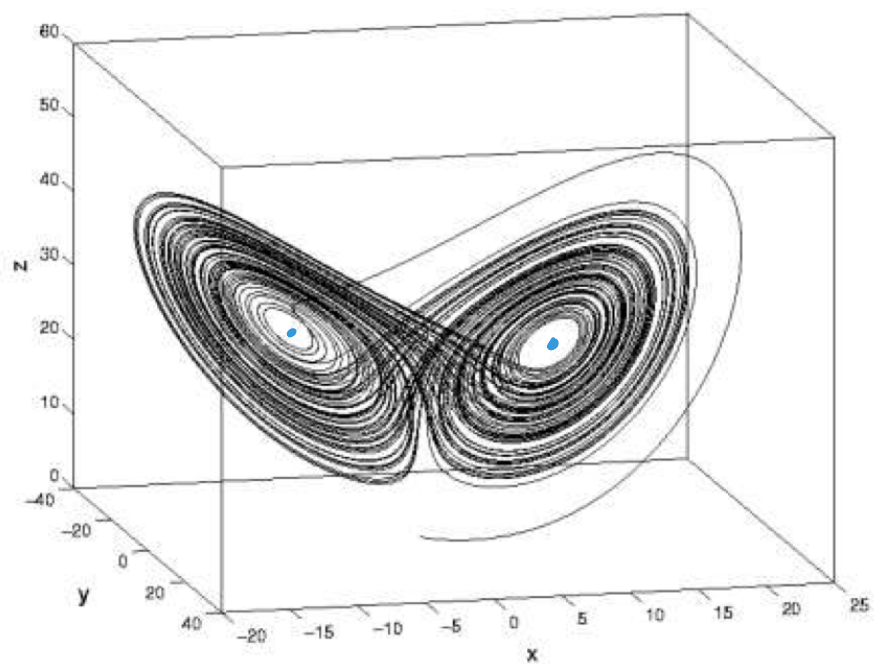
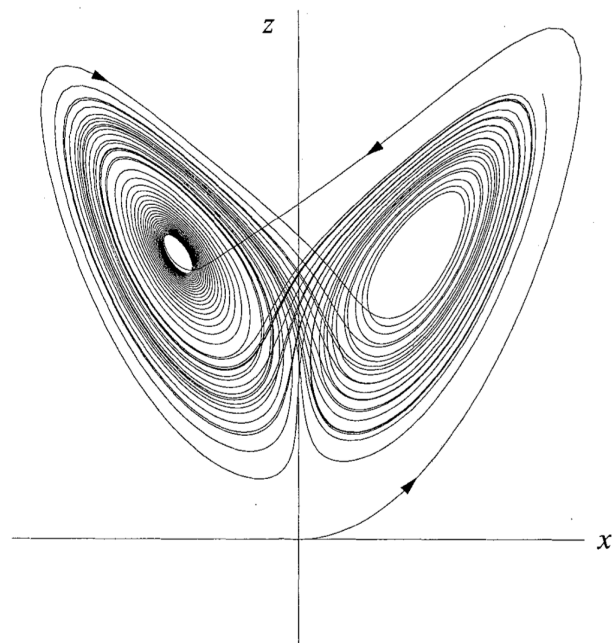
Para $\sigma = 10$, $\beta = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$

$$r_H = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{(\sigma - \beta - 1)} \approx 24.74$$

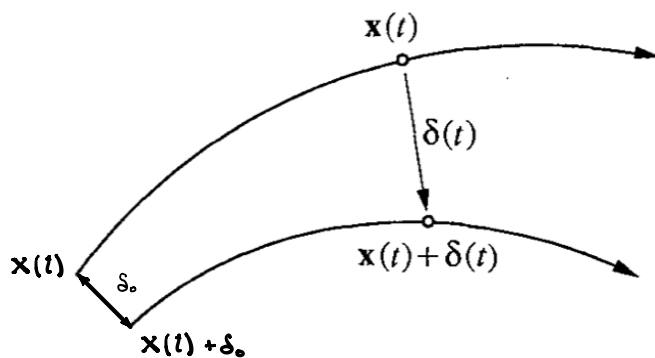
Si $\bar{x}(0) = (0, 1, 0)$



TRAYECTORIA APERIÓICA ACOTADA



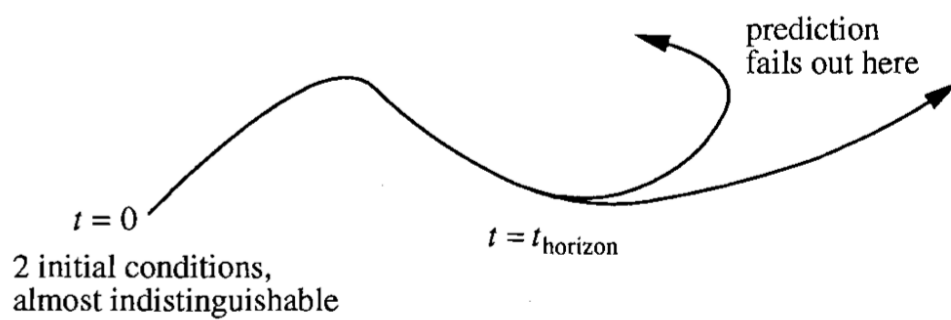
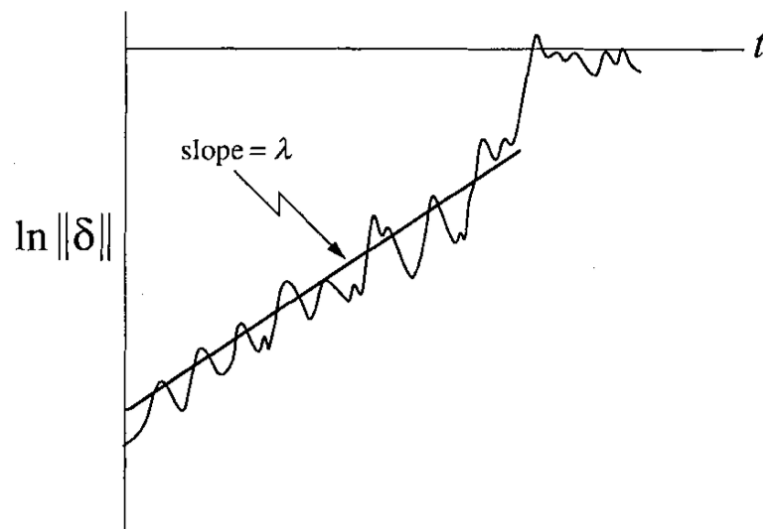
SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES



$$\|\delta_0\| = 10^{-15} \quad \text{típicamente}$$

$$\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\| e^{\lambda t} \quad \lambda > 0$$

λ : exponente de Liapunov



$$t_{\text{horizon}} \sim O\left(\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{a}{4\delta_{\text{oll}}}\right)\right)$$

- La divergencia exponencial es temporaria, pues a largo plazo $\dot{V}(t) < 0$
- Hay 3 exponentes de Lyapunov. En general para sistemas de dimensión N hay N exponentes
- Si tenemos una esfera pequeña de condiciones iniciales, esta se deformará en un elipsoide

¿Qué es CAOS?

CAOS es un comportamiento para tiempos largos APERIÓDICO en un sistema dinámico DETERMINISTA con SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES.

¿Qué es un atractor?

Es un conjunto al cual todas las trayectorias cercanas convergen. Además:

1. A es invariante: cualquier trayectoria $\bar{x}(t)$ que comience en A permanece por siempre en A .
2. A atrae un conjunto abierto de condiciones iniciales: existe un conjunto abierto U que contiene a A tal que si $\bar{x}(0) \in U$, la distancia desde $\bar{x}(t)$ hasta A tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$.
 U es la cuenca de atracción.
3. A es mínimo (no hay ningún subconjunto de A que cumpla las condiciones 1 y 2).

Un **ATRACTOR EXTRAÑO** es un atractor que exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales.

Originalmente se pedía que el atractor sea fractal.
Hoy se considera menos importante.

NOTA: si

$$y = y_0 e^{\lambda t}$$

$$\ln(y) = \ln(y_0 e^{\lambda t})$$

$$\ln(y) = \ln(y_0) + \ln(e^{\lambda t})$$

$$\ln(y) = \ln(y_0) + \lambda t$$

Si graficamos $\ln(y)$ vs t tenemos una recta.

FRACTALES



Romanesco

¿Qué es un fractal?

« Objeto suficientemente irregular como para no poder describirse en términos euclidianos.

Presenta estructura compleja y autosimilitud a toda escala, de una forma u otra.

Por último, su dimensión de Hausdorff-Bezicovich es estrictamente mayor que su dimensión topológica.»

