Breve curso de álgebra lineal

Patricia Kisbye

Índice

1. Sistemas de ecuaciones lineales **1**

2. Matrices **4**
2.1. Matrices y sistemas de ecuaciones 9

3. Espacios Vectoriales **11**
3.1. Interpretación geométrica 12
3.2. Conjuntos linealmente independientes y bases 16
3.3. Coordenadas y cambio de base 19

4. Transformaciones lineales **21**
4.1. Autovectores y autovalores 25
4.2. Diagonalización de matrices 28

1. Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales en n incógnitas es un conjunto de ecuaciones lineales que involucran n incógnitas y del cual se pretende encontrar una solución común a todas. Los siguientes son ejemplos de ecuaciones en 3 y en 4 incógnitas, respectivamente:

$$\text{a)}\ \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 5 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 7y = 4 \end{cases} \qquad\qquad \text{b)}\ \begin{cases} 3x + 7y + 9z - w = 0 \\ 8x - 2y + 3 = w + z \end{cases}$$

El sistema a) es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas x, y y z, mientras que el sistema b) es un sistema de dos ecuaciones en cuatro incógnitas x, y, z, w. Notemos que no necesariamente una incógnita debe aparecer en todas las ecuaciones.

En cualquier sistema, podemos reordenar las ecuaciones de modo que las incógnitas aparezcan en el miembro izquierdo de la igualdad y los términos constantes a la derecha. Así cualquier sistema de m ecuaciones y n incógnitas x_1, x_2, ..., x_n, se escribe de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n & = b_3 \\ \qquad\vdots & = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Una n-upla de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ es una solución del sistema (1) si es solución de cada una de las ecuaciones del sistema.

Ejemplo 1.1. En el siguiente sistema,

$$\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ -x + y + 3z = 5 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$$

la terna $(2, 1, 1)$ resuelve la primera y tercera ecuación del sistema, pero no la segunda. Luego no es solución del sistema. En cambio $(-2.5, 1.2, 0.9)$ sí es solución, dado que

$$\begin{cases} \mathbf{-2.5} + 3 \cdot \mathbf{1.2} - \mathbf{0.9} = 4 \\ -(\mathbf{-2.5}) + \mathbf{1.2} + 3 \cdot \mathbf{0.9} = 5 \\ 2 \cdot (\mathbf{-2.5}) + 5 \cdot \mathbf{1.2} = 9 \end{cases}$$

Un sistema se dice **homogéneo** si las constantes b_1, b_2, ..., b_m en (1) son todas iguales a 0. Es decir, el sistema es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n & = 0 \\ \qquad\vdots & = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

Un sistema que no es homogéneo se dice **sistema no homogéneo**. Notemos que en cualquier sistema homogéneo los valores $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ constituyen una solución del sistema: $(0, 0, \ldots, 0)$. Esta solución se llama **solución trivial**. Por lo tanto cualquier sistema homogéneo tiene al menos una solución.

En cambio, un sistema no homogéneo puede no tener soluciones.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{cases}$$

Cualquier solución de la primera ecuación no puede satisfacer la segunda ni viceversa, por lo cual no hay solución posible.

Por otra parte, si un sistema homogéneo posee una solución no trivial, entonces cualquier múltiplo de ella también es solución.

Ejemplo 1.2. El sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

tiene la solución trivial y también $(0, 1, -1)$. Por lo tanto todos los múltiplos de $(0, 1, -1)$ también son soluciones:

$$(0, 2, -2), \quad (0, 3, -3), \qquad (0, -5, 5),$$

y cualquier terna de la forma $(0, a, -a)$, con a un número real.

> Un sistema homogéneo posee siempre una solución: la solución trivial. Si existe más de una solución, entonces tiene infinitas soluciones.

En el caso de un sistema no homogéneo, ya hemos visto que puede no tener soluciones. Ahora bien, si tiene al menos una solución y el correspondiente sistema homogéneo posee una solución no trivial, entonces el no homogéneo tiene infinitas soluciones. Veamos esto en un ejemplo.

Ejemplo 1.3. Consideremos el siguiente sistema no homogéneo y su correspondiente homogéneo:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

El sistema no homogéneo tiene la solución **particular** $(1, 0, 2)$. Por otra parte, el sistema homogéneo tiene por solución no trivial al $(1, 0, -1)$, y por lo tanto tiene además todas las soluciones de la forma $(a, 0, -a)$. La suma de la solución particular y una solución del sistema homogéneo es siempre una solución del sistema no homogéneo. Así, cualquier terna que resulte de la suma

$$(1, 0, 2) + (a, 0, -a) = (1 + a, 0, 2 - a), \qquad a \text{ un número real}$$

será una solución del sistema no homogéneo. Por ejemplo, tomando $a = 5$ y $a = 3$ tenemos las soluciones: $(6, 0, -3)$ y $(4, 0, -1)$. En efecto:

$$\begin{cases} 6 + 0 + (-3) = 3 \\ 6 - 0 + (-3) = 3 \\ 2 \cdot 6 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 + 0 + (-1) = 3 \\ 4 - 0 + (-1) = 3 \\ 2 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 6. \end{cases}$$

- Un sistema no homogéneo puede no tener solución, tener única solución o infinitas soluciones.
- Si un sistema no homogéneo tiene más de una solución entonces el correspondiente sistema homogéneo tiene infinitas soluciones.
- Cualquier solución del sistema no homogéneo es la suma de una solución particular y una solución del sistema homogéneo.

2. Matrices

Un sistema de ecuaciones como (1), puede representarse en forma **matricial** de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

que en forma sintética podemos escribir:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Las filas de la matriz A contienen los coeficientes de las incógnitas en cada una de las ecuaciones, $\mathbf{x}$ es el vector de las incógnitas y $\mathbf{b}$ es el vector de los términos constantes.

Ejemplo 2.1. El sistema

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 6 \end{cases}$$

se escribe en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Las propiedades de la matriz de coeficientes da información sobre la existencia de soluciones y cómo obtenerlas. Por ello dedicamos esta sección al concepto de matrices.

Una **matriz** $m \times n$ es un arreglo de $m \times n$ números, ordenados en m filas y n columnas. Si A es una matriz, denotaremos a_{ij} al elemento matricial de la i-ésima fila y j-ésima columna, y usaremos la notación $A = (a_{ij})$.

La **suma** de dos matrices A y B es la matriz cuyos elementos matriciales se obtienen sumando componente a componente.

Ejemplo 2.2. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+5 & -3+4 \\ 1-1 & 0+1 \\ 3+2 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz **nula** es la matriz cuyos elementos son todos iguales a 0. La suma de matrices es conmutativa, asociativa, y la matriz nula es el elemento neutro para la suma. Si $A = (a_{ij})$, entonces denotaremos con $-A$ a la matriz cuyos elementos son los opuestos de los elementos de A:

$$-A = (-a_{ij}).$$

La matriz **transpuesta** de una matriz A $m \times n$ es la matriz B $n \times m$, cuya i-ésima fila es la i-ésima columna de A. La denotamos A^T.

Ejemplo 2.3. Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, entonces

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La **multiplicación** de dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ está definida si el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Así, si A es una matriz $m \times k$ y B es $k \times n$, entonces $C = A \cdot B$ es una matriz $C = (c_{ij})$ de orden $m \times n$ donde c_{ij} se obtiene sumando los productos de los elementos de la fila i de A por los correspondientes elementos de la columna j de B.

Ejemplo 2.4. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 + (-3)\cdot(-1) & 2\cdot 4 + (-3)\cdot 1 & 2\cdot 2 + (-3)\cdot 2 \\ 1\cdot 5 + 0\cdot(-1) & 1\cdot 4 + 0\cdot 1 & 1\cdot 2 + 0\cdot 2 \\ 2\cdot 5 + 5\cdot(-1) & 2\cdot 4 + 5\cdot 1 & 2\cdot 2 + 5\cdot 2 \\ (-1)\cdot 5 + 3\cdot(-1) & (-1)\cdot 4 + 3\cdot 1 & (-1)\cdot 2 + 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 5 & 13 & 14 \\ -8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente, se define como la suma de los productos matriciales de cada columna de A por cada fila de B:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \\ 10 & 8 & 4 \\ -5 & -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 10 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 5 & 13 & 14 \\ -8 & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que el producto $B \cdot A$ no es posible, ya que el número de columnas de B es 3 y el número de filas de A es 4.

Una matriz **cuadrada** $n \times n$ es una matriz con el mismo número de filas que columnas. En el conjunto de matrices cuadradas $n \times n$ la multiplicación es posible entre cualquier par de matrices.

Ejemplo 2.5. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & -15 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Notemos que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

El producto de matrices no es conmutativo, pero sí asociativo. Para cada n, se define la matriz **identidad** $I_n = (d_{ij})$, tal que $d_{ii} = 1$ para todo i, y $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Esto es:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Para cualquier matriz A $n \times n$ se cumple que

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Así, I_n es el elemento neutro para la multiplicación de matrices, y es el análogo al número 1 en los números reales.

Ahora bien, el análogo al inverso de un número real no siempre existe en el conjunto de las matrices. Es decir, dada una matriz A no siempre es posible encontrar una matriz B tal que $A \cdot B = I_n$.

Ejemplo 2.6. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. Si existe una matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = I_2$, debería cumplirse que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2a + 3c & 2b + 3d \\ 4a + 6c & 4b + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto no es posible, ya que si $2a + 3c = 1$ entonces $4a + 6c = 2$, por lo cual la matriz B no existe.

Ejemplo 2.7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 9 & -2 & 9 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego B es la inversa de A y escribimos $B = A^{-1}$.

Dada una matriz A $n \times n$, se dice que A es **inversible** si existe una matriz B tal que $A \cdot B = I_n$. En tal caso también se cumple que $B \cdot A = I_n$.
B se llama **matriz inversa** de A y se denota por A^{-1}.

Una matriz A $n \times n$ se dice **ortogonal** si $A \cdot A^T = I_n$. Esto es, si su inversa es igual a su traspuesta.

Ejemplo 2.8. La matriz $U = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$ es ortogonal, ya que

$$U \cdot U^T = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para cada matriz A se define un número llamado **determinante** de la matriz, y lo denotamos $|A|$. Para una matriz 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, el determinante está dado por:

$$|A| = a \cdot d - b \cdot c.$$

Para una matriz 3×3:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Notar que la suma es alternada. Para matrices de orden mayor, el cálculo se realiza de manera análoga.

Una matriz A es inversible si y sólo si su determinante es distinto de 0.

Para matrices $n \times n$ se cumplen las siguientes propiedades del determinante:

Si A y B son matrices $n \times n$, y c es un número real, entonces

- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.
- $|cA| = c^n\,|A|$.
- $|A| = |A^T|$.
- Si A es inversible, entonces $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.
- $|I_n| = 1$.

La **traza** de una matriz A $n \times n$ se define como la suma de los elementos de su diagonal:

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

2.1. Matrices y sistemas de ecuaciones

Recordemos que un sistema de n ecuaciones con n incógnitas puede escribirse en forma matricial como

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Los vectores de incógnitas $\mathbf{x}$ y de términos constantes $\mathbf{b}$ pueden pensarse como matrices $n \times 1$.

Si A es una matriz inversible, entonces pueden resolverse todas las ecuaciones multiplicando ambos miembros por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot \mathbf{x}) = A^{-1} \cdot \mathbf{b},$$

y así

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}.$$

En este caso, el sistema de ecuaciones tiene solución, y es única.

Si el determinante de A es 0, es decir que A no es inversible, entonces el sistema puede o no tener solución. Si tiene solución, entonces hay infinitas.

Ejemplo 2.9. El sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = -3 \\ -x + 5y - z = 10 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

se escribe matricialmente de la forma $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ como

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{5}{6} & -\frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

y la solución para x, y y z está dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{5}{6} & -\frac{13}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$ es la solución del sistema.

Ejemplo 2.10. Para el sistema de ecuaciones, similar al del Ejemplo 2.9 pero con distintos términos constantes:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 2 \\ -x + 5y - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

la solución para x, y y z se obtiene de manera análoga:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{5}{6} & -\frac{13}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Es decir, $x = 7$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{9}{2}$.

Ejemplo 2.11. En el caso de los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ -x + 5y - z = 0 \\ -x + 13y - 2z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ -x + 5y - z = 3 \\ -x + 13y - 2z = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ -x + 5y - z = 1 \\ -x + 13y - 2z = 1 \end{cases}$

en todos los casos la matriz A asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 13 & -2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es

$$|A| = 2 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-8) = 0,$$

por lo que A no es inversible.

En este caso, podemos decir que el sistema a) tiene infinitas soluciones, ya que es un sistema homogéneo que no tiene solución única. Estas soluciones son de la forma:

$$(-3y, y, 8y), \qquad y \text{ un número real.}$$

Para el caso b), $x = y = z = 1$ es una solución, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones, y son todas de la forma

$$(1, 1, 1) + (-3y, y, 8y) = (1 - 3y, 1 + y, 1 + 8y), \qquad y \text{ un número real.}$$

Por último, el sistema c) es un sistema incompatible, es decir, no tiene soluciones.

El Ejemplo 2.11 ilustra que en los casos en que A no es inversible, el sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede tener infinitas soluciones o no tener soluciones.

3. Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto no vacío V con una operación de suma, $+$, sobre el cual está definida una multiplicación por números reales, cuyos elementos son llamados **vectores**, y que satisface las siguientes propiedades:

1. La suma es conmutativa.
2. La suma es asociativa.
3. Existe un elemento neutro $\mathbf{0} \in V$ neutro para la suma:
$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}, \qquad \text{para todo } \mathbf{v} \in V.$$
4. Cada elemento $\mathbf{v} \in V$ tiene un opuesto $-\mathbf{v}$, tal que:
$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$
5. Para todo a, $b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$ se verifica:
   - $a\,(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$,
   - $(a \cdot b)\mathbf{v} = a\,(b\mathbf{v})$,
   - $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$.
   - $0\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
   - $1\,\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Se llama **vector** de dimensión n a una n-upla de números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (que se llaman componentes del vector) y se denota por $\mathbf{x}$. El conjunto de todos los vectores de dimensión n se representa como $\mathbb{R}^n$, y es un espacio vectorial. En particular si

- si $n = 2$, se tiene $\mathbb{R}^2$, que representa el **plano**.
- si $n = 3$, se tiene $\mathbb{R}^3$, que representa el **espacio**.

En este caso, la operación de suma y producto por escalar está definida componente a componente. El vector $\mathbf{0}$ tiene todas sus componentes iguales a cero. Esto es, si $\mathbf{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{w} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, y c es un número real, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} + \mathbf{w} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \\
c \cdot \mathbf{v} &= (c\,a_1, c\,a_2, \ldots, c\,a_n) \\
\mathbf{0} &= (0, 0, \ldots, 0) \\
-\mathbf{v} &= (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)
\end{aligned}$$

El vector nulo tiene todas sus componentes cero: $(0, 0, \dots, 0)$ y el opuesto tiene sus componentes con signos opuestos al vector original.

Ejemplo 3.1. Dados los vectores $\mathbf{v} = (3, -1)$ y $\mathbf{w} = (4, 5)$ en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, y el número real -2, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (3, -1) + (4, 5) = (7, 4) \\ c\mathbf{v} &= (-2) \cdot (3, -1) = (-6, 2) \\ \mathbf{0} &= (0, 0) \\ -\mathbf{v} &= (-3, 1) \end{aligned}$$

3.1. Interpretación geométrica

Usando coordenadas, es posible representar $\mathbb{R}^1$ como una recta, $\mathbb{R}^2$ como un plano y $\mathbb{R}^3$ como un espacio 3-dimensional.

Para representar $\mathbb{R}^1$ (la recta real $\mathbb{R}$), se requiere especificar un punto de ella, llamado **origen**, una unidad de distancia y un sentido en la recta (positivo, y a su opuesto negativo). Entonces a un número positivo x le corresponde el punto en la recta que está a una distancia $|x|$ del origen en el sentido positivo (a la derecha del origen). Al número cero le corresponde el origen y los negativos están a la izquierda del origen. Esta recta se representa en la posición horizontal. Ver Figura 1.

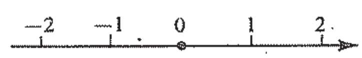

Figura 1: Recta ($\mathbb{R}$).

En el caso del plano, se toman un origen, una unidad de distancia, dos rectas perpendiculares (ejes), que pasan por el origen y un sentido positivo en cada eje. Dado un vector en $\mathbb{R}^2$, es decir, un par (x_1, x_2) de números, se hace corresponder al número x_1 un punto p_1 en el primer eje y al número x_2 un punto p_2 en el segundo eje. Entonces al vector (x_1, x_2) le corresponde el punto p del plano tal que su proyeccción en el primer eje es p_1 y su proyección en el segundo eje es p_2. La **proyección** (perpendicular) de un punto p en una recta L se define como el pie de la perpendicular desde p a L, si p no está en L. Si p está en L, entonces la proyección de p en L es simplemente p. Lo usual es considerar el primer eje como horizontal con el sentido positivo hacia la derecha y el segundo eje en la posición vertical con el sentido positivo hacia arriba. Ver Figura 2.

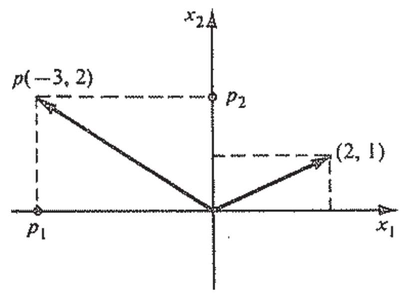

Figura 2: Plano ($\mathbb{R}^2$).

Una extensión de esta idea sirve para el caso de tres dimensiones. Se toman un origen, tres ejes perpendiculares que pasan por él, y un sentido positivo en cada uno de ellos. Un vector de $\mathbb{R}^3$ se representa por (x_1, x_2, x_3) y se puede asociar a puntos p_1, p_2 y p_3 en los ejes. Entonces al vector (x_1, x_2, x_3) le corresponde el punto p en el espacio cuyas proyeccciones en los ejes son p_1, p_2 y p_3. Usualmente se consideran los ejes como se ve en la Figura 3.

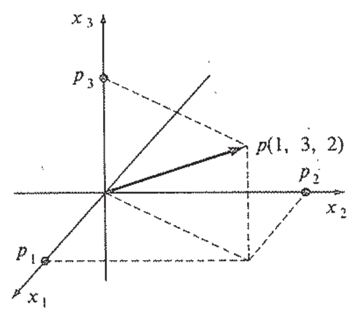

Figura 3: Espacio ($\mathbb{R}^3$).

Vimos que existe correspondencia entre vectores y su representación gráfica. A veces los vectores se representan geométricamente como un punto o como una flecha. Veamos brevemente como se representan gráficamente las operaciones de suma de vectores y producto por un escalar. Para fijar ideas consideraremos vectores en el plano. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores en el plano y a, b dos escalares, donde a es positivo y b negativo.

Por definición,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2), \\ a\,\mathbf{u} &= (a\,u_1, a\,u_2), \\ b\,\mathbf{u} &= (b\,u_1, b\,u_2). \end{aligned}$$

Ver Figuras 4 y 5.

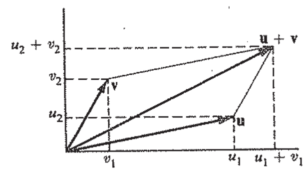

Figura 4: Suma de vectores.

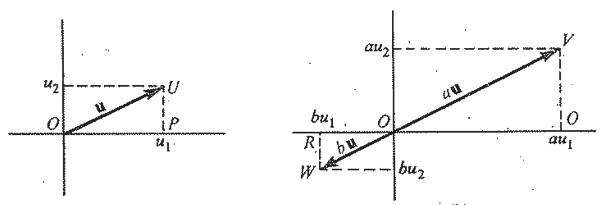

Figura 5: Producto de un vector por un escalar.

Definición 3.1. Dado $\mathbf{x}_1$ un vector no nulo llamamos **recta por el origen** al conjunto $\mathcal{L}_0$ de los múltiplos numéricos $t\,\mathbf{x}_1$. Se define la **recta** $\mathcal{L}$ paralela a $\mathcal{L}_0$ como el conjunto de todos los puntos que pueden ser representados en la forma $t\,\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_0$, donde $\mathbf{x}_0$ es un vector fijo. Ver Figura 6.

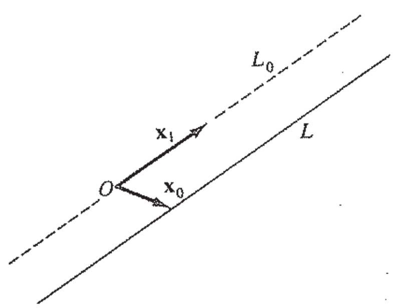

Figura 6: Rectas.

Dos rectas $t\,\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_0$ y $s\,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_0$ son **paralelas** si $\mathbf{x}_1$ es un múltiplo de $\mathbf{v}_1$. Además, toda recta $t\,\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_0$ es paralela a una que pasa por el origen: $t\,\mathbf{x}_1$.

Ejemplo: la recta en $\mathbb{R}^3$ paralela al vector $(1,1,1)$ que pasa por el punto $(-1,3,6)$ está dada por

$$t\,(1,1,1)+(-1,3,6).$$

Dados dos vectores $\mathbf{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{w} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, se define el **producto escalar** (o **producto interno** o **producto punto**) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ como

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ y $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = 0$.
2. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$.
3. $\langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
4. $\langle (r\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = r(\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle)$.

Además, se define la **norma** del vector $\mathbf{v}$, se denota $||\mathbf{v}||$ como

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $||\mathbf{v}|| > 0$, y $||\mathbf{0}|| = 0$.
2. $||r\mathbf{v}|| = |r| \, ||\mathbf{v}||$.
3. $||\mathbf{v} + \mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$.

Para todo par de vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^n$ se verifica la desigualdad:

$$-||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}|| \leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||,$$

por lo cual se cumple que:

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||} \leq 1.$$

Así se define el **coseno del ángulo** α comprendido entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ como:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||}.$$

Ejemplo 3.2.

- Dados los vectores $\mathbf{v} = (1, -2, 2)$ y $\mathbf{w} = (2, 1, 0)$ se tiene que:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0.$$

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3, \qquad ||\mathbf{w}|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}.$$

El coseno del ángulo comprendido es

$$\cos(\alpha) = \frac{0}{3\sqrt{5}} = 0.$$

Esto en particular significa que el ángulo plano entre los dos vectores es de $\frac{\pi}{2}$ radianes (o 90°), por lo que se dice que ambos vectores son **ortogonales**.

- Si consideramos los vectores $(1,1)$ y $(-3,-3)$, entonces el coseno del ángulo comprendido es:

  $$\cos(\alpha) = \frac{1\cdot(-3) + 1\cdot(-3)}{\sqrt{2}\sqrt{18}} = \frac{-6}{6} = -1.$$

  En este caso los vectores forman un ángulo de π radianes (o 180°).

Dados dos vectores $\mathbf{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{w} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ en $\mathbb{R}^n$, se define la **distancia** entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ como

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|.$$

Ejemplo 3.3. Calcular la distancia entre los vectores $\mathbf{v} = (1,-2)$ y $\mathbf{w} = (5,3)$.

Por la definición anterior:

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \|(5,3) - (1,-2)\| = \|(5-1, 3+2)\| = \|(4,5)\| = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}.$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 2\cdot 0 = 0.$$

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3, \qquad ||\mathbf{w}|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}.$$

3.2. Conjuntos linealmente independientes y bases

Si consideramos el espacio $\mathbb{R}^2$, y tomamos los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$, vemos que todo otro vector (x,y) se puede escribir como combinación lineal de ellos:

$$(x,y) = x\,(1,0) + y\,(0,1).$$

Del mismo modo, si consideramos los vectores $(1,1)$ y $(1,-1)$, cualquier vector (x,y) puede escribirse como:

$$(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1).$$

También los vectores $(1,0)$, $(1,1)$ y $(1,2)$ cumplen la misma propiedad:

$$(x,y) = (\frac{3}{2}x - y)(1,0) + (y-x)(1,1) + \frac{1}{2}x(1,2).$$

En cada uno de estos casos decimos que el conjunto de vectores dado **genera** el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

Ahora bien, notemos que en el caso del conjunto de vectores $(1,0)$, $(1,1)$ y $(1,2)$, ocurre que $(1,2) = (-1)(1,0) + 2\cdot(1,1)$, por lo cual cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ podrá escribirse también como combinación lineal de $(1,0)$ y $(1,1)$. Vemos entonces que hay una dependencia lineal entre estos vectores, pues existen coeficientes a, b y c no todos nulos tales que

$$a\,(1,0) + b\,(1,1) + c\,(1,2) = (0,0).$$

Diremos que un conjunto de vectores $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ es **linealmente dependiente** si existe una combinación lineal de ellos, con coeficientes no todos nulos, igual a $\mathbf{0}$:

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots + a_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}.$$

Si esto ocurre, es claro que uno de los vectores puede escribirse como combinación lineal de los otros.

Un conjunto de vectores que no es linealmente dependiente se dice que es **linealmente independiente**.

Ejemplo 3.4. El conjunto de vectores $S = \{(1,0,1), (1,1,0), (2,1,1), (2,0,2)\}$ es linealmente dependiente, puesto que:

$$(1,0,1) + (1,1,0) + (-1)\cdot(2,1,1) + 0\cdot(2,0,2) = (0,0,0).$$

Entonces, como $(2,1,1) = (1,0,1) + (1,1,0)$, en particular esto implica que cualquier combinación lineal de vectores de S puede escribirse también como combinación lineal del conjunto $S_1 = \{(1,0,1), (1,1,0), (2,0,2)\}$.

Notemos que en el Ejemplo 3.4, el conjunto $\{(1,0,1),\ (1,1,0)\}$ no genera todo el espacio $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, ninguna combinación lineal es igual al vector $\mathbf{v} = (0,0,1)$, ya que: $x(1,0,1) + y(1,1,0) = (0,0,1)$ implica $x + y = 0$ e $y = 0$. Esto motiva a la siguiente definición:

Definición 3.2. Un subconjunto de vectores de V es una **base** de V si es un conjunto linealmente independiente y genera todo el espacio V.

Un mismo espacio vectorial puede tener diferentes bases. Por ejemplo, los siguientes conjuntos son todos base de $\mathbb{R}^2$:

- $\mathcal{C} = \{(1,0), (0,1)\}$
- $\mathcal{B}_1 = \{(1,1), (0,1)\}$
- $\mathcal{B}_2 = \{(2,1), (1,2)\}$
- $\mathcal{B}_3 = \{(-2,1), (15,15)\}$

Se puede probar que dado un espacio vectorial, todas las bases tienen la misma cantidad de elementos. Esta cantidad se denomina **dimensión** del espacio vectorial.

En $\mathbb{R}^n$, llamamos e_i al vector cuya i-ésima coordenada es 1 y las demás son 0:

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \qquad e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

El conjunto de vectores $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, llamada **base canónica**. Notemos que $\mathcal{C}$ posee n elementos, por lo cual la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n.

En general, todo subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$ con n elementos, es una base de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.5. Determinar si el conjunto $\{(2, 1, 3), (2, 1, 2), (4, 1, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Dado que son tres vectores, sólo resta analizar si son linealmente independientes. Si no lo fuera, existirían números x, y, z, no todos nulos, tales que:

$$x(2, 1, 3) + y(3, 1, 2) + z(4, 1, 1) = (0, 0, 0),$$

o equivalentemente, el sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z & = 0 \\ x + y + z & = 0 \\ 3x + 2y + z & = 0 \end{cases}$$

tendría más de una solución.

La matriz asociada al sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el determinate de A es $|A| = 0$, significa que el sistema tiene infinitas soluciones y por lo tanto los vectores son linealmente dependientes. Es decir, no forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3.6. Si consideramos el conjunto $\{(2, 1, 3), (2, 1, 2), (4, 1, 0)\}$ y analizamos su dependencia lineal como en el Ejemplo 3.5, vemos que la matriz asociada al sistema es:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, $|B| = 1$, y por lo tanto la combinación lineal

$$x\,(2, 1, 3) + y\,(2, 1, 2) + z\,(4, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

sólo es posible si $x = y = z = 0$. Por lo tanto el conjunto $\{(2, 1, 3), (2, 1, 2), (4, 1, 0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Un conjunto de n vectores de $\mathbb{R}^n$ forman una base de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si la matriz cuyas columnas son estos vectores tiene determinante distinto de 0.

3.3. Coordenadas y cambio de base

Dada una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}\}$ de $\mathbb{R}^n$, cualquier vector $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ se escribe de manera única como combinación lineal de esa base:

$$\mathbf{v} = a_1\,\mathbf{v_1} + a_2\,\mathbf{v_2} + \cdots + a_n\mathbf{v_n}.$$

Los números a_1, a_2, …, a_n se denominan **coordenadas** de $\mathbf{v}$ en la base $\mathcal{B}$. Usaremos la notación:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Ejemplo 3.7.

- Las coordenadas del vector $\mathbf{v} = (3,1)$ en la base canónica $\mathcal{C}$ son 3 y 1, ya que

  $$3 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1) = (3,1).$$

  Escribimos $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = (3,1)$, aunque en el caso de la base canónica se suele omitir el subíndice.

- El vector de coordenadas de $(3,1)$ en la base $\mathcal{B} = \{(1,3),(1,-1)\}$ es $(1,2)$, ya que

  $$1 \cdot (1,3) + 2 \cdot (1,-1) = (3,1).$$

  Escribimos $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (1,2)$.

Notemos en el Ejemplo 3.7, que la matriz asociada a la base multiplicada por sus coordenadas es igual al vector:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sea A la matriz asociada a la base $\mathcal{B}$, y sea $\mathbf{v}$ un vector expresado en la base canónica. Entonces las coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base $\mathcal{B}$ están dadas por

$$A^{-1} \cdot \mathbf{v}.$$

Ejemplo 3.8. La base $\mathcal{B} = \{(2,1,3),(3,1,2),(4,1,0)\}$ tiene la matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

cuya inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 3 & -12 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así, para determinar las coordenadas de los vectores $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ y $\mathbf{w} = (-2, 0, 1)$ calculamos $A^{-1} \cdot \mathbf{v}$ y $A^{-1} \cdot \mathbf{w}$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 3 & -12 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 3 & -12 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (4, -6, 2)$ y $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = (3, -4, 1)$. En efecto:

$$4 \cdot (2, 1, 3) + (-5) \cdot (3, 1, 2) + 2 \cdot (4, 1, 0) = (1, 1, 2)$$

$$3 \cdot (2, 1, 3) + (-4) \cdot (3, 1, 2) + 1 \cdot (4, 1, 0) = (-2, 0, 1)$$

Un mismo vector tendrá diferentes coordenadas según la base que se considere. Ahora bien, dadas dos bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, es posible determinar las coordenadas en la base $\mathcal{B}_2$ conociendo las coordenadas en la base $\mathcal{B}_1$. Esto se suele denominar **cambio de base**. Ilustramos esto en un ejemplo.

Ejemplo 3.9. Consideremos las bases en $\mathbb{R}^2$:

$\mathcal{B}_1 = \{(1, 1), (1, 0)\} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1, 2), (2, -1)\} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$.

Dado un vector $\mathbf{v}$, éste puede escribirse en términos de sus coordenadas (a, b) en $\mathcal{B}_1$ como:

$$\mathbf{v} = a \cdot (1, 1) + b \cdot (1, 0),$$

y en sus coordenadas (c, d) en la base $\mathcal{B}_2$ como

$$\mathbf{v} = c \cdot (1, 2) + d \cdot (2, -1).$$

A su vez, cada uno de los vectores de la base $\mathcal{B}_2$ tienen sus coordenadas en $\mathcal{B}_1$, que obtenemos multiplicando a izquierda a la matriz asociada a $\mathcal{B}_2$ por la inversa de la matriz asociada a $\mathcal{B}_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esto es, $[\mathbf{v_1}]_{\mathcal{B}_1} = (2, -1)$ y $[\mathbf{v_2}]_{\mathcal{B}_1} = (-1, 3)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= c\,\mathbf{v_1} + d\,\mathbf{v_2} \\ &= c\,(2\mathbf{u_1} + (-1)\mathbf{u_2}) + d\,((-1)\mathbf{u_1} + 3\mathbf{u_2}) \\ &= (2c - d)\,\mathbf{u_1} + (-c + 3d)\,\mathbf{u_2} \end{aligned}$$

Recordemos que $\mathbf{v} = a\,\mathbf{u_1} + b\,\mathbf{u_2}$, por lo cual debe ser:

$$a = 2c - d, \qquad b = -c + 3d,$$

o en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_1}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2}}.$$

La matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ es la **matriz de transición** o de **cambio de base**, de la base $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$. Notar que sus columnas son las correspondientes coordenadas de los elementos de la base $\mathcal{B}_2$ en la base $\mathcal{B}_1$.

Dado un vector $\mathbf{v}$, la relación entre sus coordenadas en bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ está dada por:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_1} = P \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2},$$

donde P es una matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}_2$ expresadas en la base $\mathcal{B}_1$.

- La matriz P se denomina **matriz de transición** o de **cambio de base** de la base $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.
- Si P es la matriz de transición de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$, entonces P es inversible y y P^{-1} es la matriz de transición de $\mathcal{B}_2$ a la base $\mathcal{B}_1$

4. Transformaciones lineales

La ecuación matricial $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede verse como una forma de representar un sistema de ecuaciones, pero también como una *acción* de la matriz A sobre el vector $\mathbf{x}$. Por ejemplo, la ecuación

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}} \tag{1}$$

dice que la multiplicación por A transforma al vector $\mathbf{c}$ en el vector $\mathbf{b}$ y al vector $\mathbf{u}$ en $\mathbf{w}$. En general, podemos ver que a un vector $\mathbf{x} = (x, y)'$ es transformado en el vector $(2x + y, x, -x + y)'$. [1]

[1] El apóstrofe $(x, y)'$ indica el transpuesto, es decir: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. A los fines de multiplicar por la matriz A es conveniente considerar a **x** como un vector columna.

Así, la matriz A define una **transformación** del espacio $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, dada por

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ (x,y)' &\mapsto (2x+y, x, -x+y)' \end{aligned}$$

Este tipo de transformaciones se denomina **transformación lineal** y cumple la siguiente definición.

Una **transformación lineal** $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ es una función que asigna a cada vector de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector $T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$, y que cumple las siguientes propiedades:

- $T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$,
- $T(c\,v) = c\,T(\mathbf{v})$, para $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Se puede probar que toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ está **asociada** a una matriz $[T]$ $m \times n$. Así:

$$T(\mathbf{x}) = [T] \cdot \mathbf{x}.$$

Las propiedades de la transformación lineal se traducen en:

$$[T] \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = [T] \cdot \mathbf{x} + [T] \cdot \mathbf{y}, \qquad [T] \cdot (c\,\mathbf{x}) = c \cdot ([T] \cdot \mathbf{x}).$$

Nos referiremos de ahora en más a transformaciones lineales de un espacio en sí mismo, es decir del tipo $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, donde la matriz $[T]$ asociada es una matriz cuadrada $n \times n$.

Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, el elemento $T(\mathbf{x})$ se denomina **imagen** de $\mathbf{x}$, y el conjunto de todas las imágenes es el **rango** o **imagen** de T. La imagen de T es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, y la dimensión de este subespacio también se denomina **rango de** $[T]$.

- Si $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal, y $[T]$ es su matriz asociada. Entonces las columnas de $[T]$ son las imágenes de la base canónica.
- La matriz $[T]$ es inversible si y sólo si el rango de $[T]$ es n.

Analizaremos algunos ejemplos de transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$.

1. **Proyección sobre el eje** x

   Si consideramos la base canónica $\mathcal{C} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\} = \{(1,0),(0,1)\}$, entonces la proyección sobre el eje x de $\mathbf{e_1}$ es $\mathbf{e_1}$, y de $\mathbf{e_2}$ es $\mathbf{0}$. Luego la transformación lineal asociada es

   $$T(x,y) = (x,0),$$

   y la matriz asociada es

   $$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. **Proyección sobre la recta** $y = 2x$

   La recta $y = 2x$ está generada por el vector $\mathbf{u} = (1, 2)$. Cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ tiene una componente en ese vector y otra componente en su ortogonal: $(-2, 1)$. Esto es:

   $$\mathbf{v} = a \cdot (1, 2) + b \cdot (-2, 1).$$

   La proyección sobre la recta $y = 2x$ es la transformación $S(\mathbf{v}) = a\,(1, 2) = (a, 2a)$. Para obtener esta coordenada a es suficiente calcular el producto escalar $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$:

   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (1, 2)\ , a \cdot (1, 2) + b \cdot (-2, 1) \rangle = a\,||(1, 2)||^2$$

   De esta manera,

   $$a = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{||u||^2}.$$

   Tomamos la base canónica, y calculamos $S(\mathbf{e_1})$ y $S(\mathbf{e_2})$:

   $$S(\mathbf{e_1}) = \frac{\langle (1, 0),\ (1, 2) \rangle}{5}\,(1, 2) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \qquad\qquad S(\mathbf{e_2}) = \frac{\langle (0, 1),\ (1, 2) \rangle}{5}(1, 2) = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5}).$$

   Así la matriz asociada a S es

   $$[S] = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

3. **Reflexión respecto a la recta** $y = x$

   En este caso, el vector $\mathbf{e_1}$ se transforma en el vector $\mathbf{e_2}$, y el vector $\mathbf{e_2}$ se transforma en $\mathbf{e_1}$. Luego la matriz asociada es:

   $$[F] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   y la transformación lineal es

   $$F(x, y) = (y, x).$$

4. **Rotación**

   La rotación del plano en un ángulo θ, en sentido antihorario, transforma el vector unitario $\mathbf{e_1}$ en el vector v_1 con coordenadas $(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$, y al vector $\mathbf{e_2}$ en el vector v_2 con coordenadas $(\cos(\theta + \frac{pi}{2}), \operatorname{sen}(\theta) + \frac{\pi}{2}) = (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))$. Luego la matriz asociada a esta rotación es

   $$[R_\theta] = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

   La transformación lineal asociada es:

   $$R_\theta(x, y) = (\cos(\theta)x + \operatorname{sen}(\theta)y, -\operatorname{sen}(\theta)x + \cos(\theta)y).$$

5. **Shear (desplazamiento axial)**

   Este tipo de transformaciones produce un desplazamiento del plano a lo largo de un eje, y se obtiene sumando a cada vector un múltiplo de la componente en la dirección de ese eje. Las siguientes matrices corresponden a este tipo de transformaciones:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En los ejemplos anteriores la matriz asociada a la tranformación lineal está definida en términos de la base canónica. Si se considera una base distinta, la matriz de la transformación lineal tendrá probablemente una forma diferente. Denotaremos entonces $[T]_{\mathcal{B}}$ a la matriz de T en la base canónica.

Si $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal, y $\mathcal{B}$ es una base, denotaremos

$$[T]_{\mathcal{B}}$$

a la matriz de T asociada a $\mathcal{B}$.
Las columnas de $\mathbb{R}^n$ son las imágenes de los vectores de $\mathcal{B}$, expresados en la misma base.

Ejemplo 4.1. Si consideramos la proyección T sobre la recta $y = 2x$, y consideramos la base $\mathcal{B} = \{(1, 2), (-2, 1)\} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$, entonces

$$T(\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1}, \qquad T(\mathbf{u_2}) = \mathbf{0}.$$

Luego la matriz en esta nueva base es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En general, consideremos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, y $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ dos bases. Sea P la matriz de transición de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$. Entonces las matrices de T asociadas a cada una de estas bases están relacionadas de la siguiente forma:

$$P^{-1}\,[T]_{\mathcal{B}_1}\,P = [T]_{\mathcal{B}_2}.$$

Ejemplo 4.2. En el Ejemplo 4.1, la matriz P de transición de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Tenemos que la matriz de T en la base canónica es $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$. Luego la matriz en la base $\mathcal{B}$ es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

como se calculó en el Ejemplo 4.1.

4.1. Autovectores y autovalores

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (2x + y, -2y)$.

Podemos ver que $T(1, 0) = 2 \cdot (1, 0)$, es decir que $T(1, 0)$ es un múltiplo del vector $(1, 0)$. Del mismo modo, vemos que $T(1, -4) = (-2, 8) = -2(1, -4)$, por lo cual la imagen de $(1, -4)$ también es un múltiplo de este vector.

Definición 4.1. Sea $T : V \mapsto V$ una transformación lineal. Un vector $\mathbf{v}$ no nulo con la propiedad que $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ se dice que es un **autovector** de T con **autovalor** λ.

Si $\mathbf{v}$ es un autovector de T con autovalor λ, entonces cualquier múltiplo no nulo de $\mathbf{v}$ también lo es, pues:

$$T(a \cdot \mathbf{v}) = a\, T(\mathbf{v}) = a\, \lambda\, T(\mathbf{v}) = \lambda\, T(a \cdot \mathbf{v}).$$

Más aún, cualquier combinación lineal no nula de autovectores de T con un mismo autovalor λ también es un autovector de T con el mismo autovalor. Así, el conjunto generado por los autovectores de T con autovalor λ es un subespacio de V llamado **autoespacio** de T asociado a λ, y que denotaremos V_λ.

Por ejemplo, $V_2 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ es el autoespacio de $T(x, y) = (2x + y, 2y)$ asociado al autovalor 2.

La importancia de los autovectores es que estos indican cuáles son las “direcciones” en el espacio que son preservadas por la transformación lineal. En particular, si se utiliza un sistema de coordenadas orientado por los autovectores (y no por un sistema canónico), esto permite expresar a la matriz de la transformación en forma diagonal, simplificando en gran manera los cálculos matriciales.

Ahora bien, no toda matriz (o transformación lineal) posee autovectores y autovalores. Para que una matriz A tenga un autovalor real, debe existir un vector no nulo $\mathbf{v}$ que resuelva la ecuación matricial

$$A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}.$$

Notemos que tanto λ como $\mathbf{v}$ son incógnitas en este sistema. Dado que multiplicar a un vector por un escalar λ es equivalente a multiplicarlo por la matriz $\lambda \cdot I_n$, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$A\mathbf{v} = (\lambda \cdot I_n)\,\mathbf{v},$$

o también

$$(\lambda I_n - A)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Esto plantea un sistema de ecuaciones homogéneo, con n incógnitas (las coordenadas de v), y que tendrá una solución no nula si y sólo si el determinante de la matriz $\lambda\, I_n - A$ es igual a 0.

Puede verse que este determinante es un polinomio de grado n en la variable λ, por lo cual el problema de hallar autovalores y autovectores comienza por encontrar soluciones a la ecuación polinomial

$$|\lambda\, I_n - A| = 0.$$

El polinomio $\xi_A(\lambda) = |\lambda\, I_n - A|$ se llama **polinomio característico** de A.

Por cada raíz real $\lambda = r$ de este polinomio, si tuviere alguna, tendremos un autoespacio asociado que llamamos V_r, que resulta de resolver el sistema homogéneo $(r\, I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 4.3. Consideremos la transformación lineal $T(x, y) = (2x + y, -2y)$, con matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La transformación lineal T posee un autovalor no nulo si y sólo si existe un vector (x, y) distinto de $(0, 0)$ tal que

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dado que

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

resolvemos el sistema

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 0 - 1 \\ 0 & \lambda - (-2) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema tendrá una solución no nula si y sólo si

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \right| \neq 0.$$

Este determinante, o polinomio característico de A, tiene la expresión:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2) - 0 = \lambda^2 - 4.$$

Las raíces de $\chi_A(\lambda) = 0$ son $\lambda = 2$ y $\lambda = -2$, y constituyen los autovalores de A (y de T).

El autoespacio V_λ, para cada λ es el espacio de soluciones del sistema

$$\begin{cases} (\lambda - 2)x - y = 0 \\ (\lambda + 2)y = 0 \end{cases} .$$

Así, V_2 es el espacio de soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} -y = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} ,$$

que está dado por todos los vectores de la forma $(x, 0)$, con $x \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, el autoespacio V_{-2} asociado al autovalor 2 es el espacio de soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} (-4)x - y = 0 \\ 0y = 0 \end{cases} ,$$

que está dado por todos los vectores de la forma $(y, -4y)$, con $y \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.4. Hallar los autovalores y autoespacios asociados de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico está dado por

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 32.$$

Factorizamos el polinomio:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 16) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 8).$$

Así, los autovalores son 2 y 8, y los respectivos autoespacios son

$$V_2 = \{x\,(1, -1, 0) + y(0, 1, -1),\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$V_8 = \{x\,(1, 1, 1),\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 4.5. Determinar los autovalores y autovectores de la transformación lineal $T(x, y, z) = (-y, x, 2z)$.

La matriz A asociada a T es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es:

$$\chi_A = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1).$$

En este caso existe un único autovalor (real), $\lambda = 2$, y su autoespacio está dado por:

$$V_2 = \{z \cdot (0,0,1) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

4.2. Diagonalización de matrices

Si una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ tiene n autovectores linealmente independientes, entonces estos n autovectores conforman una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$. Entonces, si

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$$

es la base de autovectores, λ_i es el autovalor asociado al autovector $\mathbf{u_i}$, se tiene que

$$T(\mathbf{u_i}) = \lambda_i \mathbf{u_i}, \qquad \text{para cada } i,\ 1 \leq i \leq n.$$

Entonces la matriz de T asociada a $\mathcal{B}$ tiene forma **diagonal**:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ahora bien, la matriz de T en la base canónica puede tener una forma no diagonal. Sin embargo, por lo que hemos visto, las matrices en estas bases están relacionadas por:

$$P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P = [T]_{\mathcal{C}}.$$

- Se dice que una matriz A $n \times n$ es **diagonalizable** si existe una matriz Q inversible tal que $Q^{-1}AQ$ es diagonal.
- Una matriz A $n \times n$ es diagonalizable $\mathbb{R}^n$ si y sólo si existe una base de $\mathbb{R}^n$ de autovectores de A.

En el Ejemplo 4.3, $\mathbb{R}^2$ tiene una base formada por autovectores de T:

$$\mathcal{B} = \{(1,0),\ (1,-4)\}.$$

y estos vectores son las columnas de la matriz de transición P de esta base a la base canónica. La matriz de la transformación lineal es

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$P^{-1}[T]_{\mathcal{C}}P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = [T]_{\mathcal{B}}.$$

En el Ejemplo 4.4, los autovectores $\{(1,-1,0),(0,1,-1),(1,1,1)\}$ forman una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Así, la matriz de la transformación lineal T en la base $\mathcal{B}$ está dada por:

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= P^{-1}[T]_{\mathcal{C}}P \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Referencias

[1] Anton, Howard. *Introducción al Álgebra Lineal*. Limusa, México. 1993.

[2] Hoffman, Kenneth, and Kunze, Ray Alden. *Algebra lineal*. Prentice-Hall, México. 1973.

[3] Lay, David C. *Linear Algebra and its Applications*. Addison Wesley, University of Maryland. College Park. 2003.

[4] Williamson, Crowell and Trotter. *Cálculo de funciones vectoriales*. Editorial Prentice Hall Internacional. 1975.