Funciones de varias variables

BENITO J. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ (bjglez@ull.es)
DOMINGO HERNÁNDEZ ABREU (dhabreu@ull.es)
MATEO M. JIMÉNEZ PAIZ (mjimenez@ull.es)
M. ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ (imarrero@ull.es)
ALEJANDRO SANABRIA GARCÍA (asgarcia@ull.es)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Índice

1. Funciones de varias variables

Definición 1.1. *Denotemos por* $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ *el plano euclídeo, y sea* $D \subset \mathbb{R}^2$. *Una aplicación*

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & z = f(x,y) \end{array}$$

se denomina una función valuada real de dos variables reales. *Es usual denotar por* $z = f(x,y)$ *a estas funciones.*

Llamaremos variables independientes *a* x *e* y, *y* variable dependiente *a* z.

El dominio *de la función* f *es el conjunto*

$$\mathrm{Dom}\, f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Nótese que $D \subset \mathrm{Dom}\, f$.

El conjunto

$$\mathrm{Im}\, f = \{z = f(x,y) : (x,y) \in \mathrm{Dom}\, f\} \subset \mathbb{R}$$

es la imagen *o* rango *de* f.

Por último, la gráfica *o* grafo *de* f *es el conjunto*

$$\mathrm{Grafo}\, f = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \mathrm{Dom}\, f\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Geométricamente, el grafo de f *se interpreta como una superficie en el espacio cuya proyección sobre el plano* OXY *es* $\mathrm{Dom}\, f$.

Ejemplo 1.2. *Hallar el dominio y el rango de la función* $f(x,y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$. *Esbozar su gráfica.*

RESOLUCIÓN. En primer lugar, nótese que el radicando ha de ser no negativo. Por tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\, f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16 - 4x^2 - y^2 \geq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1\right\}, \end{aligned}$$

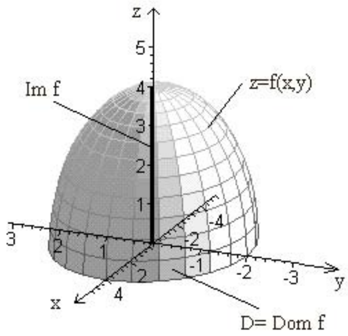

Figura 1.1. Dominio, rango y gráfica de la función del Ejemplo 1.2.

el cual constituye el recinto interior a la elipse de semiejes 2 y 4 en el plano OXY:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Por otra parte, al ser $4x^2 + y^2 \geq 0$, el valor máximo de f se toma en el punto $(0,0)$, donde $f(0,0) = \sqrt{16} = 4$; mientras que el valor mínimo se toma cuando $4x^2 + y^2 = 16$, es decir, sobre la elipse anterior, donde la función es idénticamente nula. Así pues,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{z = f(x,y) \in \mathbb{R} : (x,y) \in \operatorname{Dom} f\} \\ &= \{z \in \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 4\}. \end{aligned}$$

El grafo de f viene dado por

$$\begin{aligned} \text{Grafo } f &= \left\{ \left(x, y, \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}\right) : (x,y) \in \operatorname{Dom} f \right\} \\ &= \left\{ \left(x, y, \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}\right) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

el cual puede ser representado como la mitad superior del elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} z = f(x,y),\ z \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2},\ z \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad z^2 = 16 - 4x^2 - y^2,\ z \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1,\ z \geq 0. \end{aligned}$$

La Figura 1.1 muestra el dominio, rango y gráfica de la función considerada. □

Para visualizar una función de dos variables podemos auxiliarnos de sus *curvas de nivel*

$$f(x,y) = c, \quad c \text{ constante},$$

que según las distintas aplicaciones en que se utilicen se denominan *isobaras*, *isotermas*, *líneas equipotenciales*, etc.

Ejemplo 1.3. *Dibujar las curvas de nivel de la función* $f(x,y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$ *correspondientes a* $c = 0, 1, 2, 3, \ldots, 8$.

RESOLUCIÓN. Las curvas de nivel para la función f vienen dadas por:

$$\begin{aligned} f(x,y) = c \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{64 - x^2 - y^2} = c \\ &\Rightarrow \quad 64 - x^2 - y^2 = c^2 \\ &\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 64 - c^2, \end{aligned}$$

las cuales son circunferencias en el plano OXY centradas en el origen y de radio $\sqrt{64 - c^2}$. Por tanto, para los valores $c = 0, 1, 2, 3, \ldots, 8$, los radios de las respectivas circunferencias son $8, \sqrt{63}, \sqrt{60}, \sqrt{55}, \ldots, 0$. En la Figura 1.2 se da una representación gráfica de las curvas de nivel de f para estos valores de c.

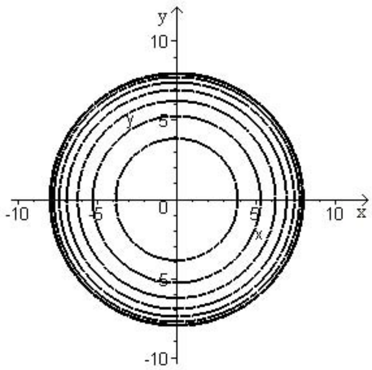

Figura 1.2. Curvas de nivel del Ejemplo 1.3.

Al ser la función f constante sobre las curvas de nivel ($f(x,y) = c$), podemos esbozar su gráfica como se muestra en la Figura 1.3.

□

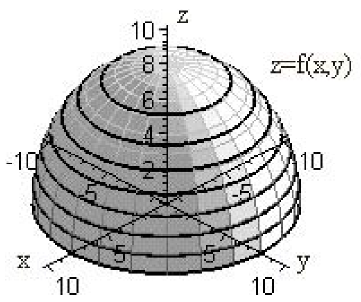

Figura 1.3. Gráfica de la función del Ejemplo 1.3.

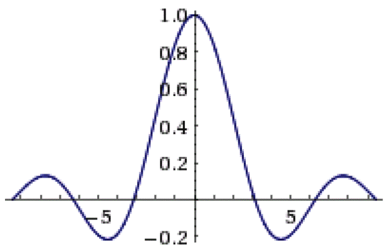

Figura 1.4. Gráfica de la función $z = \operatorname{sen}\theta/\theta$.

Ejemplo 1.4. *Realizar un esbozo de la gráfica de la función*

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

RESOLUCIÓN. En primer lugar, nótese que las circunferencias C_r de centro el origen y radio $r \geq 0$ en el plano OXY,

$$C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = r^2\},$$

son curvas de nivel para dicha función. Esto quiere decir que la superficie correspondiente es una superficie de revolución, obtenida al girar alrededor del eje OZ la función de una variable real

$$z = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \qquad (\theta \approx x^2+y^2).$$

La gráfica de esta última viene dada en la Figura 1.4. Su revolución alrededor del eje OZ produce el «sombrero mexicano» de la Figura 1.5.

□

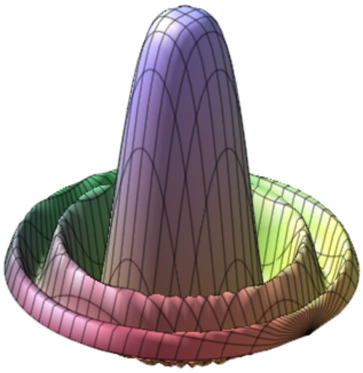

Figura 1.5. «Sombrero mexicano».

2. Límites y continuidad

Definición 2.1. *Sea $z = f(x,y)$ definida en un disco abierto (esto es, un círculo sin su circunferencia exterior) centrado en (x_0,y_0), excepto quizás en (x_0,y_0), y sea $L \in \mathbb{R}$. Se dice que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 : 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \ \Rightarrow\ |f(x,y)-L| < \varepsilon.$$

Definición 2.2. *La función $z = f(x,y)$ es* continua en el punto (x_0,y_0) *de una región D si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Diremos que f es continua en D *si lo es en todo punto de D.*

Si las funciones $f,\ g$ son continuas en el punto (x_0,y_0), también son continuas en (x_0,y_0):

1. kf, con $k \in \mathbb{R}$.
2. $f \pm g$.
3. fg.

4. f/g, siempre que $g(x_0,y_0)\neq 0$.

Ejemplo 2.3. *Como consecuencia de las propiedades anteriores y del hecho que las funciones coordenadas x e y son continuas, se obtiene que los polinomios en x e y:*

$$p(x,y)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\ldots+a_{nm}x^ny^m,$$

con $a_{ij}\in\mathbb{R}$ $(0\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq m)$*, son también continuos.*

Intuitivamente, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

puede ser interpretado de la siguiente manera: cualquiera que sea la forma de acercarnos al punto (x_0,y_0) del plano OXY (esto es, a lo largo de semirrectas, parábolas, etc.), para (x,y) cerca de (x_0,y_0), los valores $z=f(x,y)$ están cercanos a L.

Formalizando esta idea de límite se pueden obtener las siguientes propiedades, particularmente útiles en situaciones prácticas.

- *Límites iterados.* Si los *límites iterados* son distintos, esto es:

  $$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)\neq \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right),$$

  podemos concluir que no existe

  $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

- *Límites direccionales.* Consideramos dos rectas que pasan por el punto (x_0,y_0):

  $$r_1:\quad y=y_0+\lambda_1(x-x_0)$$
  $$r_2:\quad y=y_0+\lambda_2(x-x_0)$$

  y son distintas, esto es, $\lambda_1\neq\lambda_2$. Si los *límites direccionales*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y\in r_1}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y=y_0+\lambda_1(x-x_0)}} f(x,y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y_0+\lambda_1(x-x_0))$$

y

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y\in r_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y=y_0+\lambda_2(x-x_0)}} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} f(x,y_0+\lambda_2(x-x_0))$$

son distintos, podemos concluir que no existe

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Es importante hacer notar que, tanto en los límites iterados como en los direccionales, la igualdad de éstos no garantiza la existencia del límite doble. Luego, los criterios anteriores constituyen un método para probar la *inexistencia* del límite de una función en un determinado punto del plano.

La idea anterior puede ser aplicada al caso más general en que consideramos curvas que pasan por el punto (x_0,y_0) en lugar de rectas, como por ejemplo parábolas, curvas polinomiales de grado $n\geq 3$, etc.

Ejemplo 2.4. *Estudiar la continuidad de la función*

$$f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

RESOLUCIÓN. La función $f(x,y)$ es una función racional, esto es, el cociente de dos polinomios. Al ser los polinomios funciones continuas, utilizando la propiedad 4 anterior podemos garantizar que $f(x,y)$ es continua salvo quizás en aquellos puntos que anulen el denominador x^2+y^2.

Ahora bien,

$$x^2+y^2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x=0\\ y=0. \end{cases}$$

La función $f(x,y)$ no está definida en $(0,0)$, luego podemos afirmar que es continua en todo su dominio $\mathrm{Dom}\, f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\neq(0,0)\}$. Veamos si la función puede ser definida en el origen $(0,0)$ de manera que sea continua en todo $\mathbb{R}^2$. Esto es equivalente a probar que existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Para ello comprobamos en primer lugar si coinciden los límites iterados. Ahora bien:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1,$$

mientras que

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0.$$

Como los límites iterados no coinciden, podemos afirmar que no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2},$$

con lo cual f no puede ser extendida continuamente a todo $\mathbb{R}^2$.

OBSERVACIÓN: Los límites direccionales en este caso vienen dados por:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x,y)\\ y=\lambda x}}\frac{x^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}f(x,\lambda x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1+\lambda^2)}=\frac{1}{1+\lambda^2}.$$

Puesto que el límite depende de λ, existen rectas distintas a través de $(0,0)$ con límites direccionales distintos. Por tanto, al igual que con los límites iterados, podemos inferir que no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

□

3. Derivadas parciales

Para determinar el efecto de un catalizador en un experimento, un químico puede realizarlo varias veces, con distintas cantidades de catalizador cada vez, mientras mantiene constantes todas las demás variables, como la temperatura o la presión. Análogamente, puede estudiar la influencia de la temperatura si hace variar ésta mientras mantiene constantes la proporción de catalizador y la presión; o de la presión, si la hace variar manteniendo constantes la cantidad de catalizador y la temperatura. Suponiendo que la función $z=f(u,v,w)$ describe el resultado del experimento en términos de la proporción de catalizador u, la temperatura v y la presión w, ¿cuál es el ritmo de cambio de f con respecto a cada una de sus variables independientes?

Definición 3.1. *El proceso que permite averiguar dicha razón de cambio se llama* derivación parcial *y el resultado se denomina* derivada parcial *de f respecto de la variable independiente elegida.*

Simbólicamente, si $z=f(x,y)$:

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Nótese que en la definición de la derivada parcial $f_x(x,y)$ la variable y se mantiene constante, y análogamente ocurre con la variable x en la definición de $f_y(x,y)$. Esto viene a decir que la derivada parcial respecto a una de las variables es una derivada en el sentido usual de funciones de una variable real, mientras que el resto de variables que comparecen en la función permanecen constantes. Por lo tanto, en el cálculo de derivadas parciales es lícito el uso de las reglas de derivación para funciones de una variable real.

Ejemplo 3.2. *Hallar las derivadas parciales de la función* $f(x,y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$.

RESOLUCIÓN. Utilizando la definición de las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) - (x+\Delta x)^2y^2 + 2(x+\Delta x)^3y - (3x - x^2y^2 + 2x^3y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) - y^2[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] + 2y[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - (3x - x^2y^2 + 2x^3y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x - x^2y^2 + 2x^3y + (3 - 2xy^2 + 6x^2y)\Delta x + (-y^2 + 6xy)(\Delta x)^2 + 2y(\Delta x)^3 - (3x - x^2y^2 + 2x^3y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(3 - 2xy^2 + 6x^2y) + (-y^2 + 6xy)\Delta x + 2y(\Delta x)^2\right] \\
&= 3 - 2xy^2 + 6x^2y.
\end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x - x^2(y+\Delta y)^2 + 2x^3(y+\Delta y) - (3x - x^2y^2 + 2x^3y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x - x^2[y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2] + 2x^3(y+\Delta y) - (3x - x^2y^2 + 2x^3y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x - x^2y^2 + 2x^3y + (-2x^2y + 2x^3)\Delta y - x^2(\Delta y)^2 - (3x - x^2y^2 + 2x^3y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \left[(-2x^2y + 2x^3) - x^2\Delta y\right] \\
&= -2x^2y + 2x^3.
\end{aligned}$$

Las derivadas parciales anteriores pueden ser calculadas más fácilmente usando las reglas de derivación para funciones de una variable real, tal como comentamos anteriormente. Así, al derivar respecto a x manteniendo y constante obtenemos:

$$f_x(x,y) = 3 - 2xy^2 + 6x^2y.$$

Derivando ahora respecto a y mientras mantenemos x constante:

$$f_y(x,y) = -2x^2y + 2x^3.$$

□

Ejemplo 3.3. *Hallar las derivadas parciales de la función* $f(x,y) = xe^{x^2y}$ *en el punto* $(1, \ln 2)$.

RESOLUCIÓN. Las derivadas parciales en cualquier punto (x,y) vienen dadas por:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= e^{x^2y} + 2x^2ye^{x^2y}, \\ f_y(x,y) &= x^3e^{x^2y}. \end{aligned}$$

Evaluándolas en el punto $(1, \ln 2)$:

$$\begin{aligned} f_x(1,\ln 2) &= e^{\ln 2} + 2\ln 2 e^{\ln 2} = 2 + 4\ln 2, \\ f_y(1,\ln 2) &= e^{\ln 2} = 2. \end{aligned}$$

□

3.1. Interpretación geométrica

Si $y = y_0$, entonces $z = f(x, y_0)$ es la curva intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con el plano $y = y_0$. Por tanto,

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

es la pendiente de la recta tangente a dicha curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$. Nótese que tanto la curva como su tangente se hallan en el plano $y = y_0$. Análogamente ocurre con $f_y(x_0,y_0)$. Así pues, *los valores de f_x y f_y en el punto (x_0,y_0) proporcionan las pendientes de la superficie en el punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, en las direcciones*

x e y, respectivamente (Figura 3.1).

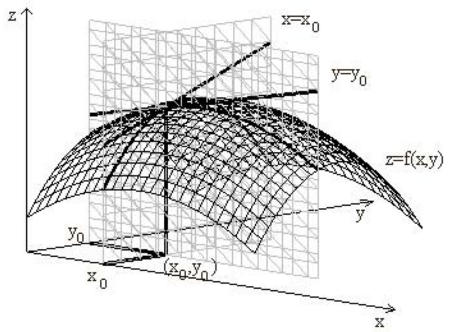

Figura 3.1. Interpretación geométrica de las derivadas parciales.

Ejemplo 3.4. *Hallar las pendientes de la superficie de ecuación*

$$f(x,y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

en el punto $(\frac{1}{2},1,2)$*, en las direcciones x e y.*

RESOLUCIÓN. Las derivadas parciales en cualquier punto (x,y) vienen dadas por:

$$f_x(x,y) = -x, \quad f_y(x,y) = -2y.$$

En el punto $(\frac{1}{2},1,2)$:

$$f_x\left(\frac{1}{2},1\right) = -\frac{1}{2}, \qquad f_y\left(\frac{1}{2},1\right) = -2.$$

Tal y como se ha mencionado anteriormente, estas parciales proporcionan las pendientes de la superficie en dicho punto, en las direcciones x e y, respectivamente. □

3.2. La diferencial de una función

Definición 3.5. *Supongamos que $z = f(x,y)$ es una función definida en un conjunto abierto D, que $(x_0,y_0) \in D$, y que existen en este punto las derivadas parciales*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Entonces se dirá que f es diferenciable *en (x_0,y_0) si*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

El siguiente resultado garantiza que la mayoría de las funciones que manejamos habitualmente son diferenciables en determinados puntos.

Teorema 3.6. *Si la función f posee derivadas parciales continuas en un punto entonces es diferenciable en ese punto.*

Definición 3.7. *Dada la función $z=f(x,y)$ diferenciable en el punto (x_0,y_0), se denomina* diferencial *de f en dicho punto a la aplicación lineal dada por*

$$\begin{array}{rccc} [dz(x_0,y_0)]: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y. \end{array}$$

Ejemplo 3.8. *Hallar la diferencial de la función $z=x^4-y^3$ en el punto $(1,-1)$.*

RESOLUCIÓN. Se tiene:

$$[dz(1,-1)](x,y)=4x-3y.$$

En el punto $(-1,0)$,

$$[dz(-1,0)](x,y)=-4x.$$

□

Es importante fijar la idea de que *la diferencial es una aplicación lineal*.

3.3. Aplicaciones de la diferencial

Considerando el límite que comparece en la Definición 3.5 y teniendo en cuenta que la diferencial de f en el punto (h,k) está dada por

$$[df(x_0,y_0)](h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k,$$

observamos que dicho límite se puede escribir como

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-[df(x_0,y_0)](h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Tanto el numerador como el denominador de esta expresión tienden a cero cuando $(h,k)\to(0,0)$, pero el valor del límite es cero. Por tanto, el numerador está más cerca de cero que $\sqrt{h^2+k^2}$ cuando (h,k) se aproxima a $(0,0)$, y podemos escribir:

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-[df(x_0,y_0)](h,k)\simeq 0, \quad (h,k)\to(0,0);$$

o, lo que es lo mismo:

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\simeq [df(x_0,y_0)](h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k, \quad (h,k)\to(0,0). \tag{3.1}$$

La relación anterior pone de manifiesto que *la diferencial de f en el punto (x_0,y_0) es una buena aproximación de*

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$$

para $(h,k)\to(0,0)$. Esto se verá más claro en el

Ejemplo 3.9. *Demostrar que la función $f(x,y)=xe^{xy}$ es diferenciable en el punto $(1,0)$. Encontrar su diferencial en dicho punto y calcular aproximadamente $f(1.1,-0.1)$.*

RESOLUCIÓN. Las parciales de f son:

$$f_x = e^{xy}+xye^{xy}, \quad f_y = x^2e^{xy}.$$

Estas funciones son continuas en $\mathbb{R}^2$, así que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. En el punto $(1,0)$ se tiene

$$f(1,0)=1, \quad f_x(1,0)=1, \quad f_y(1,0)=1;$$

en particular, la diferencial de f en $(1,0)$ es

$$[df(1,0)](x,y)=x+y.$$

El punto $(1,0)$ juega el papel de (x_0,y_0), mientras que $(1.1,-0.1)$ representa a (x_0+h,y_0+k), esto es, un punto cercano a $(1,0)$. En consecuencia $h=0.1$ y $k=-0.1$, de modo que la diferencial en $(1,0)$, evaluada en el punto $(0.1,-0.1)$, vale 0. Ahora, en virtud de (3.1),

$$f(1.1,-0.1)-1 \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad f(1.1,-0.1) \simeq 1.$$

El valor que proporciona la calculadora es, efectivamente, próximo a 1:

$$f(1.1,-0.1) = 1.1 \cdot e^{-0.11} = 0.98542.$$

□

Ejemplo 3.10. *Haciendo uso de la noción de diferencial de una función, hallar un valor aproximado de*

$$\frac{2.01^3}{0.999^2}.$$

RESOLUCIÓN. Consideremos la función $f(x,y)=x^3/y^2$. Queremos calcular, aproximadamente, $f(2.01,0.999)$ mediante la diferencial de f. Para ello tomamos como (x_0,y_0) el punto $(2,1)$, que es un punto próximo a $(2.01,0.999)$ donde se conoce el valor de la función, y hallamos la diferencial de f en dicho punto.

Se tiene:

$$f(2,1)=8, \quad [df(2,1)](x,y) = 12x-16y.$$

El punto $(2.01,0.999)$ jugará el papel de (x_0+h,y_0+k), que es el punto donde se pretende obtener el valor aproximado. Por tanto $h=0.01$ y $k=-0.001$, y (3.1) permite escribir

$$\frac{2.01^3}{0.999^2}-8 \simeq 12\cdot 0.01-16\cdot(-0.001),$$

o, lo que es equivalente,

$$\frac{2.01^3}{0.999^2} \simeq 8+0.12+0.016 = 8.136.$$

Hemos obtenido un valor cercano al proporcionado por la calculadora, que es 8.136886. □

En conclusión, la diferencial de una función permite aproximar los valores de dicha función en el entorno de un punto.

3.4. Derivadas parciales de orden superior

Dada una función $z = f(x,y)$ podemos calcular, en caso de existir, las derivadas parciales $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$. Éstas a su vez vuelven a ser funciones de las variables x e y, por lo que cabe plantearse el cálculo de las derivadas parciales de las funciones derivadas parciales. Así, para $f_x(x,y)$ podemos calcular su derivada parcial tanto respecto de x como respecto de y; y análogamente para $f_y(x,y)$. Estas cuatro nuevas derivadas se denominan *derivadas parciales de segundo orden*.

Definición 3.11. *La definición y notaciones comúnmente empleadas para las* derivadas parciales de segundo orden *son las siguientes:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f_{xx}(x,y).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{xy}(x,y).$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f_{yy}(x,y).$$

Definición 3.12. *Las derivadas parciales $f_{xy}(x,y)$ y $f_{yx}(x,y)$ se denominan también* derivadas parciales cruzadas *o* mixtas.

Teorema 3.13 (Schwarz)**.** *Si $f_{xy}(x,y)$ y $f_{yx}(x,y)$ existen y son continuas, entonces $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$.*

Observación 3.14. *Repitiendo el proceso anterior se obtienen las derivadas parciales de orden superior (tercero, cuarto, etc.).*

Ejemplo 3.15. *Hallar las derivadas parciales de segundo orden de la función $f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$, y evaluar $f_{xy}(-1,2)$.*

RESOLUCIÓN. Las derivadas parciales de primer orden en cualquier punto (x,y) vienen dadas por:

$$f_x(x,y) = 3y^2 + 10xy^2, \qquad f_y(x,y) = 6xy - 2 + 10x^2y.$$

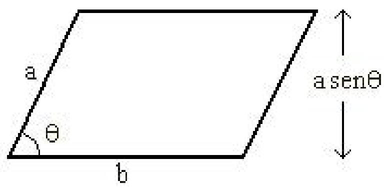

Figura 3.2. $A = A(a,b,\theta) = ab\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Luego, las derivadas de segundo orden serán:

$$f_{xx}(x,y) = 10y^2, \qquad f_{yy}(x,y) = 6x + 10x^2,$$
$$f_{xy}(x,y) = 6y + 20xy, \qquad f_{yx}(x,y) = 6y + 20xy.$$

Como cabría esperar $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$, puesto que ambas parciales cruzadas son continuas (al ser polinomios en x e y), y vale el Teorema 3.13. Además,

$$f_{xy}(-1,2) = 12 - 40 = -28.$$

□

Ejemplo 3.16. *El área de un paralelogramo de lados adyacentes a y b, con ángulo θ entre ellos, viene dada por $A = ab\,\mathrm{sen}\,\theta$.*

a) *Calcular la razón de cambio de A respecto de a para $a = 10,\ b = 20,\ \theta = \pi/6$.*

b) *Calcular la razón de cambio de A respecto de θ para $a = 10,\ b = 20,\ \theta = \pi/6$.*

RESOLUCIÓN. La función área puede ser considerada como una función de tres variables (Figura 3.2).

a) La razón de cambio de A respecto de a es:

$$A_a(a,b,\theta) = b\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Para $a = 10,\ b = 20,\ \theta = \pi/6$:

$$A_a(10,20,\pi/6) = 20\,\mathrm{sen}\,\pi/6 = 10.$$

b) La razón de cambio de A respecto de θ es:

$$A_\theta(a,b,\theta) = ab\cos\theta.$$

Para $a = 10,\ b = 20,\ \theta = \pi/6$:

$$A_\theta(10,20,\pi/6) = 200\cos\pi/6 = 200\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}.$$

□

4. Extremos de funciones de dos variables

Definición 4.1. *Sea $z = f(x,y)$ ($(x,y) \in D$) una función de dos variables, definida en una región cerrada (esto es, que contiene a sus bordes) y acotada D del plano. Los valores $f(a,b)$ y $f(c,d)$ tales que*

$$f(a,b) \leq f(x,y) \leq f(c,d) \quad ((a,b),(c,d) \in D)$$

cualquiera que sea $(x,y) \in D$ se denominan mínimo y máximo absolutos *de f en D.*

Teorema 4.2. *Si f es continua en una región cerrada y acotada D, entonces f alcanza sus extremos (máximo y mínimo) absolutos en, al menos, sendos puntos de D.*

Definición 4.3. *Se dice que f tiene un* mínimo relativo *(respectivamente,* máximo relativo*) en $(x_0,y_0) \in D$, si*

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \quad (\text{respectivamente, } f(x,y) \leq f(x_0,y_0))$$

para todo (x,y) en un disco abierto centrado en (x_0,y_0).

Para investigar los extremos relativos de f hay que determinar sus *puntos críticos*, que son aquellos $(x_0,y_0) \in D$ tales que:

- al menos una de las parciales $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ no existe, o bien
- ambas parciales existen, y $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$.

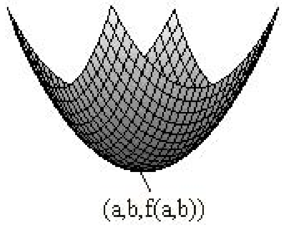

Figura 4.1. Mínimo relativo.

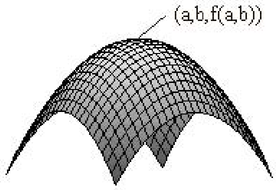

Figura 4.2. Máximo relativo.

La naturaleza de un punto crítico se discute recurriendo al *determinante hessiano* de f, constituido por las derivadas parciales de segundo orden:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx}.$$

Supongamos que $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$. Entonces:

1. Si $H(a,b) > 0$ y
   - $f_{xx}(a,b) > 0$, entonces f tiene un *mínimo relativo* en $(a,b,f(a,b))$ (Figura 4.1).
   - $f_{xx}(a,b) < 0$, entonces f tiene un *máximo relativo* en $(a,b,f(a,b))$ (Figura 4.2).
2. Si $H(a,b) < 0$, entonces f tiene un *punto de silla* en $(a,b,f(a,b))$ (Figura 4.3).
3. Si $H(a,b) = 0$, el criterio no es concluyente.

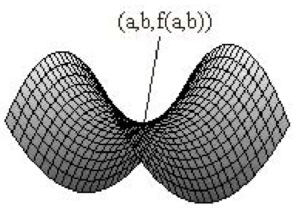

Figura 4.3. Punto de silla.

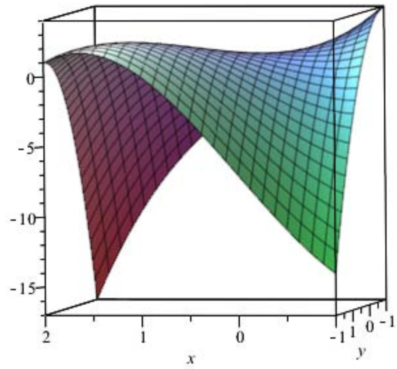

Figura 4.4. Gráfica de la función estudiada en el Ejemplo 4.4.

Ejemplo 4.4. *Identificar los extremos relativos de* $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

RESOLUCIÓN. En primer lugar, para obtener los puntos críticos de $f(x,y)$ resolvemos el sistema que resulta de igualar a cero las derivadas primeras:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -3x^2 + 4y = 0 \\ f_y(x,y) = 4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4y = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x(3x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Luego, $(0,0)$ y $(4/3, 4/3)$ son puntos críticos de f. Se puede ver una representación gráfica de f en la Figura 4.4.

Para estudiar la naturaleza de los puntos críticos formamos, en primer lugar, la matriz hessiana. Como

$$f_{xx}(x,y) = -6x, \qquad f_{yy}(x,y) = -4,$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4,$$

tenemos:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 24x - 16.$$

Así pues:

1. $H(0,0) = -16 < 0$, por lo que $(0,0,f(0,0)) = (0,0,1)$ es un punto de silla. La Figura 4.5 muestra una representación gráfica de la función cerca del punto de silla.

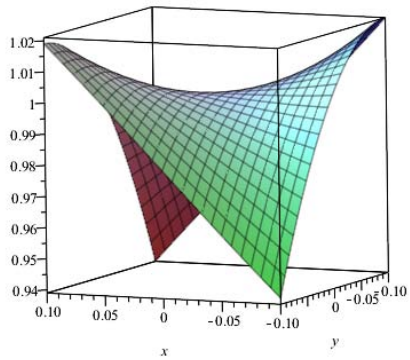

Figura 4.5. Ejemplo 4.4: punto de silla.

2. $H(4/3,4/3) = 16 > 0$ y $f_{xx}(4/3,4/3) = -24/3 < 0$, por lo que

$$(4/3,4/3,f(4/3,4/3)) = (4/3,4/3,59/27)$$

es un máximo relativo. La Figura 4.6 muestra la gráfica de la superficie cerca del máximo local.

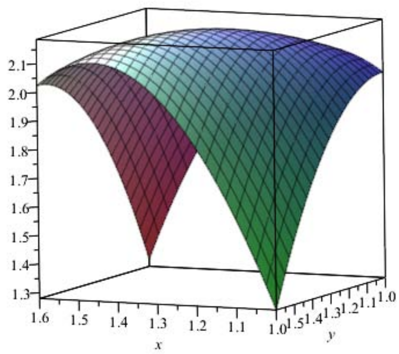

Figura 4.6. Ejemplo 4.4: máximo relativo.

□

Ejemplo 4.5. *Identificar los extremos relativos de* $f(x,y) = x^2y^2$.

RESOLUCIÓN. Los puntos críticos de $f(x,y)$ son solución del sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy^2 = 0 \\ f_y(x,y) = 2x^2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{ó} \quad y = 0.$$

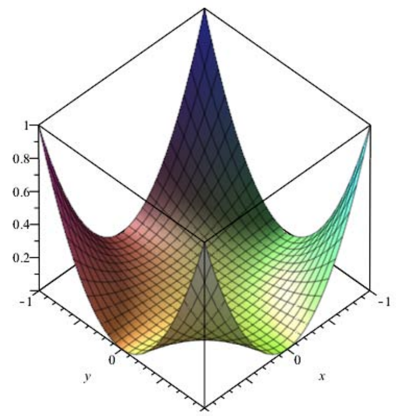

Figura 4.7. Superficie estudiada en el Ejemplo 4.5.

Luego, los puntos críticos son de la forma $(0,a)$ y $(b,0)$, con $a,b \in \mathbb{R}$.

Construimos el hessiano:

$$f_{xx}(x,y) = 2y^2, \qquad f_{yy}(x,y) = 2x^2,$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4xy.$$

Así pues,

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -12x^2y^2.$$

Como $H(0,a) = H(b,0) = 0$ cualesquiera sean $a,b \in \mathbb{R}$, estamos frente a un caso dudoso. Ahora bien:

$$x^2y^2 = f(x,y) \geq f(0,a) = f(b,0) = 0 \quad (x,y,a,b \in \mathbb{R});$$

por tanto, todos los puntos críticos son mínimos absolutos de la función dada.

Se puede ver la gráfica de la superficie en la Figura 4.7. □

Ejemplo 4.6. *Hallar los extremos relativos y absolutos de la función* $f(x,y) = \operatorname{sen} xy$ *en la región cerrada determinada por* $0 \leq x \leq \pi$ *y* $0 \leq y \leq 1$.

RESOLUCIÓN. Determinemos los puntos críticos de $f(x,y)$:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y\cos xy = 0 \quad \Rightarrow & \begin{cases} y = 0 \\ \cos xy = 0 \ \Rightarrow \ xy = \dfrac{\pi}{2} \quad (\text{ya que } xy \in [0,\pi]) \end{cases} \\ f_y(x,y) = x\cos xy = 0 \quad \Rightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ \cos xy = 0 \ \Rightarrow \ xy = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto, los puntos críticos son todos los de la hipérbola $xy = \pi/2$ y el punto $(0,0)$.

Como la función $f(x,y)$ satisface que $-1 \leq f(x,y) \leq 1$, si (x,y) está en la hipérbola $xy = \pi/2$, necesariamente $f(x,y) = \operatorname{sen}\pi/2 = 1$. Por tanto, estos puntos corresponden a máximos absolutos de f en la región considerada.

Para analizar la naturaleza del punto (0,0) formamos el determinante hessiano. Las derivadas parciales de segundo orden son:

$$f_{xx}(x,y) = -y^2 \operatorname{sen} xy, \qquad f_{yy}(x,y) = -x^2 \operatorname{sen} xy,$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \cos xy - xy \operatorname{sen} xy.$$

Por tanto,

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -y^2 \operatorname{sen} xy & \cos xy - xy \operatorname{sen} xy \\ \cos xy - xy \operatorname{sen} xy & -x^2 \operatorname{sen} xy \end{vmatrix}.$$

Ahora

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

y en consecuencia $(0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$ es un punto de silla. No obstante, como $0 \leq xy \leq \pi$ se tiene $0 \leq \operatorname{sen} xy \leq 1$, por lo que, en el recinto considerado, el punto $(0,0)$ proporciona un mínimo absoluto.

Para detectar otros posibles extremos absolutos hemos de analizar los puntos frontera:

- Si $0 \leq x \leq \pi,\ y = 0$ entonces $f(x,0) = 0$ y, por tanto, en $(x,0)$ la función toma un mínimo absoluto.
- Si $0 \leq x \leq \pi,\ y = 1$ entonces $f(x,1) = \operatorname{sen} x$, que toma mínimos absolutos en $x = 0,\ x = \pi$ y máximo absoluto en $x = \pi/2$. Por tanto, $(0,1)$ y $(\pi,1)$ son mínimos absolutos, mientras que $(\pi/2,1)$ es un máximo absoluto de $f(x,y)$ en el recinto considerado.
- Si $x = 0,\ 0 \leq y \leq 1$ entonces $f(0,y) = 0$ y, por tanto, en $(0,y)$ la función toma un mínimo absoluto.

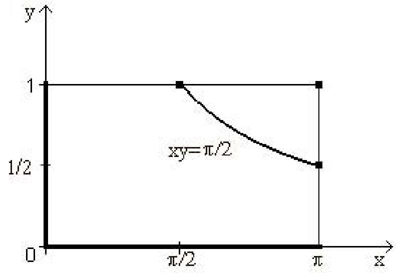

Figura 4.8. Puntos críticos de la superficie estudiada en el Ejemplo 4.6.

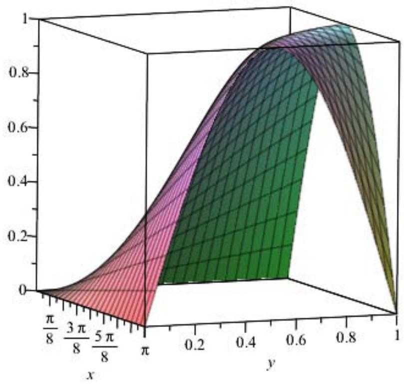

Figura 4.9. Superficie estudiada en el Ejemplo 4.6.

- Si $x=\pi,\ 0\leq y\leq 1$ entonces $f(\pi,y)=\operatorname{sen}\pi y$, que toma mínimos absolutos en $y=0,\ y=1$ y máximo absoluto en $y=1/2$. Por tanto $(\pi,0)$ y $(\pi,1)$ son mí nimos absolutos, mientras que $(\pi,1/2)$ es un máximo absoluto.

La Figura 4.6 proporciona una representación gráfica de los puntos críticos en el plano OXY.

En conclusión:

$$\begin{array}{llll}
xy=\pi/2 & \Rightarrow & \text{máximo absoluto.} & \\
0\leq x\leq\pi,\ y=0 & \Rightarrow & f(x,0)=0 & \Rightarrow\ (x,0)\ \text{mínimo absoluto.}\\
x=0,\ 0\leq y\leq 1 & \Rightarrow & f(0,y)=0 & \Rightarrow\ (0,y)\ \text{mínimo absoluto.}\\
x=\pi,\ y=1 & \Rightarrow & f(\pi,1)=0 & \Rightarrow\ (\pi,1)\ \text{mínimo absoluto.}\\
x=\pi/2,\ y=1 & \Rightarrow & f(\pi/2,1)=1 & \Rightarrow\ (\pi/2,1)\ \text{máximo absoluto.}\\
x=\pi,\ y=1/2 & \Rightarrow & f(\pi,1/2)=1 & \Rightarrow\ (\pi,1/2)\ \text{máximo absoluto.}
\end{array}$$

El grafo de $f(x,y)$ en el recinto considerado se puede ver en la Figura 4.9. □