REDES NEURONALES

2021

Clase 10 Parte 1

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

Jueves 16 de septiembre 2021

http://www.famaf.unc.edu.ar/~ftamarit/redes2021

https://www.famaf.unc.edu.ar/course/view.php?id=798

Existencia, unicidad y consecuencias

Teorema de existencia y unicidad

Consideremos el problema de valor inicial

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad , \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

Supongamos que las componentes de $\bar{f}$:

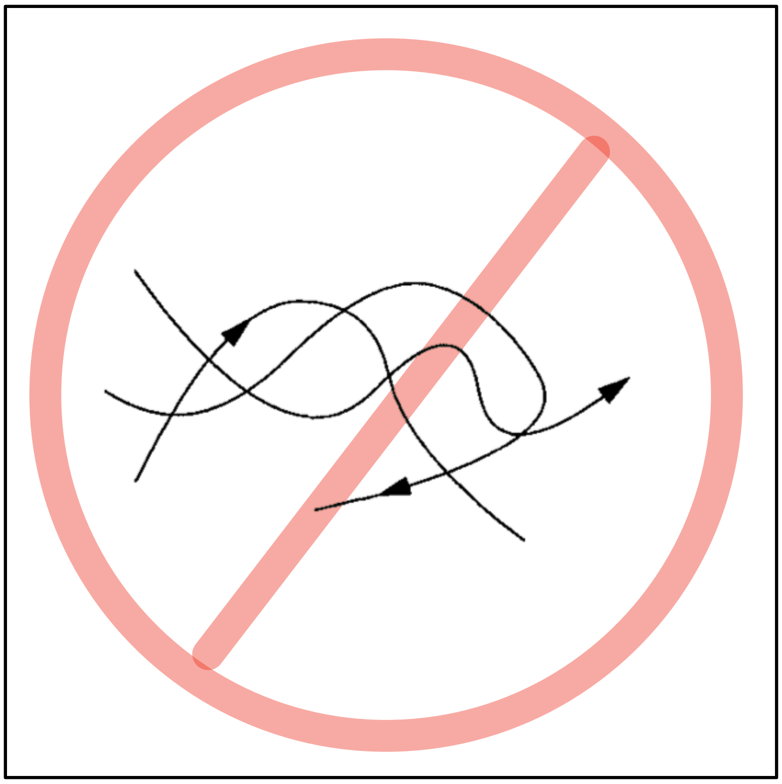
$$\bar{f} = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_N(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

$i = 1, \ldots, N$

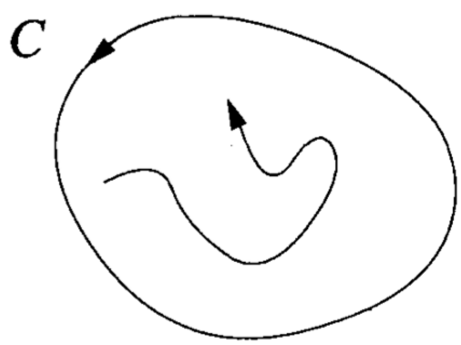
son tales que las N funciones $f_i(\bar{x})$ y las $N \times N$ derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ son continuas para cierto conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^2$

Entonces para $\bar{x}_0 \in D$, el problema de valor inicial tiene una solución $\bar{x}(t)$ en cierto intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ alrededor de $t = 0$ y la solución es única.

En pocas palabras, 2 soluciones diferentes (diferentes trayectorias) nunca se cruzan. Si pueden converger a un punto fijo, pero sin cruzarse.



Si tenemos una órbita cerrada, nos delimita el interior del exterior

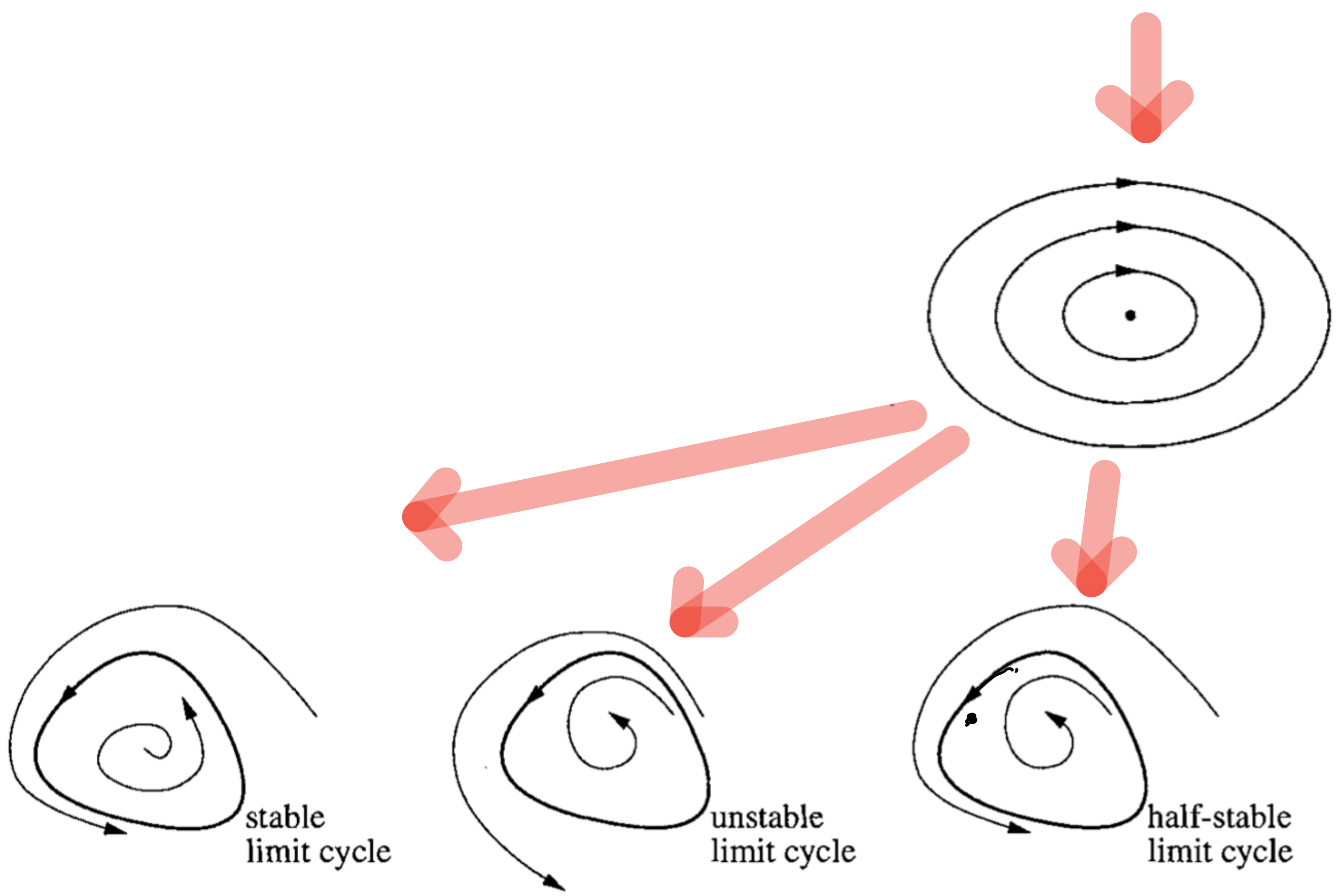


¿Qué pasa con un centro ($Re(\lambda)=0$) cuando nos alejamos del límite de validez lineal?

Los centros se transforman

Casos robustos versus Casos marginales

$Re(\lambda) \neq 0$ $Re(\lambda) = 0$

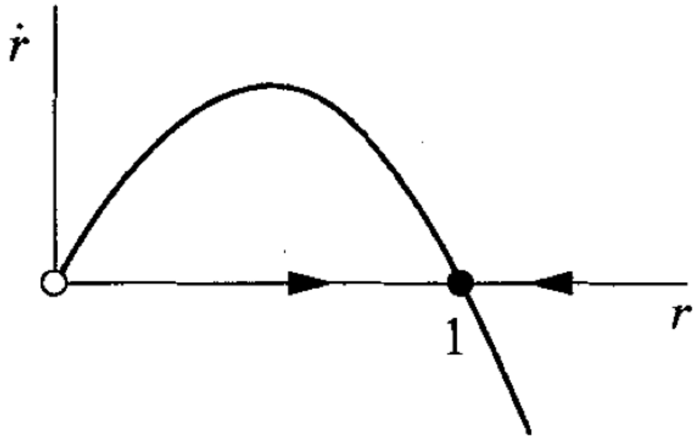


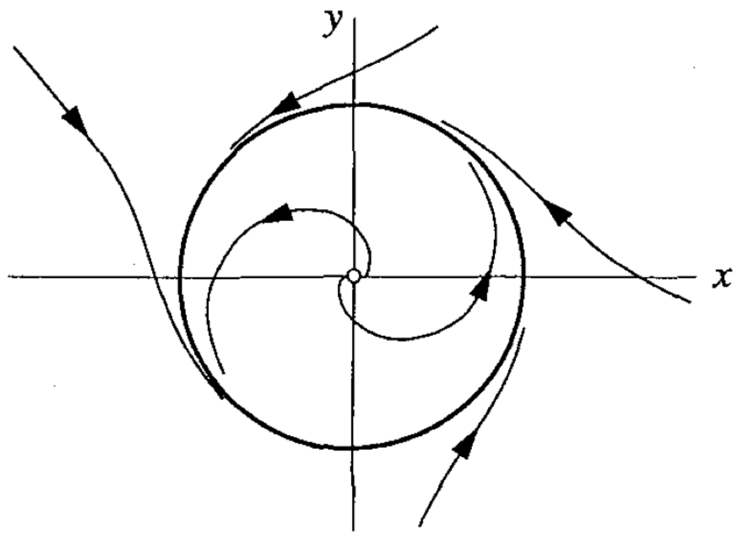
Los centros se convierten (no siempre) en ciclos límite

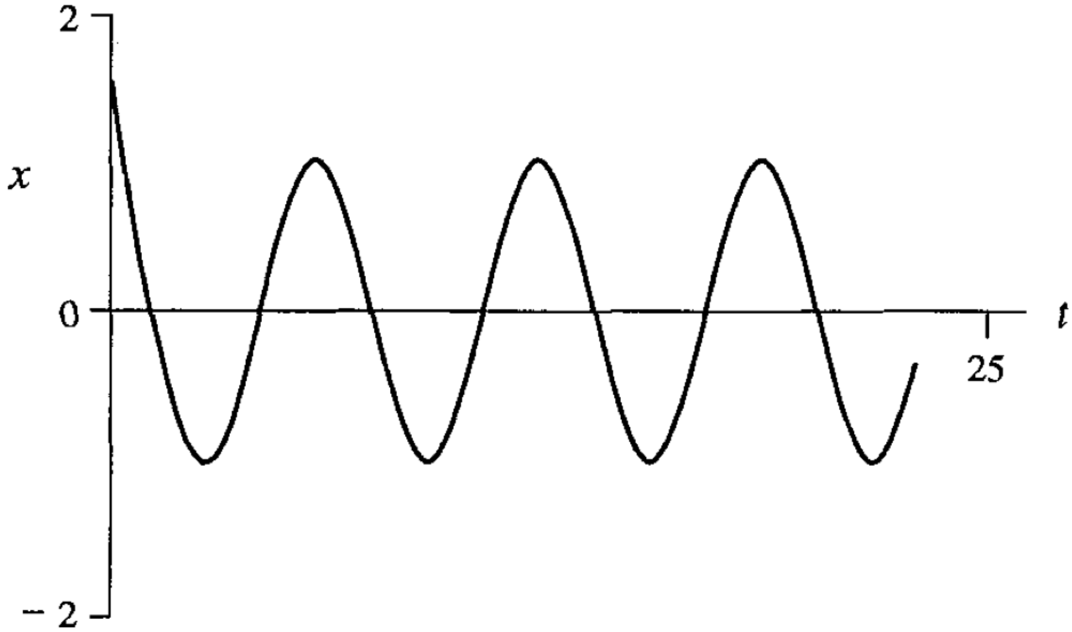
EJEMPLO

$\dot{r} = r(1-r) \qquad (r>0)$

$\dot{\theta} = 1$

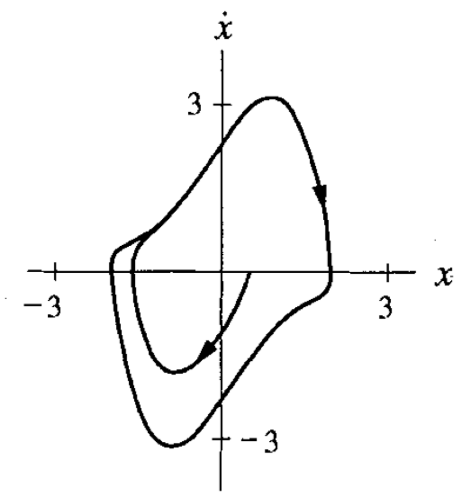


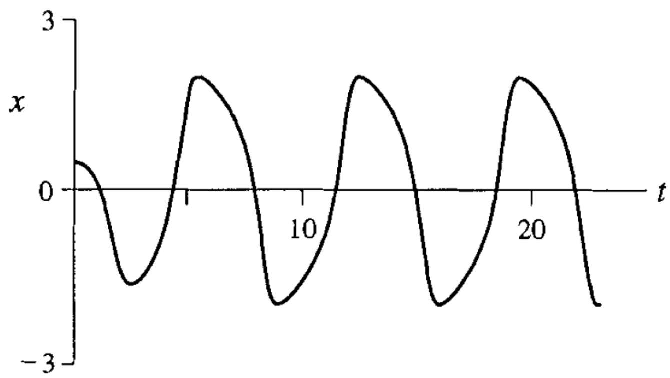




VAN DER POL OSCILLATOR

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$





SISTEMAS CONSERVATIVOS

Consideremos la ecuación de Newton

$$m\ddot{x} = F(x) \quad \text{(no aparece ni } t \text{ ni } \dot{x}\text{)}$$

y supongamos que la fuerza se obtiene como el gradiente de una función potencial

$$\frac{dV}{dx} = -F(x)$$

Con esta información reescribamos la ecuación de Newton en términos del potencial y no de la fuerza:

$$m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = 0$$

Hagamos unas simples cuentas:

$$\dot{x}\left[m\ddot{x} + \frac{dV}{dx}\right] = 0\,\dot{x} = 0$$

$$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dV}{dx} = 0$$

Pero:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}^2\right) = \frac{1}{2}m\,2\,\dot{x}\ddot{x} = m\dot{x}\ddot{x}$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx}\,\dot{x}$$

De esta forma

$$m\,\dot{x}\,\ddot{x} + \dot{x}\,\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m\,\dot{x}^2\right) + \frac{d}{dt}V(x)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + V(x)\right]$$

$$= 0$$

Esto nos dice que la cantidad

$$E = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + V(x)$$

no cambia en el tiempo (es conservada)

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Un sistema físico de este tipo se denomina

SISTEMA CONSERVATIVO

Generalizando:

Dado un sistema $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$, una CANTIDAD CONSERVADA es una función real que es constante a lo largo de las trayectorias.

$$F(x) = -\nabla V(x)$$

Un sistema conservativo no admite puntos fijos atractivos

Ejemplo

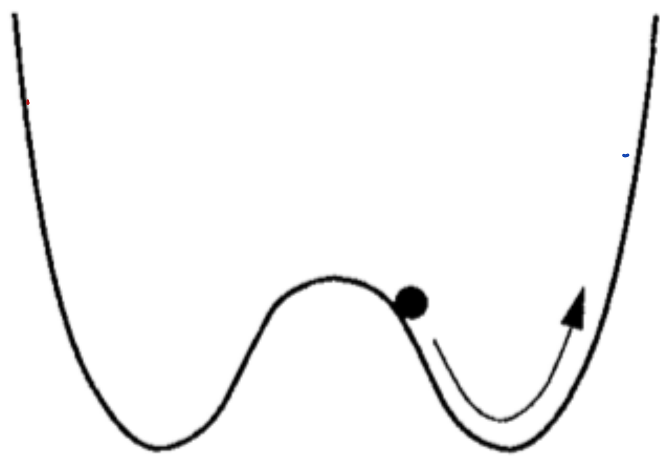
$$\ddot{x} = x - x^3 \qquad m = 1$$

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x - x^3 = F(x)$$

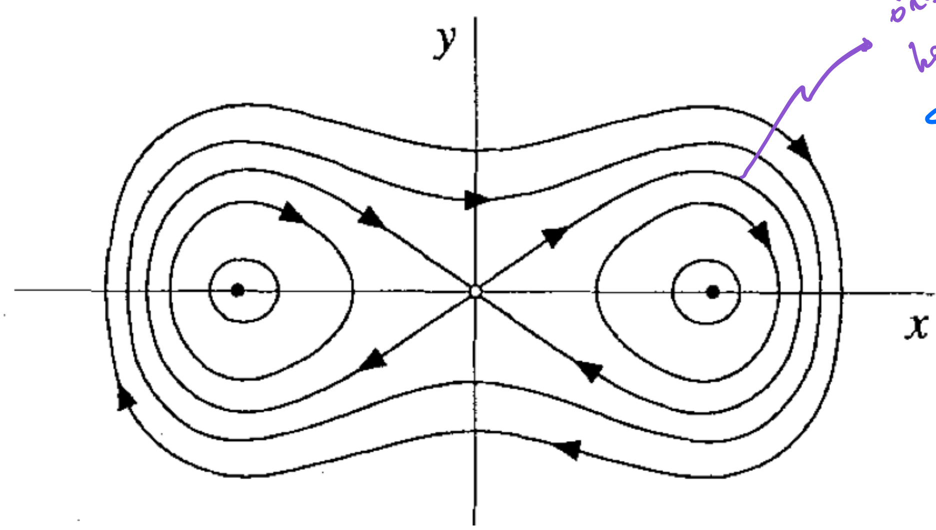
$(0,0)$ $(1,0)$ $(-1,0)$

$$F(x) = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x^4\right) = -\frac{dV}{dx}$$

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x^4$$

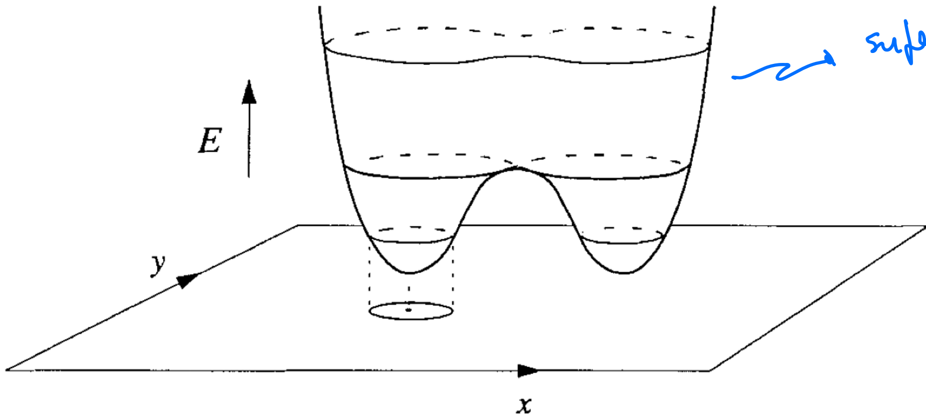


oscilación no amortiguada



órbita homoclínica

demora infinito tiempo



superficie de energía

Teorema: Consideremos un sistema $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ con $\bar{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Si $\bar{f}$ es continua y diferenciable y existe una cantidad conservada $E(x)$, y existe un punto fijo $\bar{x}^*$ aislado, y es mínimo de $E(x)$, entonces alrededor de $\bar{x}^*$ hay trayectorias cerradas.

Centros no lineales

Ya entendimos porque las trayectorias espirales, tanto estables como inestables, son robustas, y porque los centros son FRÁGILES. Cuando linealizamos, evaluamos en el punto fijo y sacamos los autovalores, si hay oscilaciones, los autovalores son complejos conjugados

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - 4\Delta}$$

Para que tengamos un centro τ debe ser nulo

centro: $\frac{\tau}{2} = 0$ $\qquad \lambda_{1,2} = \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\Delta} = \pm i\sqrt{\Delta}$

Pero $\tau = \lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ (recuerde que la traza no cambia cuando cambio de sistema de coordenadas), y a y d se determinan fenomenológicamente, por lo tanto HAY ERROR.

Y con eso nos saca del caso lineal y nos tenemos que preguntar: ¿qué pasa con estas órbitas tan frágiles cuando el análisis lineal deja de valer? Por suerte la matemática nos auxilia

Teorema

CENTROS NO LINEALES PARA SISTEMAS CONSERVATIVOS

Consideramos un sistema

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

donde $\bar{x} = (x_1, x_2)$ pertenece a $\mathbb{R}^2$ y f_1 y f_2 son continuamente diferenciables.

Supongo que existe una cantidad $E(\bar{x})$ y supongamos que $\bar{x}^*$ es un punto fijo AISLADO.

Entonces, si $\vec{x}^*$ es un mínimo local de E, entonces todas las trayectorias suficientemente cerca de $\vec{x}^*$ serán CERRADAS.

NOTA: lo mismo vale si $\bar{x}^*$ es máximo de E