REDES NEURONALES

2021

Clase 10 Parte 2

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

Jueves 16 de septiembre 2021

http://www.famaf.unc.edu.ar/~ftamarit/redes2021

https://www.famaf.unc.edu.ar/course/view.php?id=798

Sistemas reversibles

Un sistema es reversible si es simétrico ante la transformación $t \to -t$

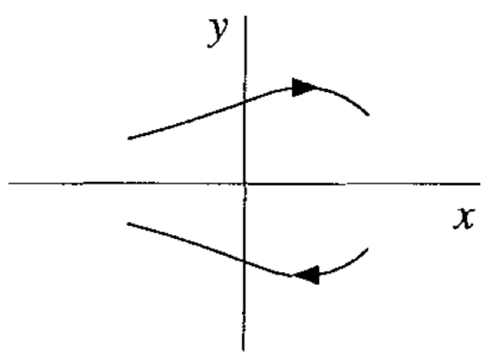
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = \frac{1}{m} F(x)$$

¿Qué pasa si invertimos el tiempo y las velocidades?

$$x(t) \longrightarrow x(-t)$$
$$y(t) \longrightarrow y(-t)$$

$$\dot{x}(-t) = y(-t)$$
$$\dot{y}(-t) = \frac{1}{m} F(x(-t))$$

Si $(x(t), y(t))$ es solución, también lo es $(x(-t), y(-t))$



Para que esto pase

$$\dot{x} = f(x,y)$$

$$\dot{y} = g(x,y)$$

f impar en y : $f(x,-y) = -f(x,y)$

g par en y : $g(x,-y) = g(x,y)$

Teorema : Sea

$$\dot{x} = f(x,y)$$
$$\dot{y} = g(x,y)$$

un sistema de EDO reversible y no lineal, con f y g continuamente diferenciables.
Sea $\bar{x}^* = \bar{0}$ un punto fijo centro LINEAL.
(autovalores imaginarios puros).
Entonces, suficientemente cerca del origen todas las trayectorias son órbitas cerradas.

EJEMPLO

$$\dot{x} = y - y^3 \qquad -\dot{x} = -y + \dot{y}^3 \qquad \dot{x} = y - y^3$$
$$\dot{y} = -x - y^2 \qquad \dot{y} = -x - y^2 \qquad \dot{y} = -x - y^2$$

ES REVERSIBLE

Este sistema tiene 3 puntos fijos

$$\bar{x}_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_2^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_3^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión analítica del jacobiano

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial (y-y^3)}{\partial x} & \frac{\partial (y-y^3)}{\partial y} \\ \frac{\partial (-x-y^2)}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}(-x-y^2) \end{bmatrix}_{\bar{x}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1-3y^{*2} \\ -1 & -2y^* \end{bmatrix}_{\bar{x}^*}$$

Evaluamos en $\bar{x}_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{traza}(a + d) = 0$

$\det(A) = (ad - bc) = 0 - (-1) = 1 > 0$

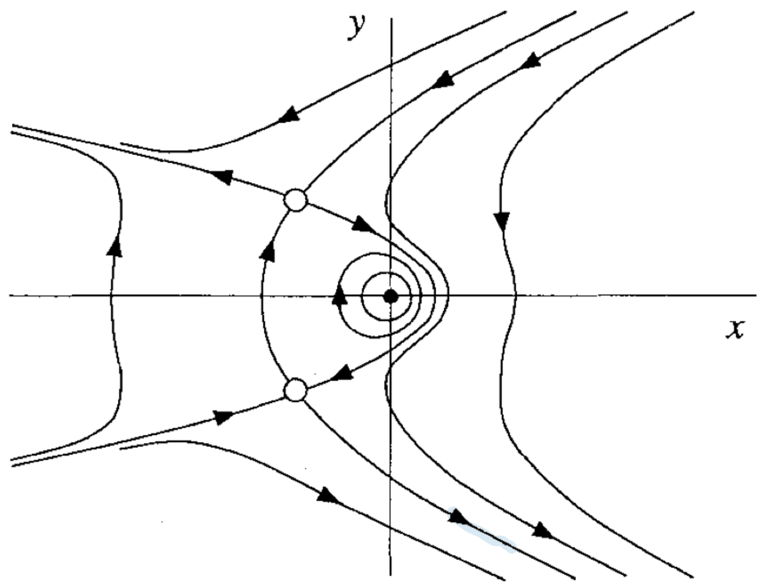
$$\lambda_1 = \frac{0 + \sqrt{-4\Delta}}{2} = \frac{i\,2\sqrt{\Delta}}{2} = i$$

$$\lambda_1 = \frac{0 + \sqrt{-4\Delta}}{2} = -\frac{i\,2\sqrt{\Delta}}{2} = -i$$

Tenemos un centro en el origen

los otros dos puntos son saddle-nodes

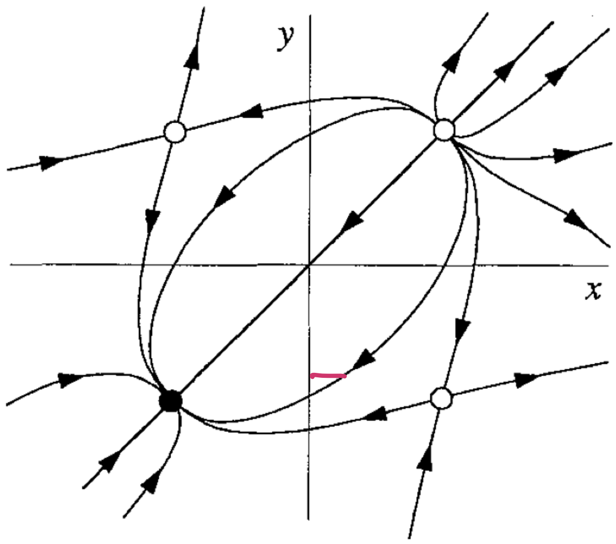
trayectoria heteroclínica



Por ser reversible hay soluciones cerradas cerca del origen

NOTA : podemos tener sistemas NO CONSERVATIVOS pero REVERSIBLES

$$\dot{x} = -2\cos x - \cos y$$
$$\dot{y} = -2\cos y - \cos x$$



SISTEMAS GRADIENTE

Si un sistema puede escribirse como

$$\dot{\bar{x}} = -\nabla V(\bar{x})$$

para cierto $V(\bar{x})$ continuamente diferenciable, se denomina SISTEMA GRADIENTE.

Teorema: los sistemas gradientes no tienen órbitas cerradas.

$$\Delta V = \int_0^T \frac{dV}{dt}\, dt = \int_0^T (\nabla \bar{V} \cdot \dot{\bar{x}})\, dt$$

$$\frac{dV}{dt} = \nabla \bar{V} \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} = \nabla \bar{V} \cdot \dot{\bar{x}}$$

$$\Delta V = -\int_0^T (\dot{\bar{x}} \cdot \dot{\bar{x}})\, dt$$

$$= -\int_0^T \|\dot{x}\|^2\, dt \quad < 0$$

FUNCIÓN DE LIAPUNOV

Consideremos $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ y $\bar{x}^*$ punto fijo.

Supongamos que podemos encontrar una función univaluada real y continuamente diferenciable tal que

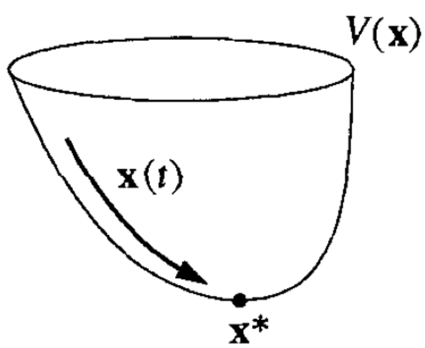
1. $V(\bar{x}) > 0 \quad \forall\, \bar{x} \neq \bar{x}^*$ y $V(\bar{x}^*) = 0$

   (definida positiva)

2. $\dot{V} = \dfrac{dV}{dt} < 0 \quad \forall\, \bar{x} \neq \bar{x}^*$

entonces $\bar{x}^*$ es globalmente estable, o sea, para todas las condiciones iniciales

$$\bar{x}(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \bar{x}^*$$



CRITERIO DE DULAC

Si $\bar{f}(\bar{x})$ es continuamente diferenciable real sobre un subconjunto R simplemente conectado en el plano y existe $g(x)$ continuamente diferenciable tal que

$$\nabla \cdot (g\bar{x})$$

tiene el mismo signo en todo R, entonces no existen órbitas cerradas en R.

TEOREMA: Si $\dot{x} = -\nabla V(\bar{x})$, las órbitas cerradas son imposibles.

$$\Delta V = \int_0^T \frac{dV}{dt}\, dt = \int_0^T (\nabla V \cdot \dot{x})\, dt$$

$$= -\int_0^T \| \dot{x} \|^2 dt < 0$$

Teorema Poincaré - Bendixson

Supongamos que

1) R es un subconjunto R cerrado del plano

2) $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ con $\bar{f}$ continuamente diferenciable

3) R no tiene punto fijo

4) $\exists$ una trayectoria cerrada en R

Entonces $\exists$ una órbita cerrada (no hay caos)