

REDES NEURONALES

2021

Clase 3 Parte 1

**Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba**

<http://www.famaf.unc.edu.ar/~ftamarit/redes2021>

<https://www.famaf.unc.edu.ar/course/view.php?id=798>

REPASO

Queremos resolver un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de la forma:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

Minemos un ejemplo de sistema físico no autónomo

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(1-x(t)) + F \cos(t)$$

Hacemos:

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = t$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)(1-x_1(t)) + F \cos(x_2(t))$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 1$$

O sea, si tenemos 1 EDO no autónoma, agregamos una variable más $x_2(t) = t$ y referenciamos un sistema autónomo de 2 EDO.

Supongamos que tenemos 1 EDO de segundo orden

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -k x(t)$$

Ahora hacemos un truco parecido:

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{k}{m}x_1(t)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

Si es de tercer orden

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} = -X(t) + \gamma \frac{dx(t)}{dt}$$

$$X_1(t) = X(t)$$

$$X_2(t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

$$X_3(t) = \frac{d^2X(t)}{dt^2}$$

y obtenemos

$$\frac{dX_3(t)}{dt} = -X_1(t) + \gamma X_2(t)$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = X_3(t)$$

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = X_2(t)$$

El **orden** de una EDO o de un sistema de EDO es el orden de la derivada de mayor orden que aparece. En general, si tenemos una EDO de orden n tenemos

$$\frac{d^n X(t)}{dt^n} = f\left(\frac{d^{n-1}X(t)}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dX(t)}{dt}, X(t), t\right)$$

y se puede convertir en un sistema de $(n+1)$ ecuaciones de orden 1 y autónomas

Por este razón nos enfocaremos solamente
de sistemas de EDO de orden 1 y
AUTÓNOMAS

CUESTIONES DE NOTACIÓN

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}$$

omitiremos denotar
las dependencias en
 t , pero están
¡~~gg~~!

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) \rightarrow \dot{x} = f(x, t)$$

↓
notación
simplificada

SOBRE NUESTRO INTERÉS

NO queremos encontrar soluciones analíticas ante un sistema de EDO.

Nos interesa en cambio saber donde estará el sistema cuando $t \rightarrow \infty$, y conocer la naturaleza dinámica del atractor.

Si tenemos 1 EDO, $\dot{x} = f(x)$, el lado derecho $f(x)$ nos da mucha información que aprenderemos a usar.

Si la función f es lineal, el problema es mucho más simple y el álgebra lineal nos ayuda para conocer las soluciones sin mayores complicaciones.

Pero en las ciencias naturales, sociales y de la vida, los problemas están representados por funciones $f(x)$ no lineales.

Un fenómeno dinámico es lineal si las funciones que describen los regímenes de cambio son o la suma polinómica de grado 1

Ejemplos

$$\dot{x} = -k x$$

$$\dot{x} = \pi$$

Cualquier otra función es NO LINEAL

La **DIMENSIÓN** del sistema dinámico no se refiere a la dimensión espacial en la cual uno describe el fenómeno (usualmente 3D), sino a la dimensión del espacio en el cual debo representar el problema, o sea, el número de variables dinámicas.

Por ejemplo, si para describir una neurona uso 27 variables, la neurona, desde el punto de vista dinámico vive en $\mathbb{R}^{27}$ (dimensión 27)

ACLARACIÓN

Muchas veces la función incógnita depende del tiempo t y de otras variables independientes, como por ejemplo, la posición $\vec{r} = (x, y, z)$. Así ni x , ni y , ni z dependen de t .

En este caso la ecuación viene dada con una función de muchas variables como incógnita $g(x, y, z, t)$ y describe la relación entre diferentes razones de cambio parciales (derivadas parciales).

EJEMPLO

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

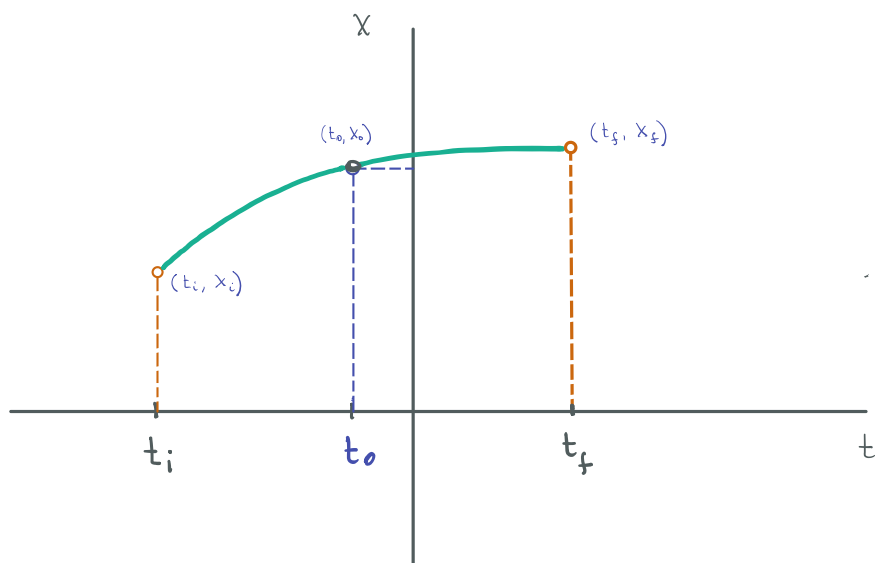
Este es una ECUACIÓN A DERIVADAS PARCIALES (no de derivadas ordinarias).

¡¡ EN ESTE CURSO NO VEREMOS Ecuac. Deriv. Parciales !!

Nos interesa **MUCHO** como la
NO LINEALIDAD y la dimensión
del problema afectan la
naturaleza del comportamiento
de un sistema dinámico
para tiempos muy largos ($t \rightarrow \infty$)

Si lo que buscan son trayectorias particulares
que describen el cambio $x(t)$ deben aplicar
o métodos numéricos (por ejemplo, el
método de Runge Kutta de 4^{to} orden)
para resolver un problema más simple y
acotado llamado **PROBLEMA DE VALOR INICIAL**

Dado la EDO $\dot{x} = f(x)$, el problema de valor
inicial consiste en encontrar o aproximar la
trayectoria que vale x_0 en t_0 ($x(t_0) = x_0$) en
cierto intervalo de tiempo que incluye t_0 .



UN POCO DE HISTORIA

Dynamics - A Capsule History

1666	Newton	Invention of calculus, explanation of planetary motion
1700s		Flourishing of calculus and classical mechanics
1800s		Analytical studies of planetary motion
1890s	Poincaré	Geometric approach, nightmares of chaos
1920–1950		Nonlinear oscillators in physics and engineering, invention of radio, radar, laser
1920–1960	Birkhoff Kolmogorov Arnol'd Moser	Complex behavior in Hamiltonian mechanics
1963	Lorenz	Strange attractor in simple model of convection
1970s	Ruelle & Takens	Turbulence and chaos
	May	Chaos in logistic map
	Feigenbaum	Universality and renormalization, connection between chaos and phase transitions
		Experimental studies of chaos
	Winfrey	Nonlinear oscillators in biology
	Mandelbrot	Fractals
1980s		Widespread interest in chaos, fractals, oscillators, and their applications

ÚLTIMA ACLARACIÓN DE ESTA PARTE

Un sistema dinámico se define formalmente como un espacio de los estados X , un conjunto de tiempos T y una regla f que especifique como el espacio de los estados X evoluciona en el tiempo. La regla f es una función cuyo dominio es $X \times T$ y cuya imagen es X , o sea,

$$f : X \times T \rightarrow X$$

O sea, f toma los estados, $f(x, t)$, siendo que $x \in X$.

Una forma alternativa de ver un sistema dinámico es pensarlo como una regla que define cómo el estado de un sistema cambia en el tiempo. Formalmente, es la acción de los reales (si el sistema es continuo) o los enteros (si el sistema es discreto) sobre una variedad (un espacio topológico que puede representarse por un espacio euclídeo localmente en la vecindad de cada uno de sus puntos).

EJEMPLOS

$$m \ddot{x} = -b \dot{x} - kx$$

$$\dot{x} = -\frac{b}{m} \dot{x} - \frac{k}{m} x$$

$$x_1 = x$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{b}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1$$

Si $b = 0$ oscilador armónico

Si $b \neq 0$ oscilador amortiguado

