REDES NEURONALES

2021

Clase 4 Parte 1

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

Jueves 26 de agosto 2021

http://www.famaf.unc.edu.ar/~ftamarit/redes2021

https://www.famaf.unc.edu.ar/course/view.php?id=798

SISTEMAS DINÁMICOS UNIDIMENSIONALES

Flujo en la línea. Parte II

REPASO CLASE ANTERIOR

Estamos analizando el caso unidimensional, o sea, una única ecuación diferencial ordinaria (EDO) autónoma

$$\dot{x} = f(x)$$

ACLARACIONES

- $\dot{x} \equiv \dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv x'(t)$ (notación)

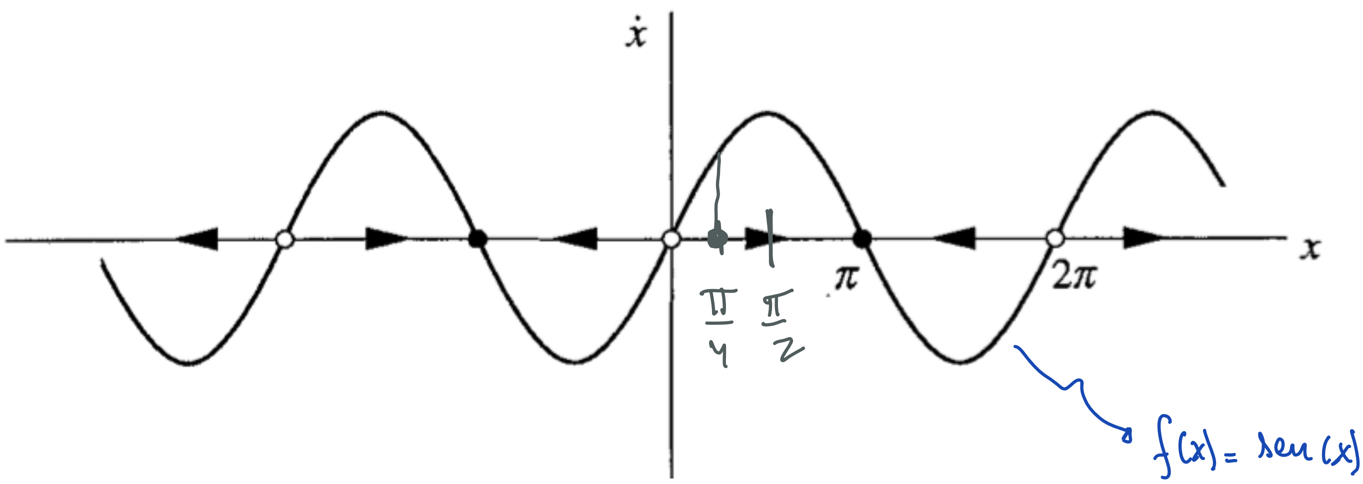
- es autónomo porque no aparece el tiempo t explícitamente

- no aspiramos a encontrar la solución, que es una función $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface que su razón de cambio viene dada por $f(x(t))$. Solo queremos saber

$$\lim_{t \to \infty} x(t)$$

Consideramos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \text{sen}(x) \quad (\text{ejemplo})$$



$$\dot{x} = \text{sen}(x)$$

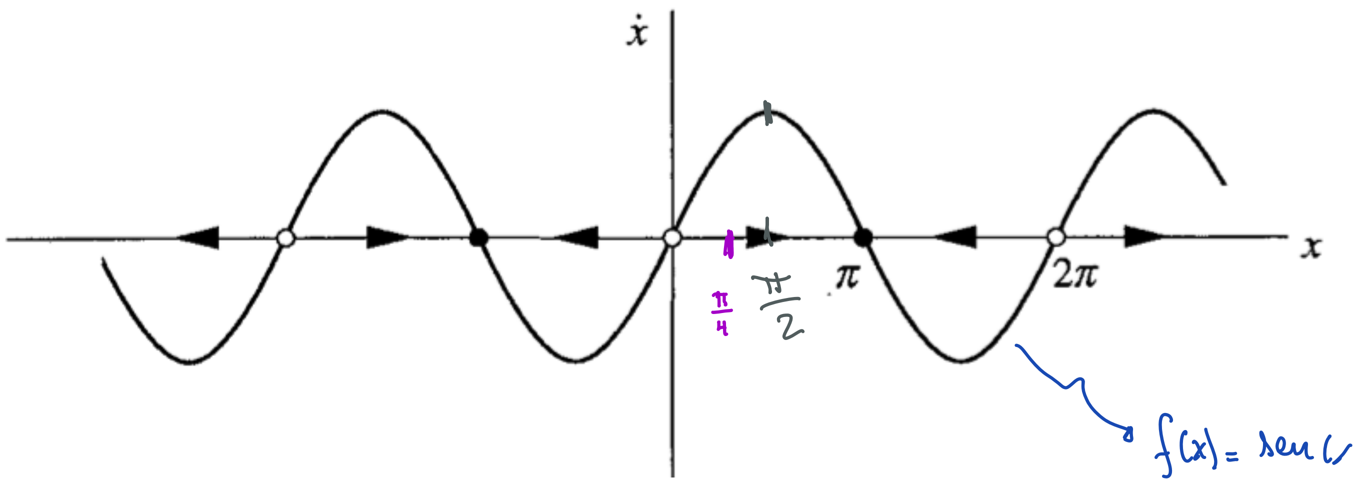
Si $f(x^*)=0$, decimos que x^* es un PUNTO FIJO del sistema $\dot{x}=f(x)$.

En el gráfico vemos que hay puntos que atraen a ciertas porciones del dominio de f, y son puntos fijos ATRACTORES o ESTABLES. Se lo representa con círculos llenos en el gráfico.

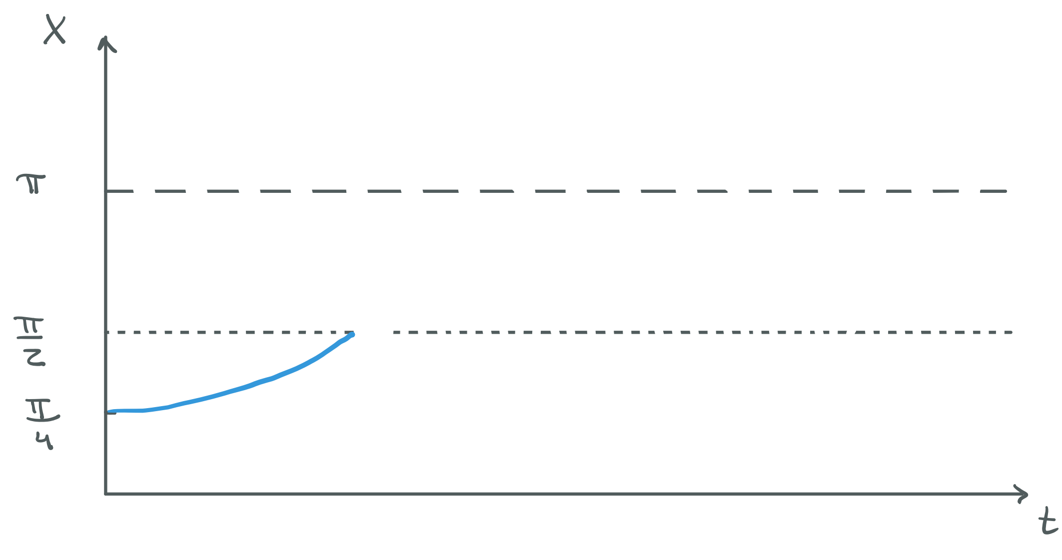
También hay puntos que repelen trayectorias, y son puntos fijos REPULSORES o INESTABLES. Se representan con círculos vacíos en el gráfico.

Si por ejemplo, comenzamos con $x_0 = \frac{\pi}{4}$ en $t=0$, el punto se desplazará hacia la derecha, hacia $x^* = \pi$.

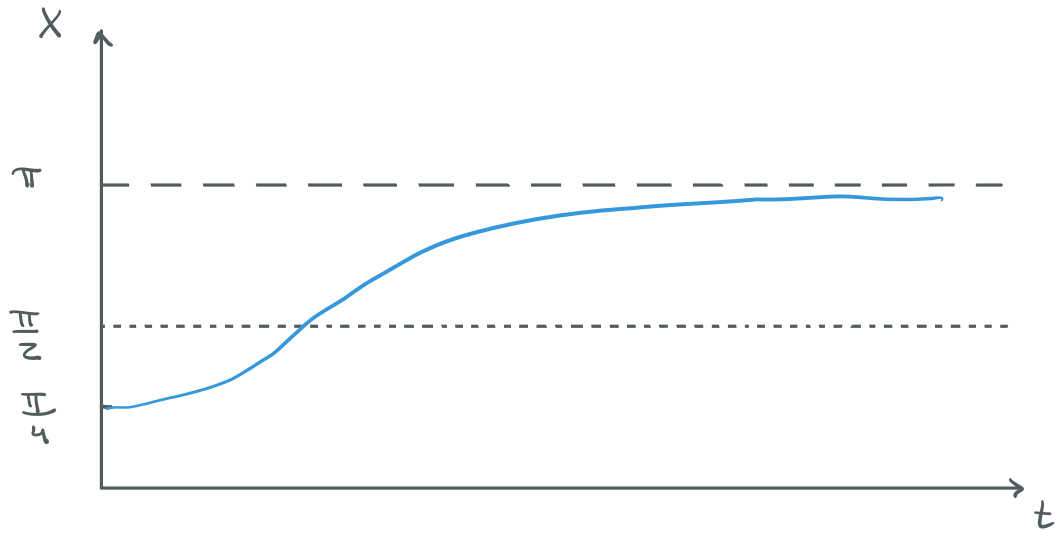
Noten que asignamos a cada punto de dominio de f (en este caso $\mathbb{R}$) un vector cuya magnitud es $|f(x)|$ y sentido es hacia la derecha si $f(x)>0$ y hacia la izquierda si $f(x)<0$. Esto define un campo vectorial (flechas) que representa EL FLUJO.



Miremos que pasa si comenzamos con $\frac{\pi}{4}$. El sistema comienza a crecer (va hacia la derecha), y como la razón de cambio, además de ser positiva crece más, la derivada segunda de $X(t)$ es positiva.

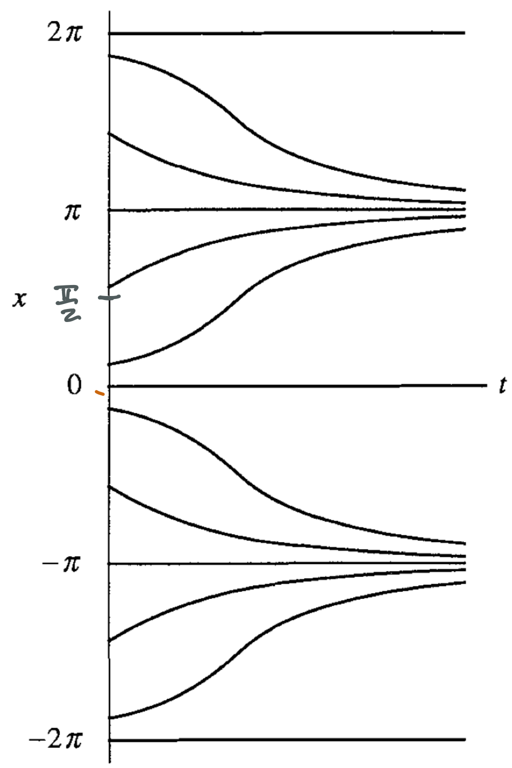


Cuando alcanza $X = \frac{\pi}{2}$, vale 1. A partir de ahora la razón de cambio sigue siendo positiva, pero cada vez es menos importante, y entonces la derivada primera es positiva pero la segunda es negativa.



El sistema se aproxima a π asimptóticamente, pero nunca llega, pues a medida que se aproxima la velocidad tiende a cero.

Con esto podemos hacernos una idea cualitativa de las trayectorias posibles, y precisas sobre dónde estará el sistema cuando $t \longrightarrow \infty$.



Los ATRACTORES son los múltiplos de π.

$$X^*_k = k\pi \qquad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Los atractores con k par o cero son inestables. El sistema puede estar en ellos, pero para estar en uno de estos puntos cuando $t \to \infty$, debió estar ahí todo el tiempo medido.

Los atractores con k impar son estables. Estos atractores atraen flujo de infinitas trayectorias.

abierto

$X^*_{2k+1} = (2k+1)\pi$ atrae trayectorias que están en $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$

Cuando $t \to \infty$ el sistema puede:

- ir hacia infinito $\quad X(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} +\infty$
- ir hacia menos infinito $\quad X(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} -\infty$
- ir hacia o permanecer en un punto fijo estable.
- permanecer en un punto fijo inestable.