REDES NEURONALES

2021

Clase 4 Parte 2

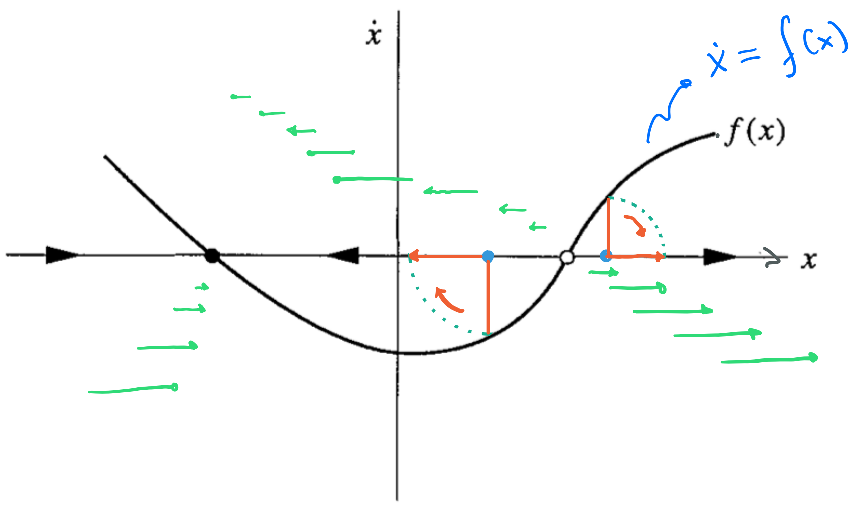
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

Jueves 26 de agosto 2021

http://www.famaf.unc.edu.ar/~ftamarit/redes2021

https://www.famaf.unc.edu.ar/course/view.php?id=798

Aprendimos ya que el lado derecho de nuestra EDO guarda MUCHÍSIMA información sobre el comportamiento a tiempos largos



A cada punto del eje x le asignamos un vector que apunta hacia la derecha si la razón de cambio $f(x)$ es positiva y hacia la izquierda si es negativa, y cuya magnitud es $|f(x)|$

Esto es un campo vectorial que a cada vector en $\mathbb{R}$ le asigna un vector en $\mathbb{R}$.

El campo vectorial nos dice hacia dónde se mueve un sistema cuya variable DINÁMICA x vale $x(t)$ en t.

A tiempo infinito el sistema unidimensional SŌLO PUEDE ESTAR EN

$$\begin{cases} \circ \ \text{uno de los puntos fijos.} \\ \circ \ \text{en } +\infty. \\ \circ \ \text{en } -\infty. \end{cases}$$

Recuerden: un PUNTO FIJO es una raíz de $f(x)$, o sea, un valor de $X(t)$ para el cual la razón de cambio de $X(t)$ es nula

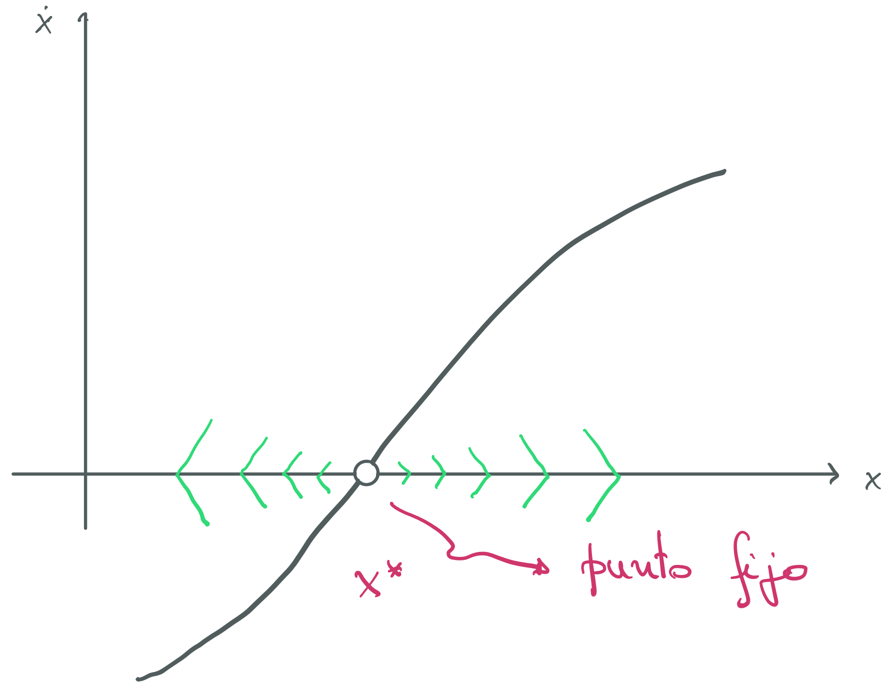
$$f(\underbrace{x^*}_{\text{número real}}) = 0$$

Si en cierto instante de tiempo t sucede que

$$X(t) = \underbrace{X^*}_{\text{número real}}$$

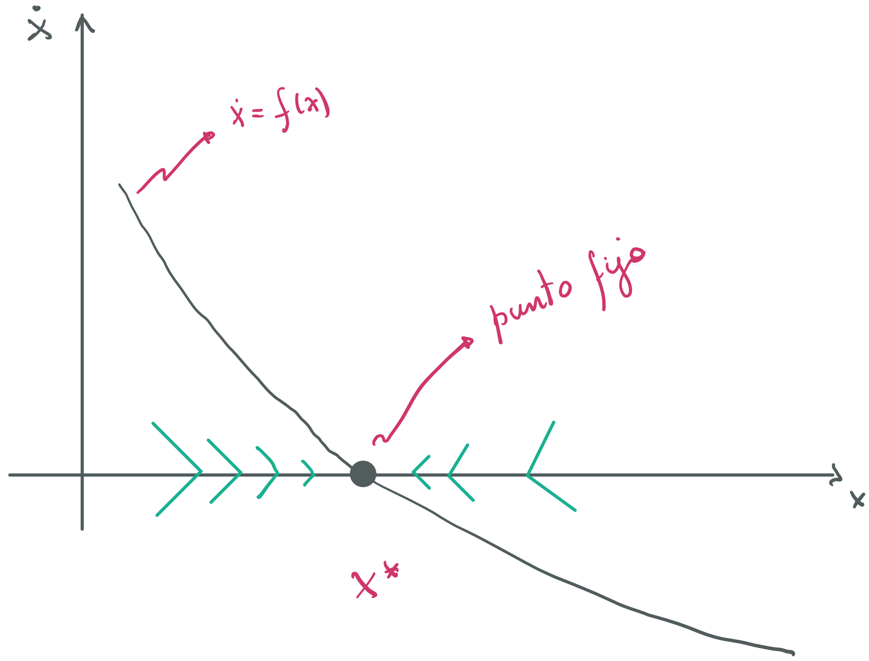
entonces quedaré en ese valor hasta el final de los tiempos (tiempo infinito).

Miremos con más detalle los puntos fijos. Dijimos ya que los hay de 2 tipos

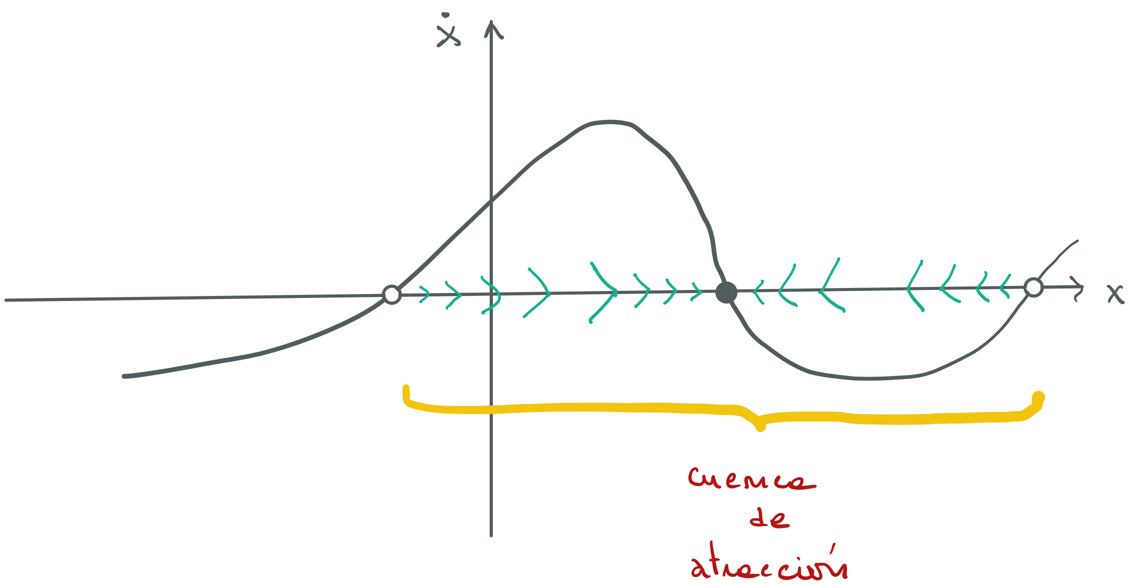


Los vectores del campo EMERGEN del punto fijo. Si el sistema está infinitesimalmente cerca del punto fijo (por derecha o por izquierda) será repelido, expulsado, apartado del punto fijo. Pero si el sistema está EXACTAMENTE en el punto fijo, se quedará allí, repeliendo a todos

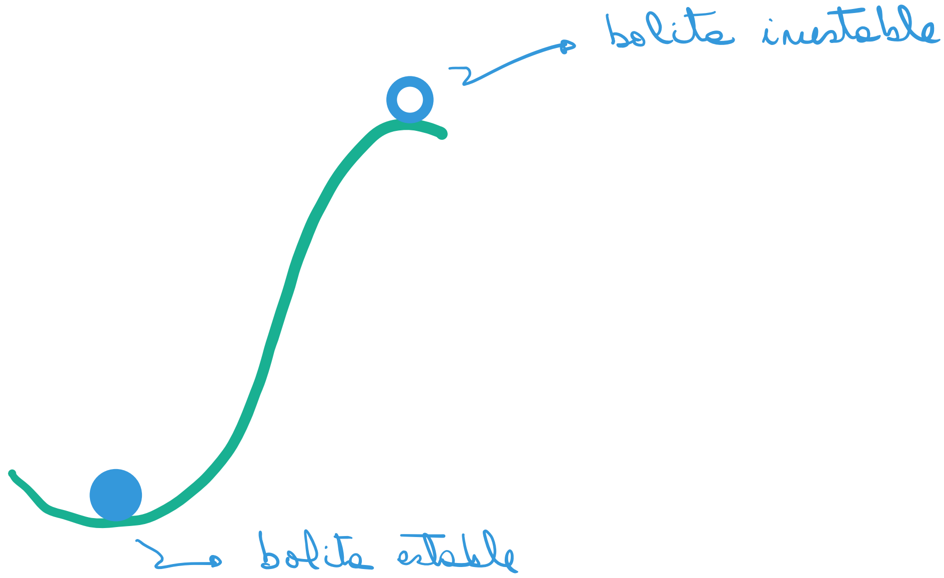
Los puntos REPELENTES atraviesan el eje x con pendiente positiva $f'(x^*) > 0$.



Ahora los vectores del campo CONVERGEN al punto fijo. Es un sumidero de vectores. Si el sistema está alrededor de x^* (y hasta sus puntos fijos vecinos) entonces atraerá todos los sistemas que en $t = 0$ se preparen en esa cuenca.



ANALOGÍA

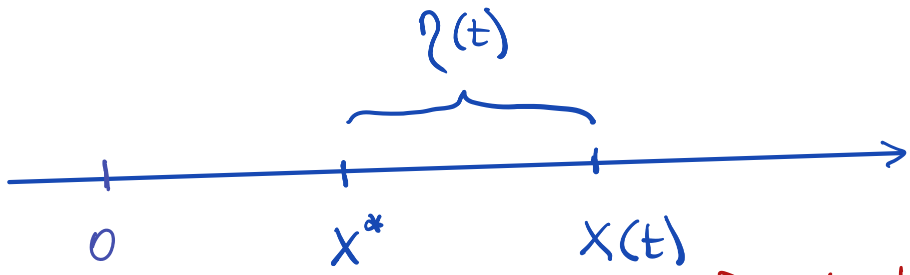


Repitamos este análisis usando buen cálculo. Esto será útil en dimensiones mayores, donde no podremos apelar a la intuición que nos brinda la geometría.

PAISAJES Y MACHINE LEARNING

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD LINEAL

$$x(t) = \underbrace{x^*}_{} + \underbrace{\eta(t)}_{}$$



→ punto que queremos estudiar

→ punto fijo

$$\dot{x} = f(x)$$

$$\dot{(x^* + \eta(t))} = f(x^* + \eta(t))$$

$$\cancel{\dot{x}^*} + \dot{\eta}(t) = f(x^* + \eta(t))$$

$\dot{x}^* = 0$

x^* es una constante

$$\dot{\eta}(t) = f(x^* + \eta(t))$$

Ahora tenemos una descripción alternativa pero equivalente para $\eta(t)$ (cambio de coordenadas).

Si asumimos $\eta(t) \ll 1$ (pequeño) podemos usar el teorema de Taylor y aproximar la función por una recta, para lo cual exigimos que f sea continua y diferenciable y que así lo sean su derivada y su segunda derivada:

$$f(x^* + \eta(t)) = f(x^*) + \eta(t) f'(x^*) + \frac{1}{2}\eta^2(t) f''(\xi)$$

con $\xi \in (x^*, x^* + \eta(t))$

Suponiendo que $\eta(t)$ es pequeño, podemos despreciar el error y aproximar

$$f(x^* + \eta(t)) \approx \underbrace{\cancel{f(x^*)}}_{\substack{= 0 \\ \text{por ser punto crítico}}} + \eta(t) \underbrace{f'(x^*)}_{\text{número real}}$$

Reemplazando en la ecuación

$$\dot{x} = f(x)$$

$$\downarrow$$

$$\dot{\eta}(t) = f(x^* + \eta(t))$$

$x(t) = x^* + \eta(t)$

$$\boxed{\dot{\eta}(t) \approx \eta(t) f'(x^*)}$$

ecuación para la perturbación

Ahora tenemos una ecuación para la perturbación, fácil de resolver

$$\eta(t) = A e^{\overbrace{f'(x^*)}^{= cte} t}$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = A f'(x^*) e^{f'(x^*)t}$$

$$= f'(x^*) \left(A e^{f'(x^*)t} \right)$$

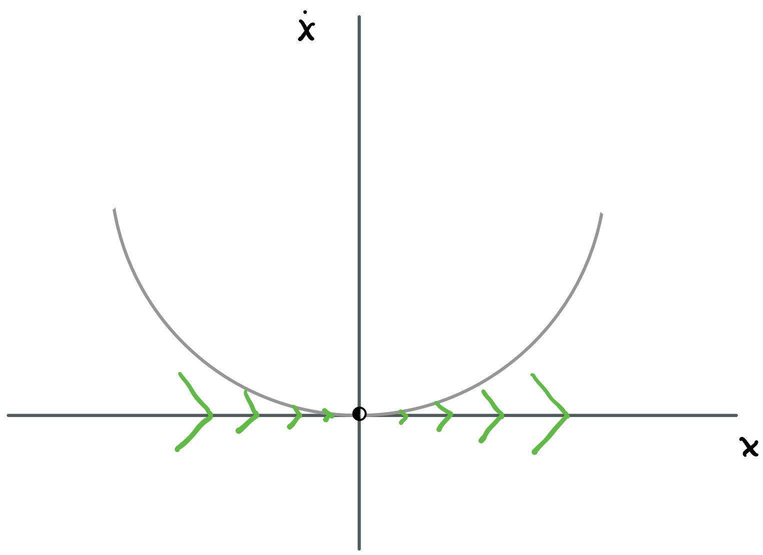
$$= f'(x^*) \eta(t)$$

Si $f'(x^*) > 0$ la perturbación crece exponencialmente

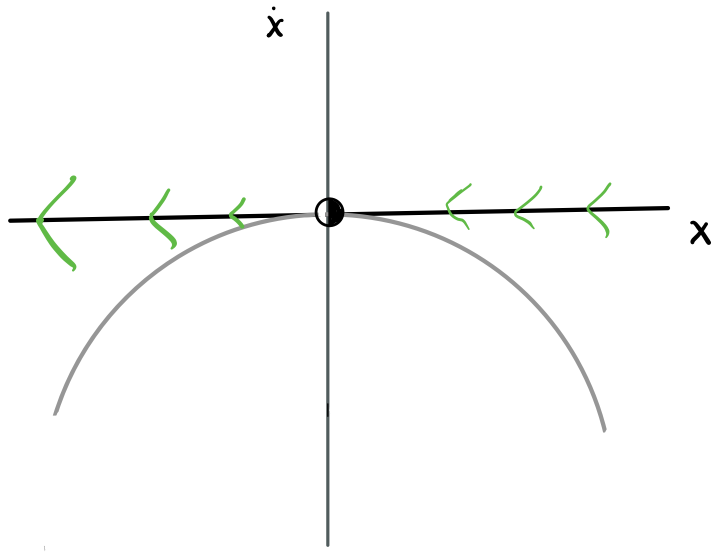
Si $f'(x^*) < 0$ la perturbación decrece exponencialmente

$$\frac{1}{|f'(x^*)|}$$: tiempo característico

PUNTOS FIJOS SEMI ESTABLES



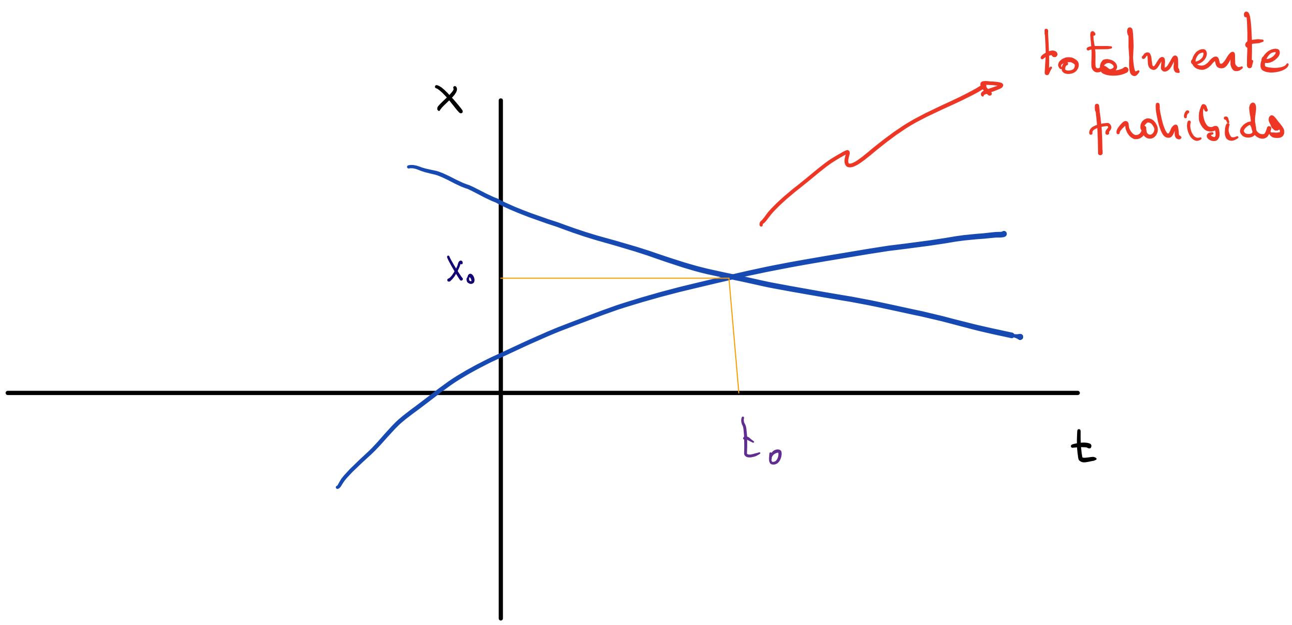
Este punto fijo es estable por izquierda e inestable por derecha.



Este punto fijo es inestable por izquierda y estable por derecha.

Veremos que si f es suficientemente suave, alcanza para que la solución exista y sea única.

Volvamos a la trayectoria $x(t)$



Si las trayectorias se cruzacen, en ese t habría dos soluciones diferentes para el problema de valor inicial