REDES NEURONALES

2021

Clase 4 Parte 3

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

Jueves 26 de agosto 2021

http://www.famaf.unc.edu.ar/~ftamarit/redes2021

https://www.famaf.unc.edu.ar/course/view.php?id=798

PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Dado una ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x)$$

existen infinitas soluciones. A partir de la condición inicial

$$x(t_0) = x_0$$

podemos determinar una única "trayectoria" de interés, entre las infinitas posibles.

Hoy veremos como resolver una ecuación diferencial "numéricamente". Pero con la computadora podemos encontrar "una única" trayectoria. Este enfoque es muy diferente del enfoque "geométrico" de los SISTEMAS DINÁMICOS que estudiamos en esta materia. No obstante, en última instancia, siempre usaremos la computadora para conocer las soluciones.

El problema de encontrar UNA ÚNICA trayectoria dentro de las infinitas se denomina PROBLEMA DE VALOR INICIAL.

DEFINICIÓN: Problema de valor inicial

Un PROBLEMA DE VALOR INICIAL consiste de una ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x,t) \qquad f: D \to \mathbb{R}^n$$

donde D es un subconjunto abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ junto con un punto en el dominio D de f

$$(t_0, \alpha) \in D$$

llamado condición inicial. En otras palabras:

$$x(t_0) = \alpha \in \mathbb{R}^n$$

EL MÉTODO DE EULER

Consideremos el caso unidimensional

$$\dot{x} = f(x, t)$$

aunque se puede generalizar simplemente al caso de un sistema de n EDO acoplados (de dimensión n o n+1).

Supongamos que $f(x,t)$ es suficientemente buena y que existe solución única de la ecuación diferencial para

$$t_0 \leq t \leq t_f$$

Además sabemos que

$$x(t_0) = \alpha$$

O sea, tenemos un problema de valor inicial.

Dividimos el intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$ en N intervalos iguales

$$t_i = t_0 + i h \qquad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$h = \frac{(t_f - t_0)}{N} \longleftarrow \text{paso de integración temporal}$$

Usemos el Teorema de Taylor

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\,\dot{x}(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}\,\ddot{x}(\xi_i)$$

$$t_i < \xi_i < t_f$$

$$\boxed{x(t_{i+1}) = x(t_i) + h\, f(x(t_i), t_i) + \frac{h^2}{2}\,\ddot{x}(\xi_i)}$$

$$x(t_1) = x(t_0) + h\, f(x(t_0), t_0) + \frac{h^2}{2}\,\ddot{x}(\xi_0)$$

$$t_0 < \xi_0 < t_1$$

conozco ambos

$$x(t_1) \approx x(t_0) + h\, f(x(t_0), t_0)$$

$$w_0 = f(x(t_0), t_0)$$

$$w_1 = f(w_0, t_1)$$

$$\vdots$$

$$w_i = f(w_{i-1}, t_i)$$

$$X(t_1) \approx w_1 = w_0 + h\, f(w_0, t_0)$$

$$X(t_2) \approx w_2 = w_1 + h\, f(w_1, t_1)$$

$$\vdots$$

$$X(t_i) \approx w_i = w_{i-1} + h\, f(w_{i-1}, t_{i-1})$$

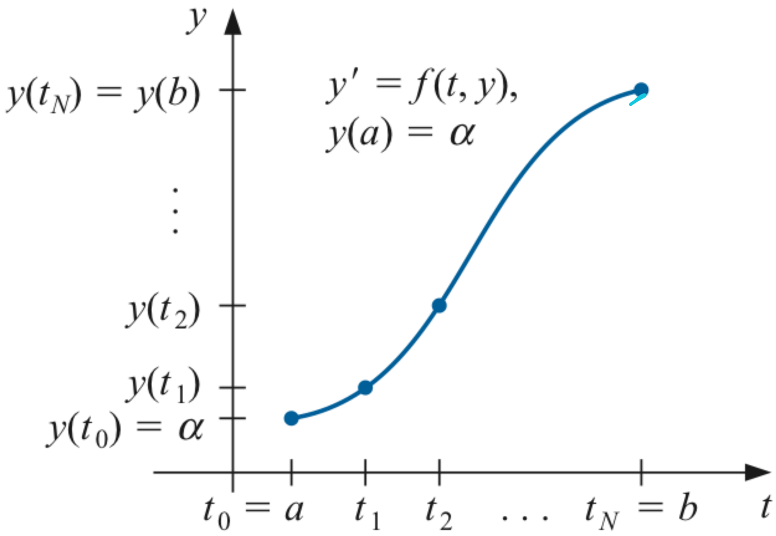
$$i = 1, 2, \ldots N$$

Para $i = 0$ el resultado es exacto

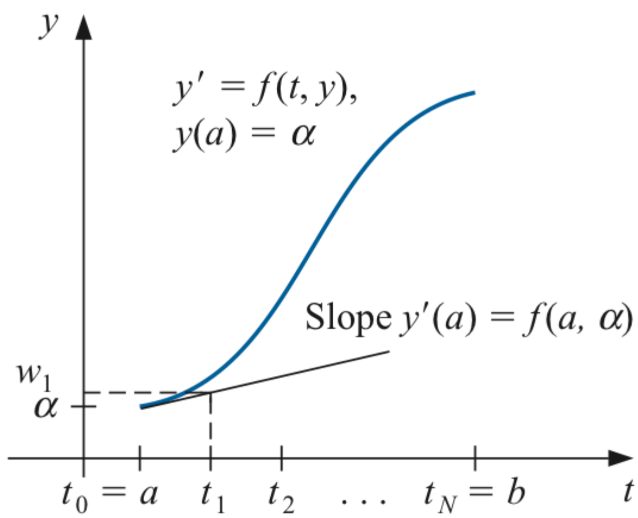
Así construimos una secuencia

$$(t_0, w_0)$$
$$(t_1, w_1)$$
$$(t_2, w_2)$$
$$\vdots$$
$$(t_i, w_i)$$
$$\vdots$$
$$(t_N, w_N)$$

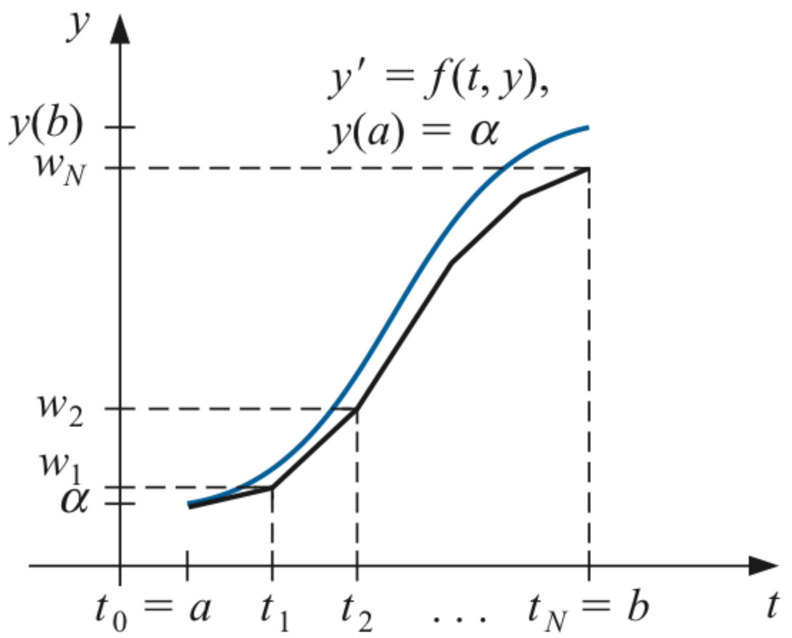
the w_i approximate the $X(t_i)$.



y
y(t_N) = y(b)
y' = f(t, y),
y(a) = α
y(t_2)
y(t_1)
y(t_0) = α
t_0 = a
t_1
t_2
. . .
t_N = b
t



y
y' = f(t, y),
y(a) = α
Slope y'(a) = f(a, α)
w_1
α
t_0 = a
t_1
t_2
. . .
t_N = b
t


y
y' = f(t, y),
y(a) = α
y(b)
w_N
w_2
w_1
α
t_0 = a
t_1
t_2
. . .
t_N = b
t