REDES NEURONALES

2021

Clase 5 Parte 1

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

Martes 31 de agosto 2021

http://www.famaf.unc.edu.ar/~ftamarit/redes2021

https://www.famaf.unc.edu.ar/course/view.php?id=798

Volvamos al problema de valor inicial:

$$\dot{x} = f(x,t) \qquad x(t_0) = x_0 \qquad t_0 \leq t \leq t_f$$

Teorema: consideremos el problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x) \quad y \quad x(0) = x_0$$

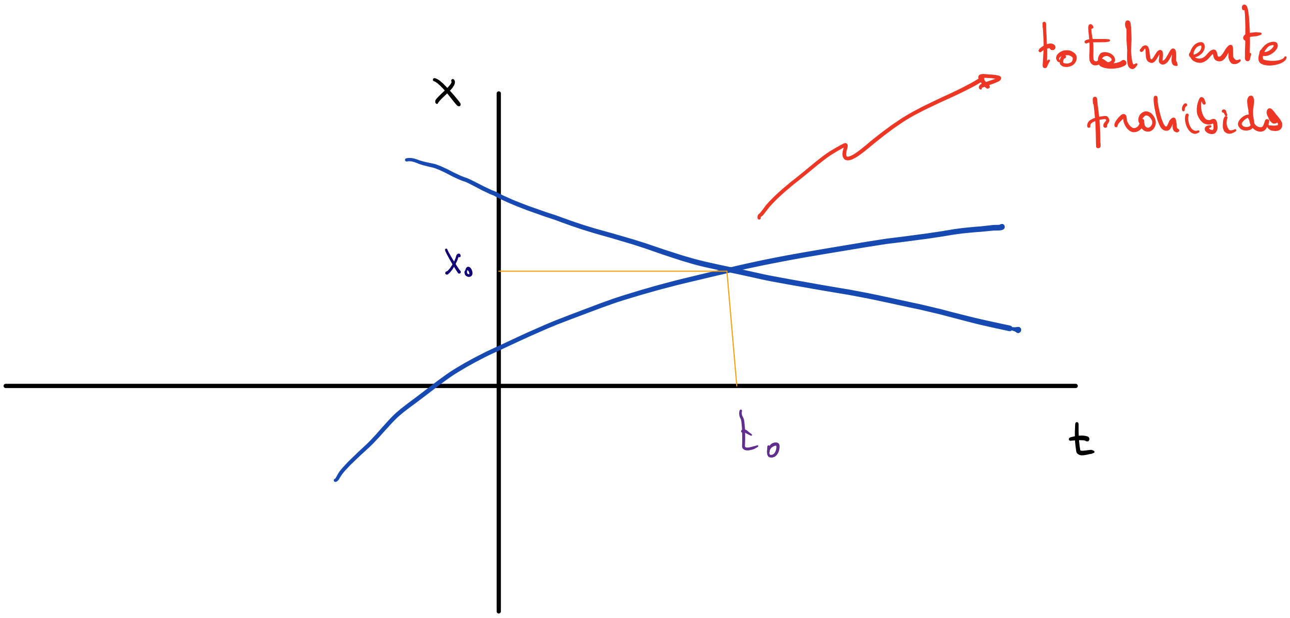
Supongamos que $f \in C^1$, o sea, que f y f' son continuas en un intervalo abierto I en el eje x y supongamos $x_0 \in I$. Entonces este problema tiene solución en cierto intervalo

$$(-\varepsilon, \varepsilon)$$

y además la solución es única.

Resumiendo, con que f sea "un poco suave", alcanza para que la solución exista y sea única.

Volvamos a la trayectoria $x(t)$



Si las trayectorias se cruzacen, en ese t habría dos soluciones diferentes para el problema de valor inicial

EJEMPLO

Consideremos el problema de valor inicial

$$\dot{x} = 1 + x^2 \qquad x(0) = x_0$$

Analicemos la existencia de solución.

$f(x) = 1 + x^2$ (sistema autónomo).

$f'(x) = 2x$

Tanto $f(x)$ como $f'(x)$ son continuas y diferenciables. Entonces existe solución y es única para cualquier x_0.

Sea $x(0) = 0$.

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 \Rightarrow$$

$$dt = \frac{dx}{1 + x^2}$$

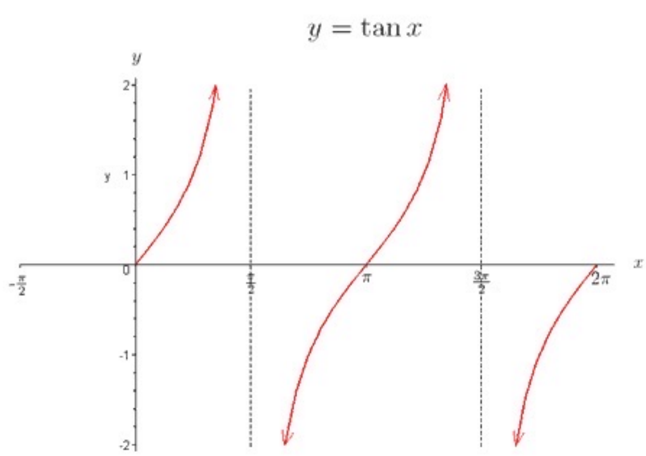
$$\int_0^t dt' = \int_0^x \frac{dx'}{(1 + x'^2)}$$

$$t = \tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(0)$$

$$t = \tan^{-1}(x)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \tan(t)$$



IMPOSIBILIDAD DE SOLUCIONES OSCILATORIAS

No puede el sistema crecer un tiempo y decrecer después, o viceversa. Para eso el sistema debería pasar sobre un punto fijo, pero al llegar se detendría.

NO HAY OSCILACIONES COMO SOLUCIONES DE

$$\dot{x} = f(x) \quad y \quad x(0) = x_0$$

CUALQUIERA SEA f, x_0 y el origen del tiempo

EJEMPLO

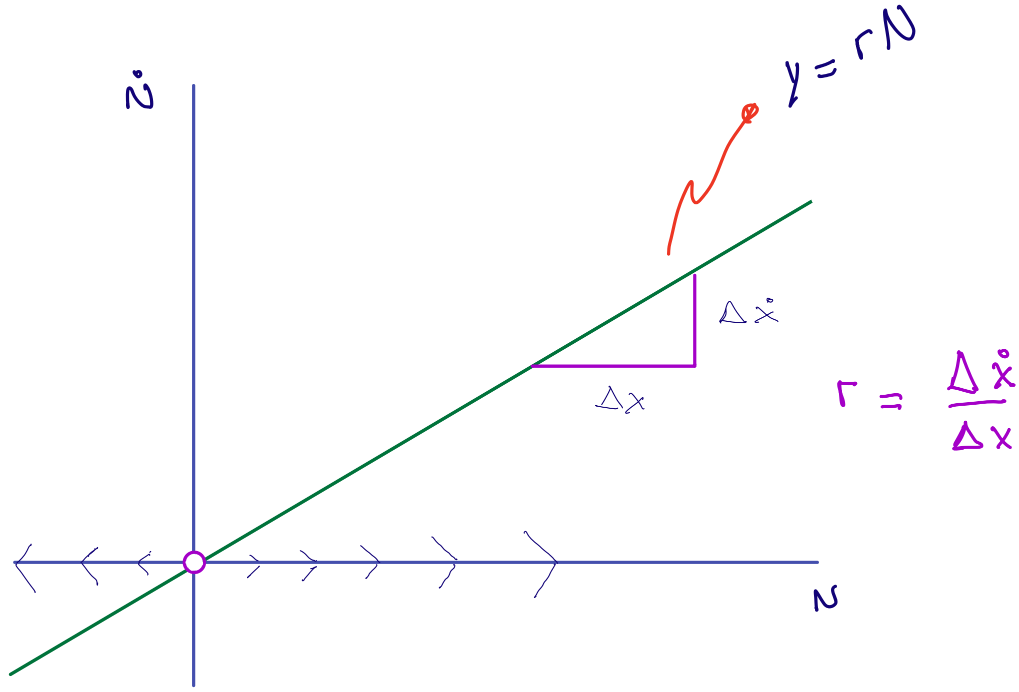
Miremos el caso de una población de bacterias

$$\dot{N}(t) = f(N(t))$$

$$\dot{N} = rN$$

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

$$N_0 = N(t=0)$$



$\dot{N}$
$y = rN$
$\Delta \dot{x}$
Δx
$r = \frac{\Delta \dot{x}}{\Delta x}$
N

Esto es poco realista por cierto. En algún momento el crecimiento exponencial debe detenerse

$$\dot N = \underbrace{rN}_{} - g(N)$$

debe disminuir la razón de cambio

Si no se puede supongo cuadrático (explicar porqué).

$$\dot N = rN - \alpha N^2$$

$$= rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

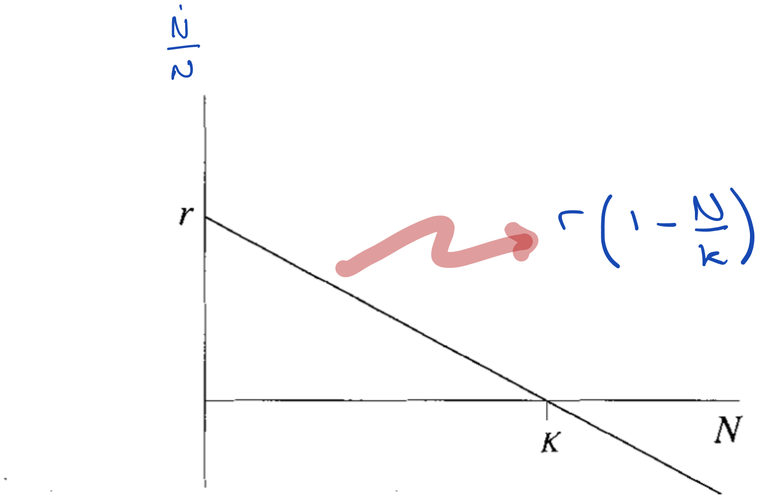
$$\alpha = \frac{r}{K}$$

$$\frac{\dot N}{N} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Dos puntos fijos

$N^* = 0$

$N^* = K$



$$N^* = 0 \Rightarrow \frac{d\dot N}{dN} = r - \frac{2r}{K}\cancel{N}^{=0} = r > 0$$ inestable

$N^* = K$ punto fijo

$$N' = r - \frac{2r}{K}N$$

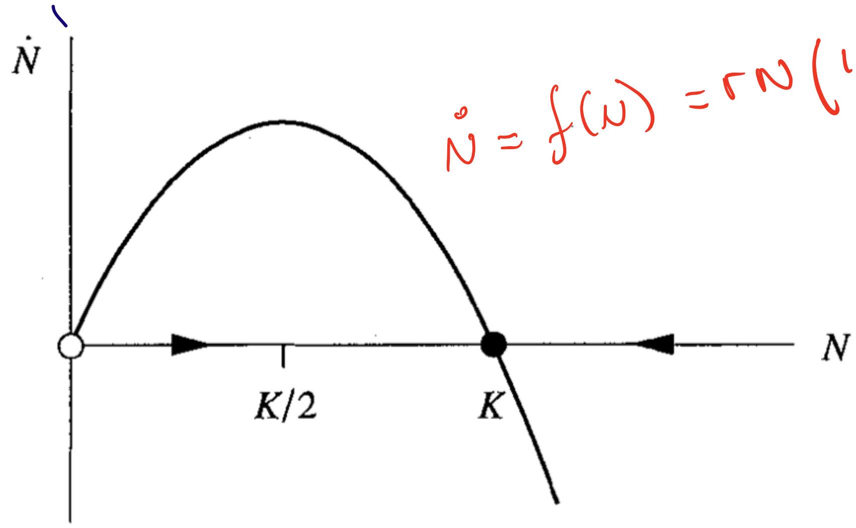
$$N'(K) = r - \frac{2r\cancel{K}}{\cancel{K}} = r - 2r = -r < 0$$

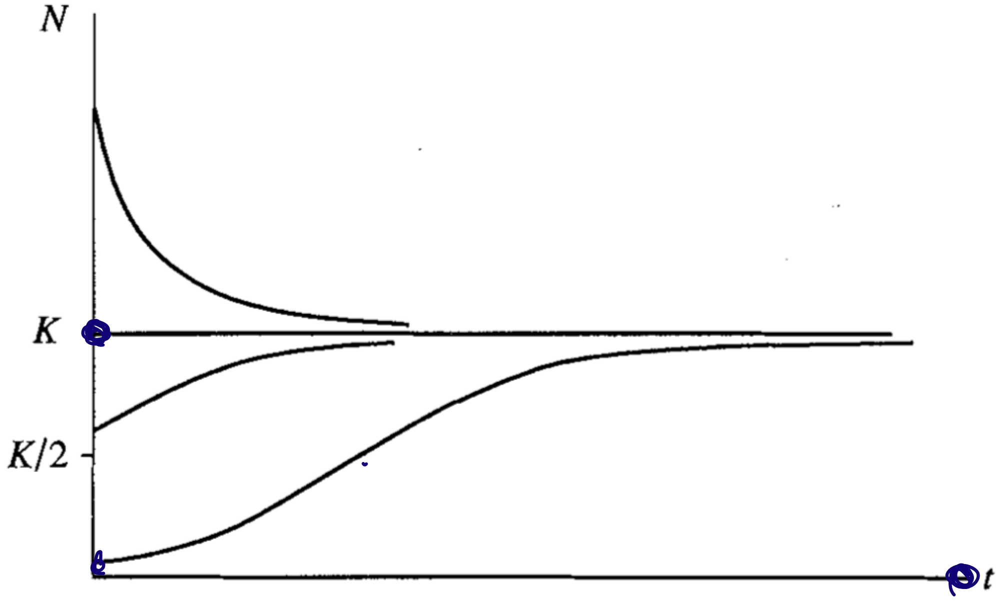
Entonces el punto fijo es estable.

$$N(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} K \quad \text{si } N_0 > 0$$

K: carrying capacity
capacidad de carga

$\dot{N} = f(N) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$





Los puntos fijo son dos:

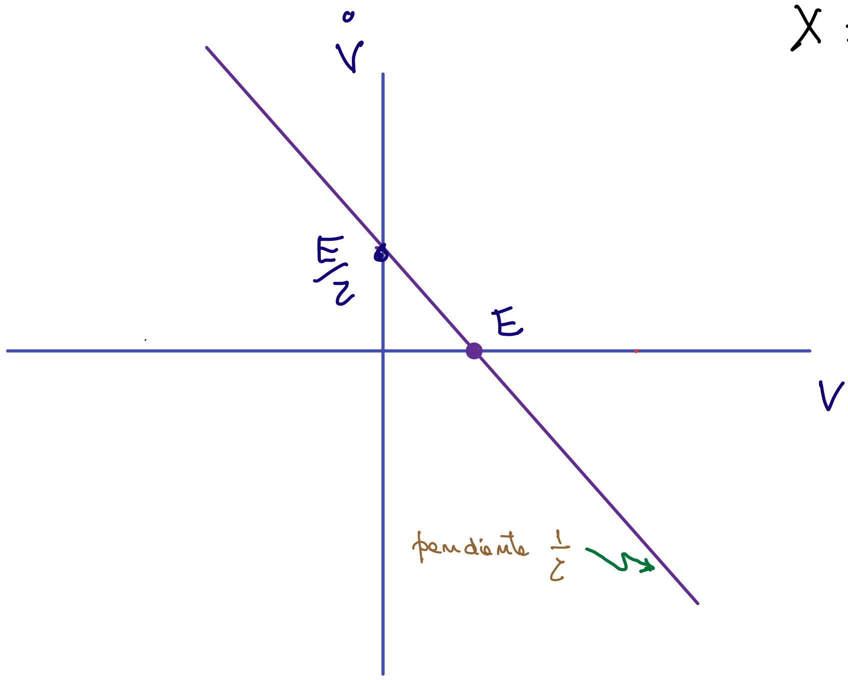
$N^* = 0$ $\qquad$ $N^* = K$

$$f'(N) = r - \frac{2Nr}{K}$$

$N^* = 0$ $\qquad$ $f'(0) = r > 0$ $\qquad$ punto fijo inestable

$N^* = K$ $\qquad$ $f'(K) = -r < 0$ $\qquad$ punto fijo estable

$$\dot{x} = r(x-a)$$



$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{(E-V)}{\tau} = \frac{E}{\tau} - \frac{V}{\tau}$$

$\rightarrow$ recta con:

pendiente	$-\frac{1}{\tau}$
ordenada al origen	$\frac{E}{\tau}$
raíz	E

$$f(x) = \frac{E-V}{\tau}$$

$$f(x^*) = 0 \Rightarrow V = E$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{(E-V)}{\tau}$$

$$U(t) = V(t) - E$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dV(t)}{dt} - \overset{=0}{\frac{dE}{dt}} = \frac{dV(t)}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau}\right) U \qquad \underbrace{U(t)} = \underbrace{U(0)}\, e^{-t/\tau}$$

$$V(t) - E = U(0)\, e^{-t/\tau}$$

$$V(t) = E + U(0)\, e^{-t/\tau}$$

$$V(t) = E + (V(0) - E)\, e^{-t/\tau}$$

Cualquiera sea $U(0)$, para $t \to \infty$

$$V(t) \to E$$