REDES NEURONALES

2021

Clase 9 Parte 1

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

Martes 14 de septiembre 2021

http://www.famaf.unc.edu.ar/~ftamarit/redes2021

https://www.famaf.unc.edu.ar/course/view.php?id=798

REPASO DE EDO EN DOS DIMENSIONES

Hasta aquí hemos estudiado el caso de 2 ecuaciones diferenciales ordinarias AUTÓNOMAS de la forma:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

Recordemos los pasos que hemos seguido a fin de poder identificar los atractores del sistema

1.- Identificamos todos los puntos fijos

Buscamos todos los puntos fijos $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ tales que

$$f_1(x_1^*, x_2^*) = 0$$

$$f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$$

Al igual que en el caso unidimensional (y en realidad para cualquier dimensión), si el sistema está en cierto instante de tiempo en $\bar{x}^*$, no saldrá más de este punto pues las razones de cambio de x_1 y x_2 son nulas.

En el próximo punto veremos como saber si son puntos fijos estables o inestables.

2.- Identificamos alrededor de cada punto fijo

Sea $x_1 = x_1^* + u$ y $x_2 = x_2^* + v$

$$\dot{x}_1 \approx \overbrace{f_1(x_1^*, x_2^*)}^{=0} + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}^*} u + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}^*} v$$

$$\dot{x}_2 \approx \overbrace{f_2(x_1^*, x_2^*)}^{=0} + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}^*} u + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}^*} v$$

$$(x_1, x_2) = (x_1^*, x_2^*) + (u, v)$$

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (\dot{u}, \dot{v})$$

$$\dot{u} \approx \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}^*} u + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}^*} v$$

$$\dot{v} \approx \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}^*} u + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}^*} v$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}^*} & \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}^*} \\ \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}^*} & \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \\ v \end{pmatrix} + \text{términos de mayor orden}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \approx A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

La matriz A se denomina el JACOBIANO de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas. Es una matriz 2×2 que tiene la información de las derivadas parciales de primer orden de f_1 y f_2.

Notemos que tenemos ahora una ecuación para la perturbación, pues suponemos que $\bar{x}$ es un punto cercano a $\bar{x}^*$, o sea

$$|u(0)| \ll 1$$

$$|v(0)| \ll 1$$

Ahora tenemos una tarea MUCHO MÁS SIMPLE pues $u(t)$ y $v(t)$ salen de resolver un sistema de 2 EDO LINEALES

3.- Para cada punto fijo calculamos los autovalores y autovectores de su Jacobiano

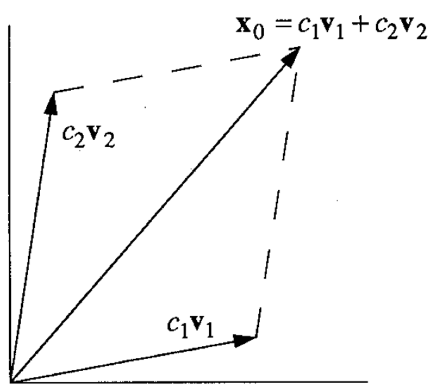
El sistema de EDO lineales acopla las variables u y v. Hacemos una transformación lineal del sistema de coordenadas para encontrar las direcciones en las cuales el sistema se desacopla

Buscamos los vectores (las direcciones) para las cuales

$$A \vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$$

$$A \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$$

donde λ_1 y λ_2 son reales o co



Para el sistema lineal se cumple que

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

donde $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son los autovectores de λ_1 y λ_2 respectivamente

Para calcular los autovalores hacemos

$$A\bar{v} = \lambda \bar{v} = \lambda \mathbb{1} \bar{v} \Rightarrow (A - \lambda \mathbb{1})\bar{v} = 0$$

Para que exista solución de este sistema de 2 ecuaciones lineales, debe cumplirse que

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda \mathbb{1} =$$

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - cb$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - cb)$$

$$= \lambda^2 - \Sigma \lambda + \Delta = 0$$

$$\tau = \text{Traza}\,(A) = a + d$$

$$\Delta = \det(A) = ad - cb$$

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

Una vez que conocemos λ_1 y λ_2, podemos calcular los autovectores resolviendo 2 sistemas de ecuaciones algebraicas lineales:

$$A\bar{v}_1 - \lambda_1 \mathbb{1}\bar{v}_1 = (A - \lambda_1 \mathbb{1})\bar{v}_1 = \bar{0}$$

y

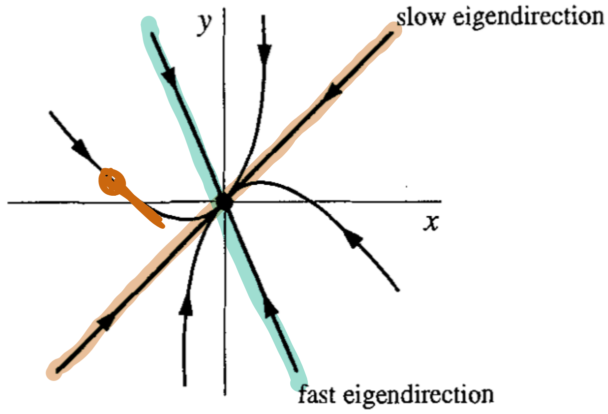
$$A\bar{v}_2 - \lambda_2 \mathbb{1}\bar{v}_2 = (A - \lambda_2 \mathbb{1})\bar{v}_2 = \bar{0}.$$

Supongamos que ya tenemos los dos autovalores y los dos autovectores. Si ponemos el sistema muy cerca del punto fijo, al menos durante los primeros instantes su evolución será

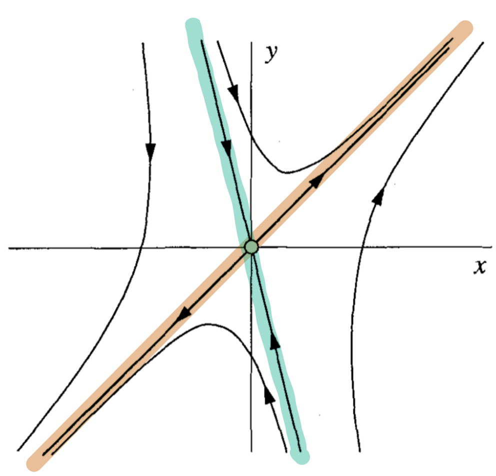
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} + c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} v_1^x \\ v_1^y \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix}$$

Si λ_1 o λ_2 es positivo, el sistema se aparta del punto fijo. Podemos ahora ver todas las posibilidades:

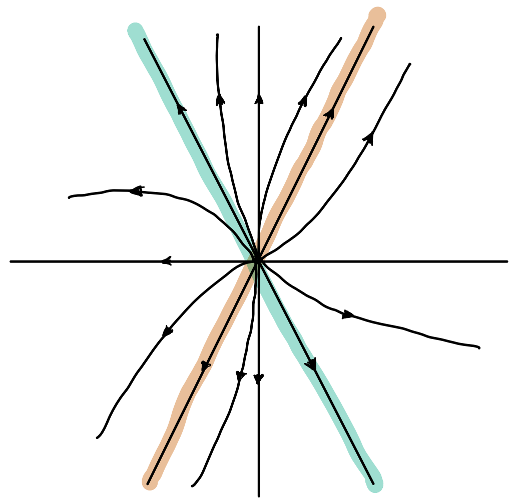
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



$0 < \lambda_1 < \lambda_2$



Recordemos que los autovalores pueden ser complejos si

$$\tau^2 - 4\Delta < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

$$= \frac{\tau \pm i\sqrt{4\Delta - \tau^2}}{2}$$

$$= \frac{\tau}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{4\Delta - \tau^2}}{2}$$

$$\sqrt{\tau^2 - 4\Delta} = \sqrt{(-1)(4\Delta - \tau^2)} = \sqrt{-1}\sqrt{4\Delta - \tau^2} = i\sqrt{4\Delta - \tau^2}$$

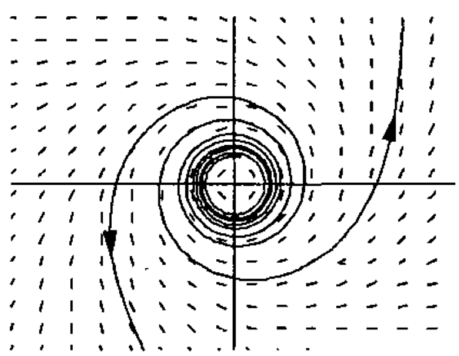
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} + c_1 e^{\alpha t + i\omega t} \begin{pmatrix} v_1^x \\ v_1^y \end{pmatrix} + c_2 e^{\alpha t - i\omega t} \begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} + e^{\alpha t} \left[c_1 e^{i\omega t} \begin{pmatrix} v_1^x \\ v_1^y \end{pmatrix} + c_2 e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix} \right]$$

$$\alpha = \mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2)$$

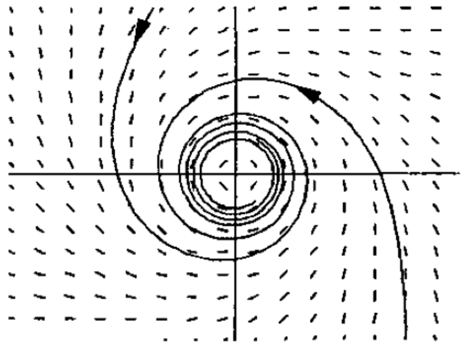
$$\omega = \mathrm{Im}(\lambda_1) = -\mathrm{Im}(\lambda_2)$$

$\alpha > 0$, $\omega \neq 0$



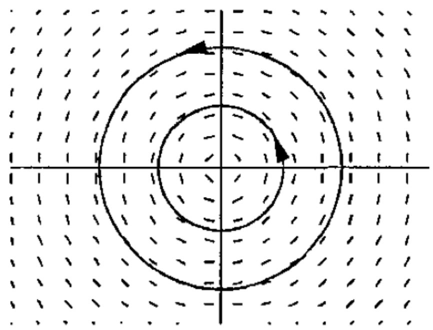
$a > 0$

$\alpha < 0 \quad , \omega \neq 0$



$a < 0$

$\alpha = 0 \quad , \omega \neq 0$



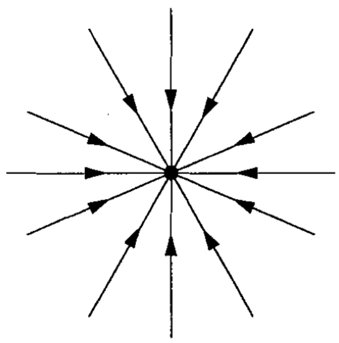
$a = 0$

¿Qué sucede si los autovalores son iguales?

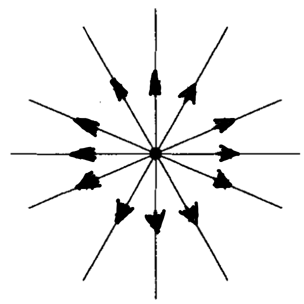
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

Posibilidad I: si hay 2 autovectores independientes, ellos expanden todo el espacio de fases

$$A X_0 = A(c_1 \bar{V}_1 + c_2 \bar{V}_2) = c_1 \lambda \bar{V}_1 + c_2 \lambda \bar{V}_2$$
$$= \lambda (c_1 \bar{V}_1 + c_2 \bar{V}_2)$$
$$= \lambda \bar{X}_0$$

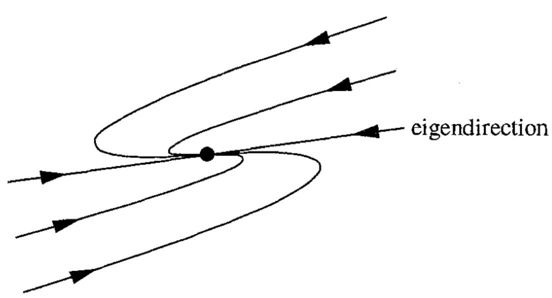


$\lambda < 0$



$\lambda > 0$

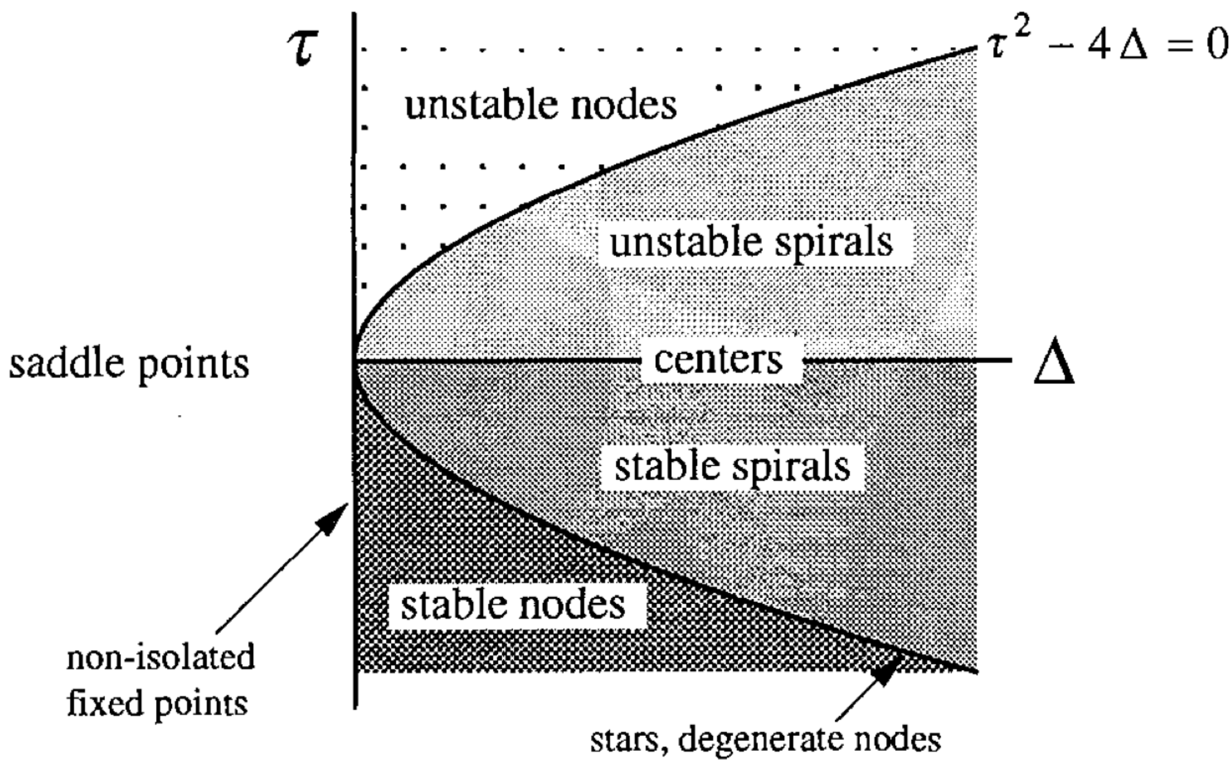
Posibilidad II: si hay un único autovector tenemos un modo degenerado.



$$A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$b \neq 0$$

CLASIFICACIÓN DE PUNTOS FIJOS



$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}\right), \qquad \Delta = \lambda_1 \lambda_2, \qquad \tau = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Si $\boxed{\Delta < 0}$, $\tau^2 - 4\Delta > 0$, soluciones reales

Como $\Delta = \lambda_1 \lambda_2 < 0$

$$\text{signo}(\lambda_1) = -\text{signo}(\lambda_2)$$

o sea, tenemos autovalores reales y de signos opuestos, lo cual da un saddle-nodo (inestable).

Si $\boxed{\Delta > 0}$ podemos tener autovalores reales o complejos conjugados.

Si $4\Delta > \tau^2$ $\Delta < 0$ espiral estable

Si $4\Delta < \tau^2$ $\Delta < 0$ nodo estable

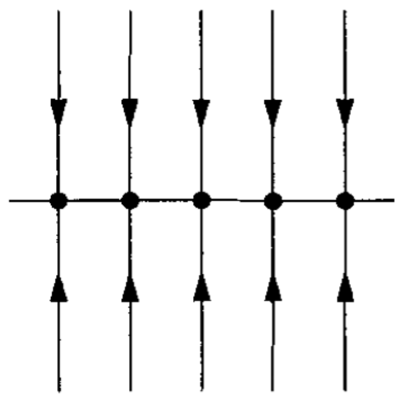
Si $4\Delta > \tau^2$ $\Delta > 0$ espiral inestable

Si $4\Delta < \tau^2$ $\Delta > 0$ nodo inestable

Si $\Delta = 0$, al menos un autovalor es nulo

Entonces tenemos dos posibilidades

Si un autovalor es cero y el otro no, tenemos una línea de puntos fijos.



Si ambos autovalores son nulos, tenemos "UN PLANO DE PUNTOS FIJOS".