REDES NEURONALES

2021

Clase 9 Parte 2

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

Martes 14 de septiembre 2021

http://www.famaf.unc.edu.ar/~ftamarit/redes2021

https://www.famaf.unc.edu.ar/course/view.php?id=798

Veamos algunos ejemplos instructivos.

Modelo predador-presa

A finales del siglo XVIII, Thomas Malthus publica "An essay on the principle of population" y propone la idea de que la población humana se duplica cada cierto número fijo de años. O sea, propone un crecimiento exponencial.

$$\frac{dP}{dt} = k P(t) \qquad k > 0$$

En 1838 el matemático belga Pierre-François Verhulst introdujo la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = r P \left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

A principios del siglo XX, Alfred Lotka (EEUU) y Vittora Volterra (Italia), desarrollaron en forma independiente un sistema de 2 ecuaciones diferenciales ordinarios conocidas como

ECUACIÓN PREDADOR-PRESA

ECUACIÓN LOTKA-VOLTERRA

Supongamos que queremos modelar la evolución temporal de la población de 2 especies, siendo que una se alimenta de vegetales y otra se alimenta de la primera

$R(t)$: población de conejos al tiempo t.

$F(t)$: población de zorros al tiempo t.

Las dos ecuaciones son:

$$\dot{R}(t) = a\,R(t) - b\,R(t)\,F(t)$$

$$\dot{F}(t) = -c\,F(t) + d\,R(t)\,F(t)$$

Suposiciones:

- el ecosistema está aislado. No hay migración, ni plagas ni otras especies.
- la población de conejos crece exponencialmente en ausencia de zorros.
- la población de zorros decrece exponencialmente en ausencia de conejos.
- el encuentro de zorros y conejos es beneficioso para los zorros y perjudicial para los conejos.

Pongamos valores a los parámetros

$a = 0{,}1 \qquad b = 0{,}02 \qquad c = 0.3 \qquad d = 0.01$

$$0 = \dot{R}(t) = 0.1 \cdot R(t) - 0.02 \cdot R(t)\, F(t)$$

$$0 = \dot{F}(t) = -0.3 \cdot F(t) + 0.01 \cdot R(t)\, F(t)$$

Los puntos críticos son 2

$$0 = R\,(0.1 - 0.02\, F)$$

$$0 = F\,(-0.3 + 0.01\, R)$$

$$R_1^* = \frac{0.3}{0.01} = 30 \qquad F_1^* = \frac{0.1}{0.02} = 5$$

$$R_2^* = 0 \qquad F_2^* = 0$$

$$\bar{X}_1^* = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \bar{X}_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora linealizamos:

$$\frac{\partial \dot{R}}{\partial R} = 0.1 - 0.02F \qquad \frac{\partial \dot{R}}{\partial F} = -0.02R$$

$$\frac{\partial \dot{F}}{\partial R} = -0.3 \qquad \frac{\partial \dot{F}}{\partial F} = 0.01R - 0.3$$

Construimos el Jacobiano

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial F} \\ \frac{\partial \dot{F}}{\partial R} & \frac{\partial \dot{F}}{\partial F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.1 - 0.02F & -0.02R \\ 0.01F & -0.3 + 0.01R \end{vmatrix}$$

A) Evaluamos en $\tilde{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.1 \qquad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -0.3 \qquad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B) Evaluamos en $\bar{X}_2^* = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0 & -0.6 \\ 0.05 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_2 - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & -0.6 \\ 0.05 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 0.6 \times 0.05 = 0$$

$$\lambda^2 = -0.03$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{0.03}$$

$$A \bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1 \Rightarrow (A - \lambda \mathbb{1}) \bar{v}_1 = 0$$

$$-\lambda v_x - 0.6 v_y = 0$$

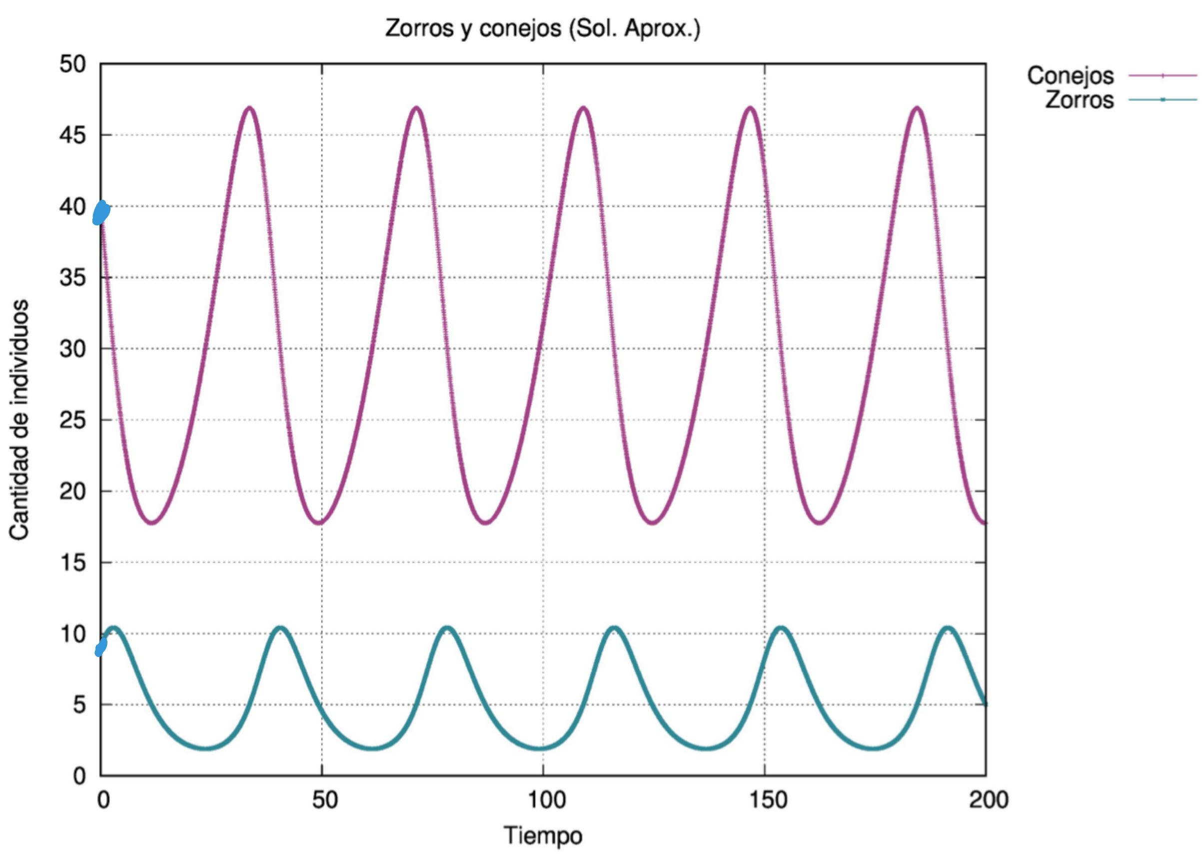
$$v_x = - i \cdot \frac{\sqrt{0.03}}{0.6} v_y$$

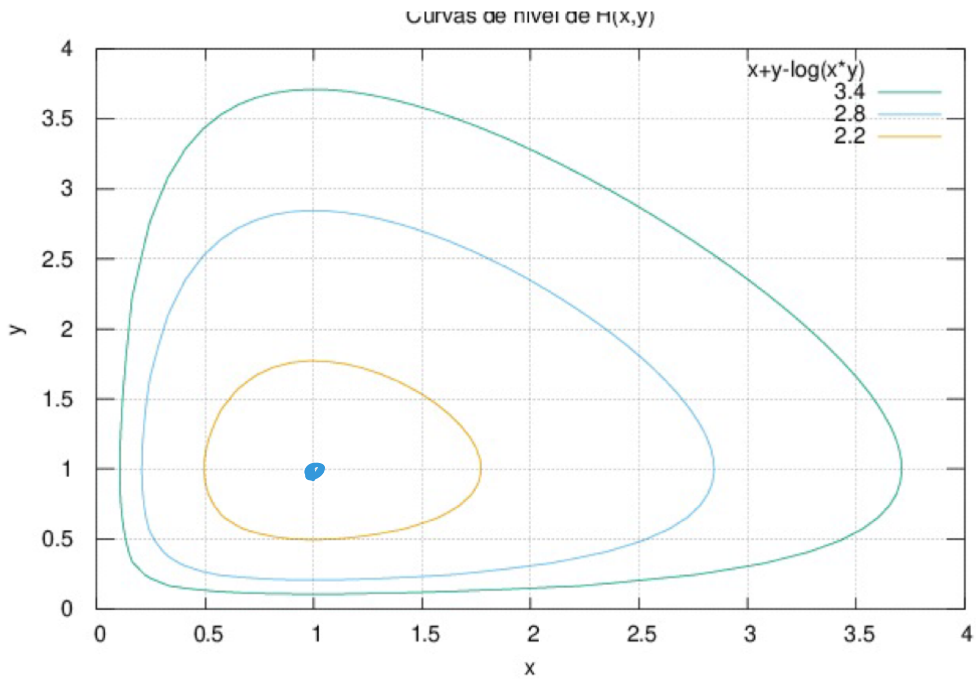
Si $v_y = 1$

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -i\,\dfrac{\sqrt{0.03}}{0.6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

De la misma forma

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} +i\,\dfrac{\sqrt{0.03}}{0.6} \\ 1 \end{pmatrix}$$




Curvas de nivel de H(x,y)
x+y-log(x*y)
3.4
2.8
2.2
x
y

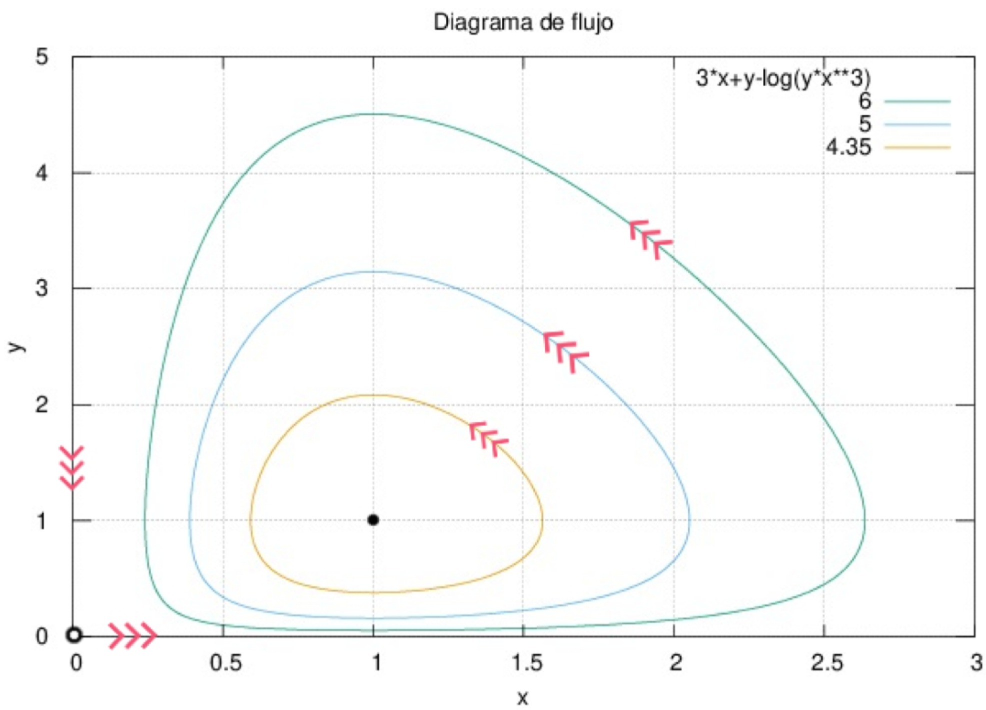
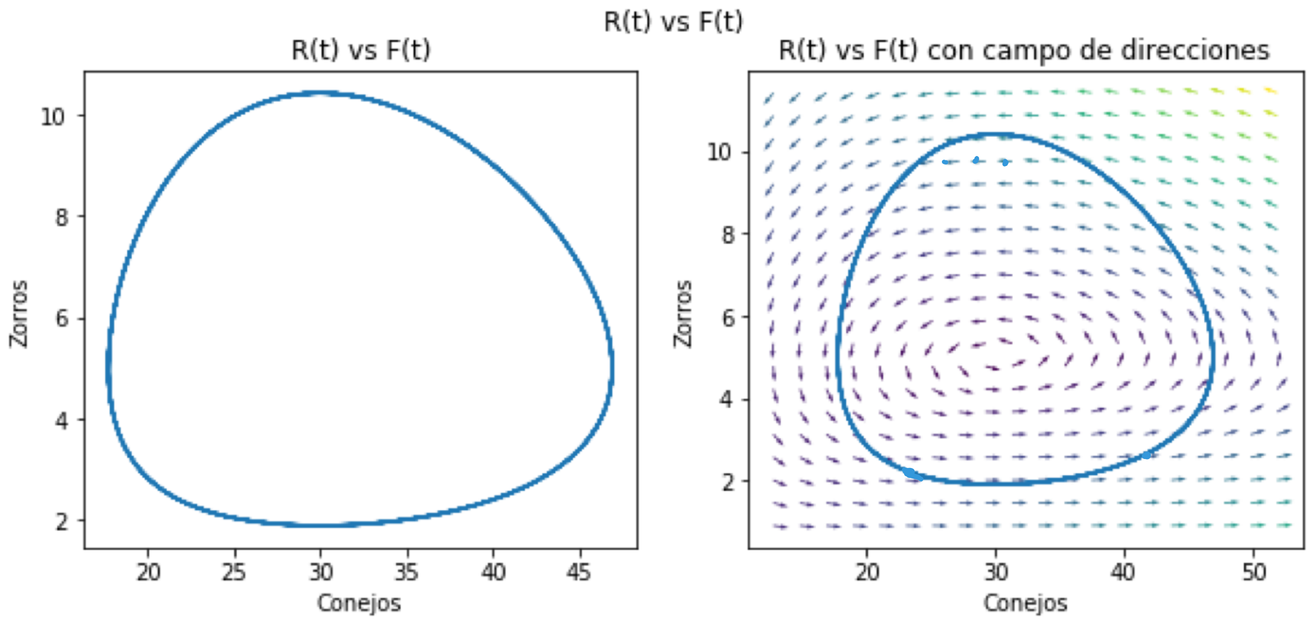


Diagrama de flujo
3*x+y-log(y*x**3)
6
5
4.35
x
y


R(t) vs F(t)
R(t) vs F(t)
R(t) vs F(t) con campo de direcciones
Zorros
Conejos
Zorros
Conejos
10
8
6
4
2
20
25
30
35
40
45
10
8
6
4
2
20
30
40
50

Modelo conejos y ovejas

$x(t)$: población de conejos al tiempo t

$y(t)$: población de ovejas al tiempo t

$$\dot{x} = x(3 - x - 2y)$$
$$\dot{y} = y(2 - x - y)$$

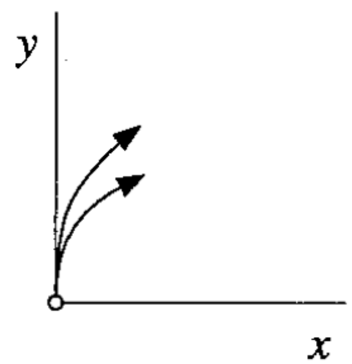
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}.$$

Puntos fijos : $(0,0)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(1,1)$.

$(0,0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 2$



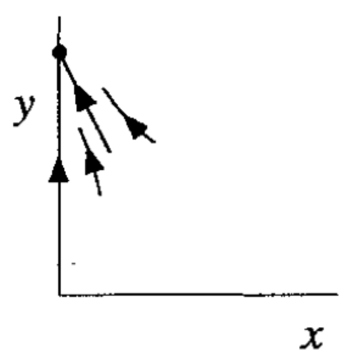
$(0,2)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = -1, -2$

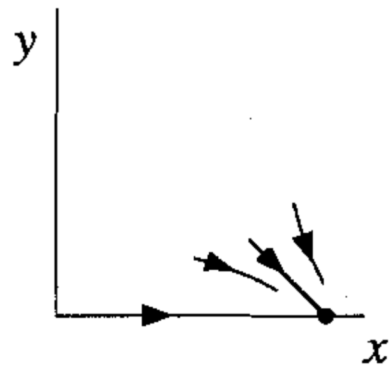
$\bar{v}_1 = (1, -2)$

$\bar{v}_2 = (0, 1)$



$(3,0)$:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 0 & -1\end{pmatrix};\qquad \lambda=-3,-1$$

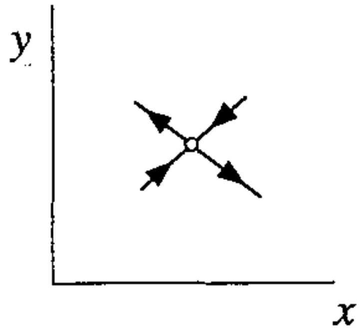


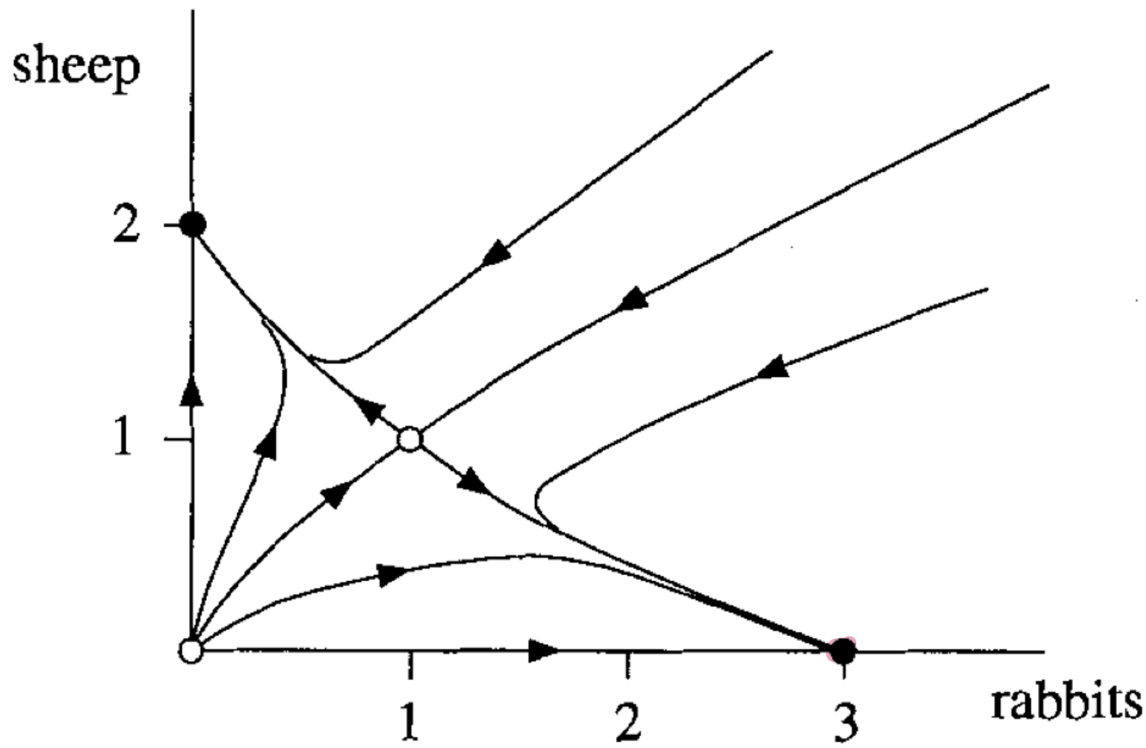
$\bar{v}_1 = (3,1)$

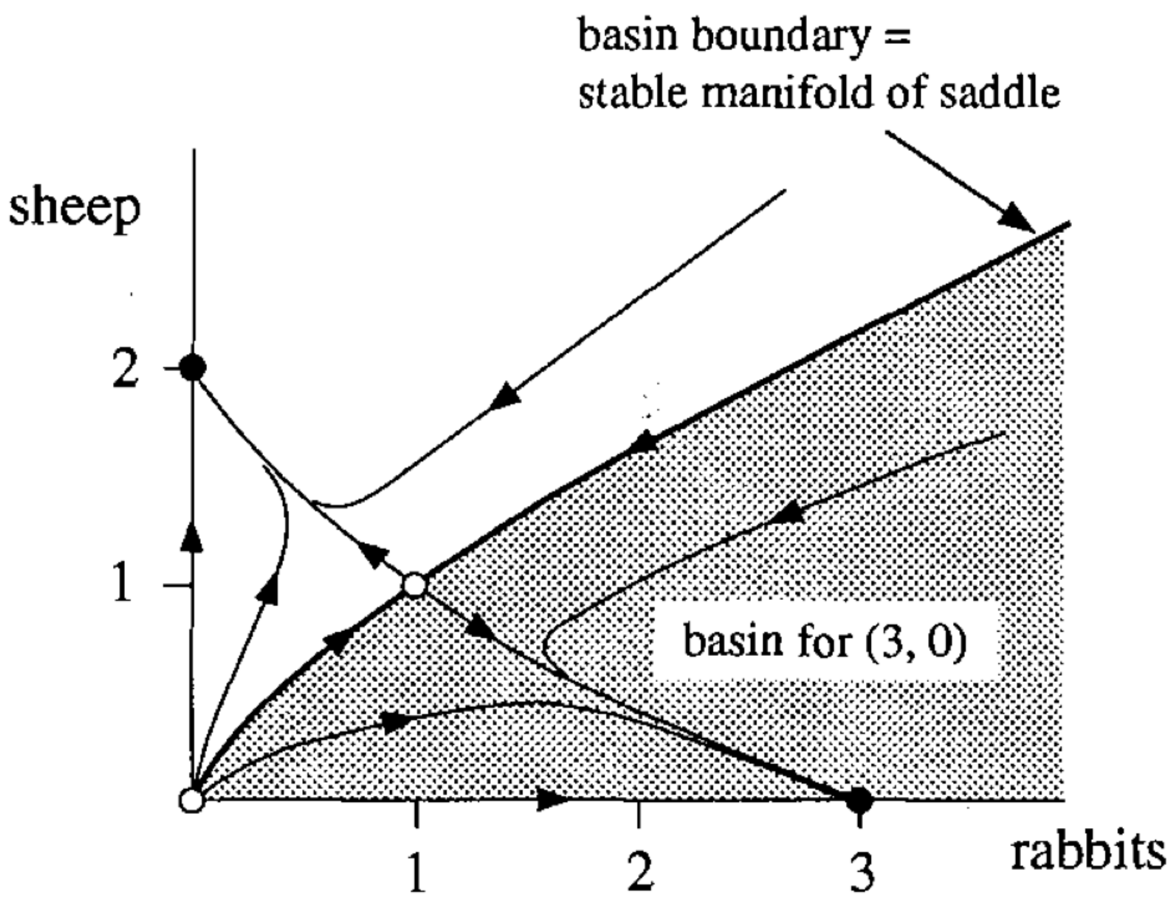
$\bar{v}_2 = (1,0)$

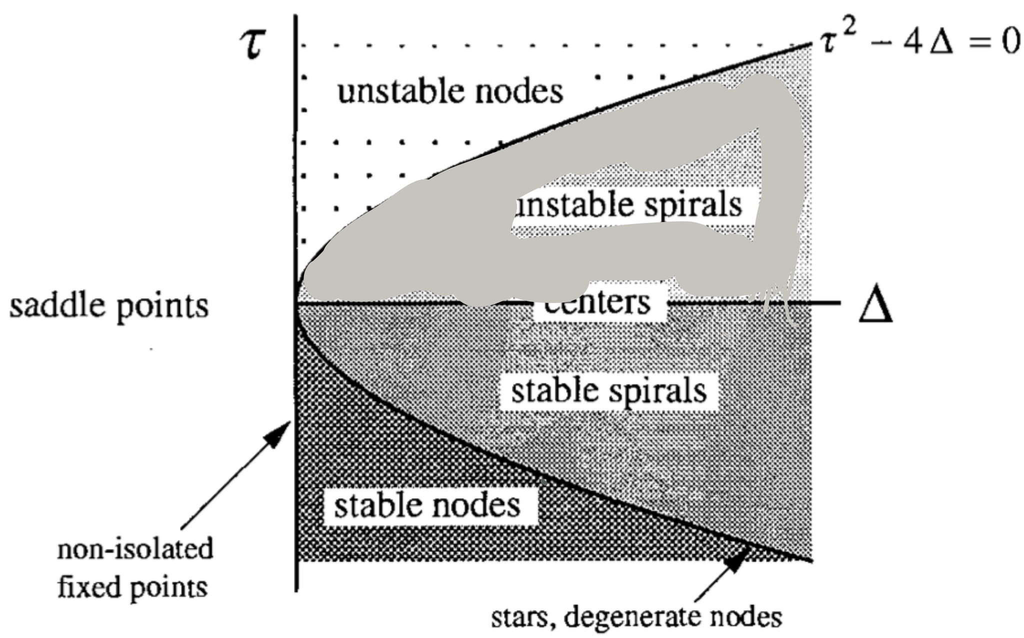
$(1,1)$:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\qquad \lambda=-1\pm\sqrt{2}\,.$$




sheep
2
1
1
2
3
rabbits


basin boundary =
stable manifold of saddle
sheep
2
1
basin for (3, 0)
1
2
3
rabbits

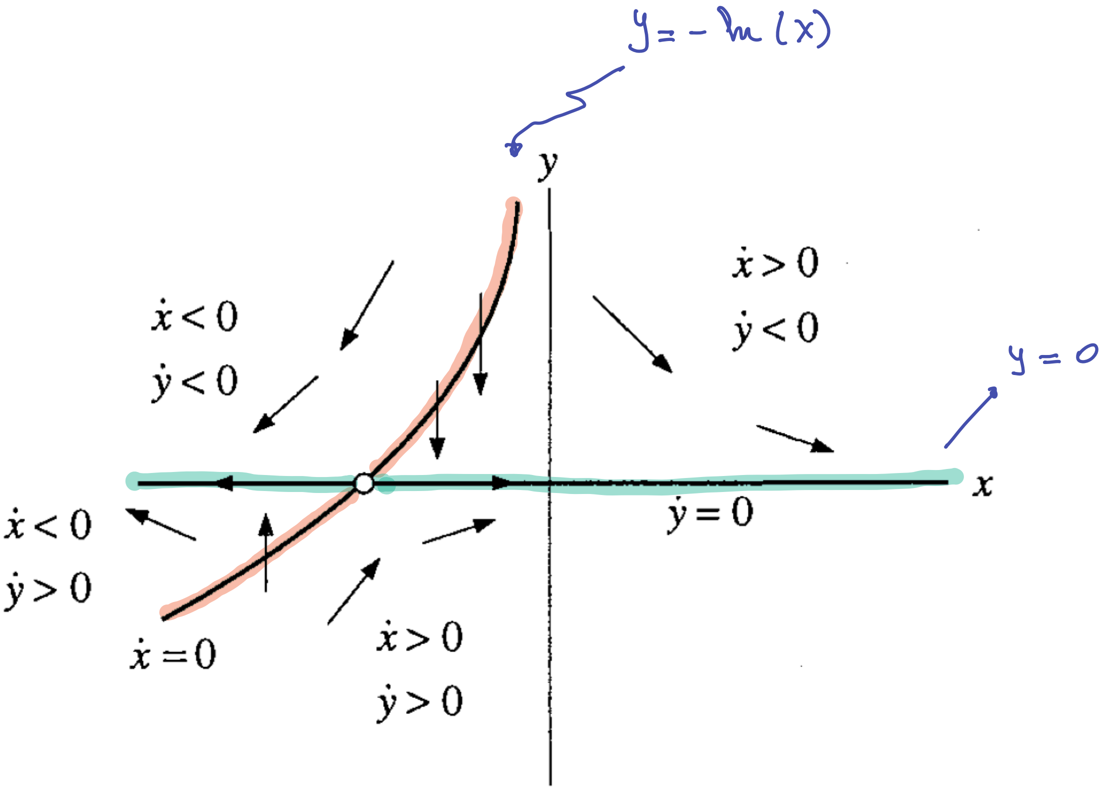


$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}\right), \qquad \Delta = \lambda_1 \lambda_2 , \qquad \tau = \lambda_1 + \lambda_2 .$$

$$\dot{x} = x + e^{-y},$$

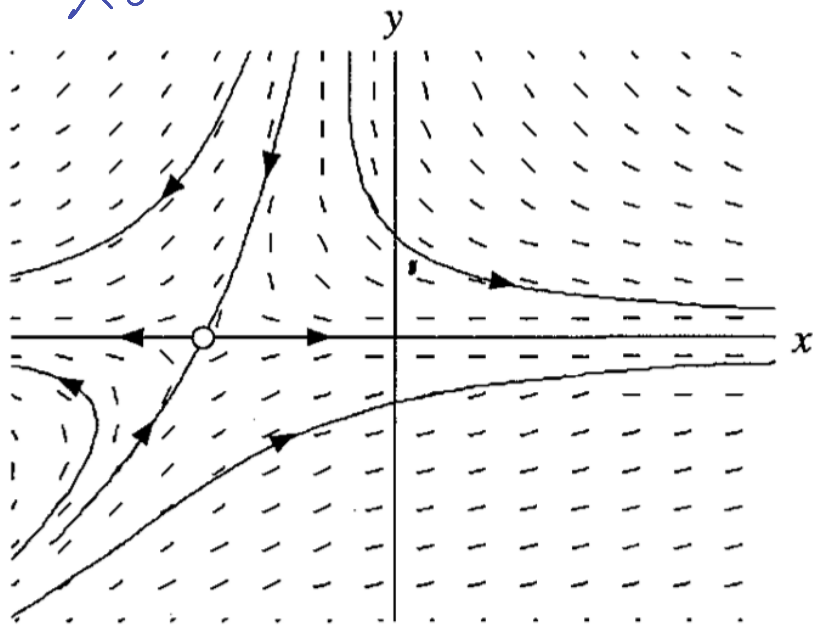
$$\dot{y} = -y.$$

$$(x^*, y^*) = (-1, 0).$$



$\dot{x} < 0$
$\dot{y} < 0$

$\dot{x} < 0$
$\dot{y} > 0$



$\dot{x} > 0$
$\dot{y} < 0$

$\dot{x} > 0$
$\dot{y} > 0$

EJEMPLO 1

$\ln(x) = -y$

$y = -\ln(x)$

$\dot{x} = x$

$\dot{y} = -$

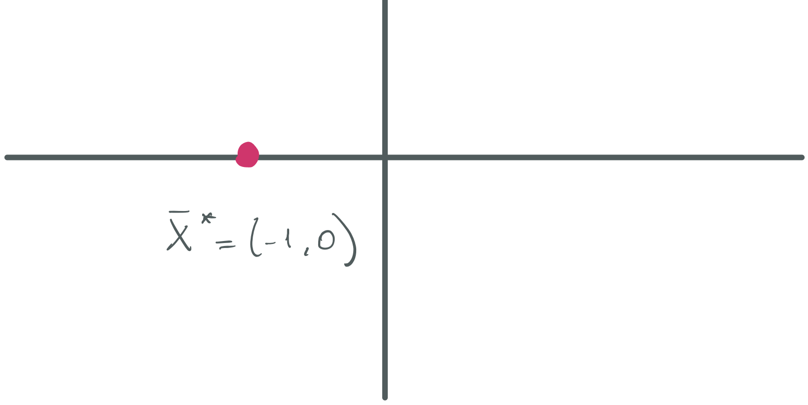
luego el umx+ ... $= 0$

Punto fijo:

$(x^*, y^*) = (-1, 0)$

$y = 0 \Rightarrow x + e^{-0} = x + 1 = 0$

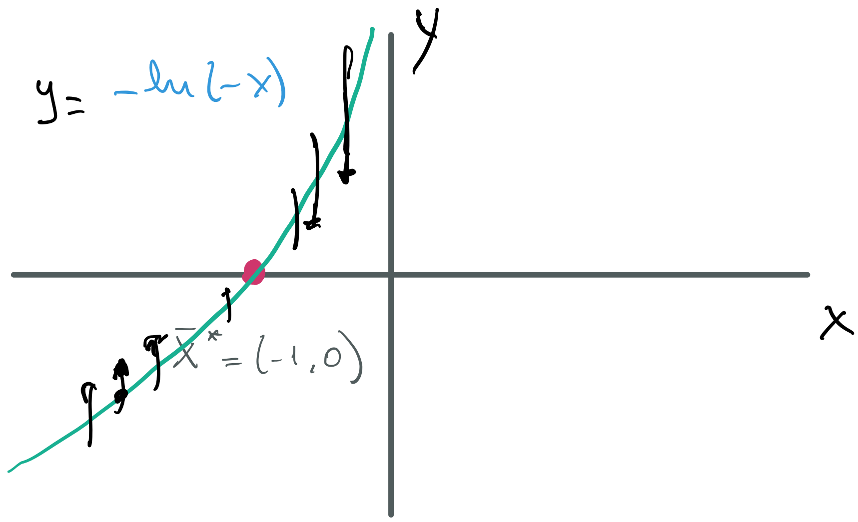
punto ... es



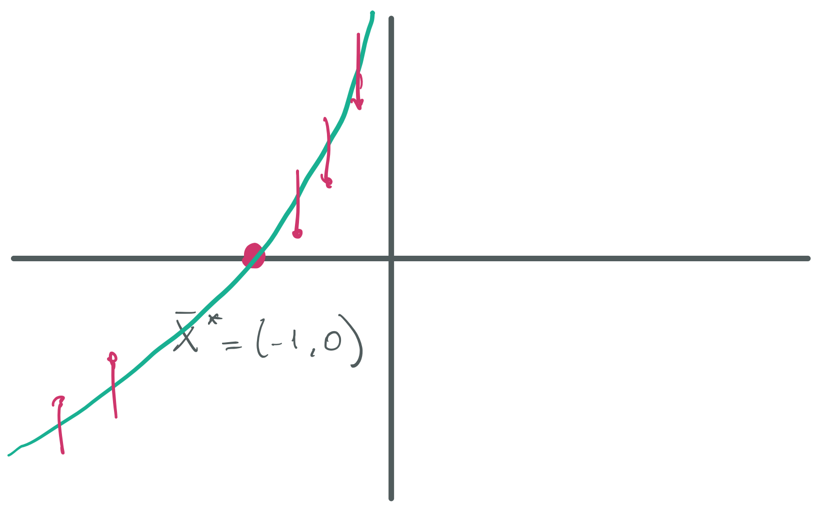
Nullclines: curvas $\dot{x} = 0$ ó $\dot{y} = 0$

$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = -e^{-y}$ $\qquad \ln(-x) = \ln(e^{-y}) = -y$

$y = -\ln(-x)$



Sobre esta curva el flujo es vertical pues $\dot{x} = 0$



La otra curva nullcline es

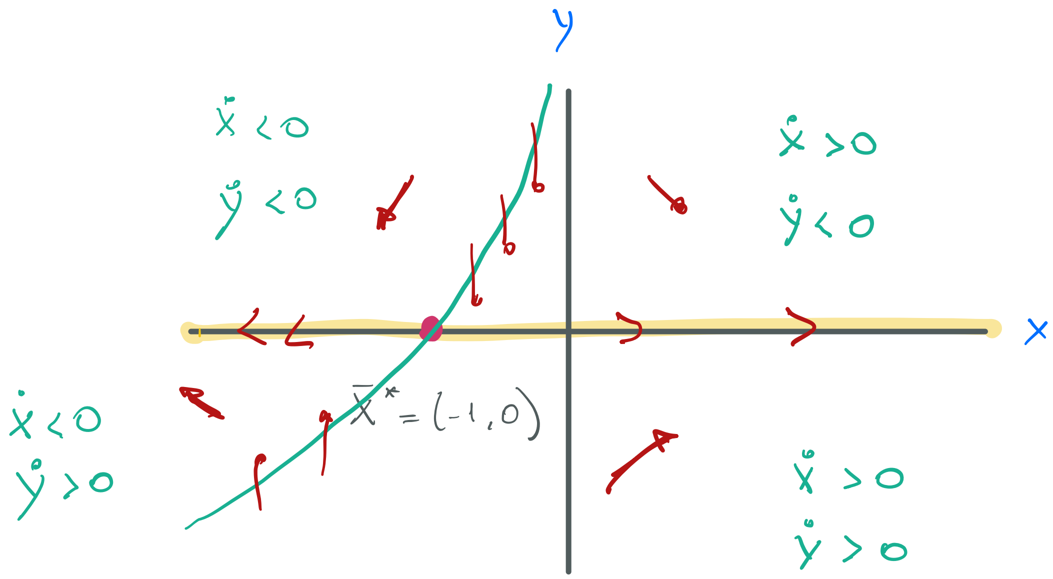
$\dot{y} = 0 \Rightarrow y = 0$

x

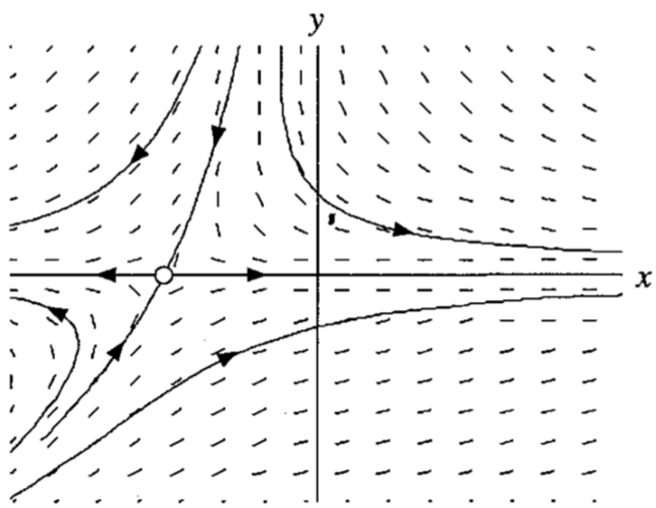
— ,0

$y = 0$

Juntando



$(-\infty, 0)$



$(+\infty, 0)$

Diagrama de campo

Teorema de existencia y unicidad

Consideremos el problema de valor inicial

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \qquad \bar{x}(0) = \bar{x}$$

Supongamos que f y g, que forman $\bar{f}$:

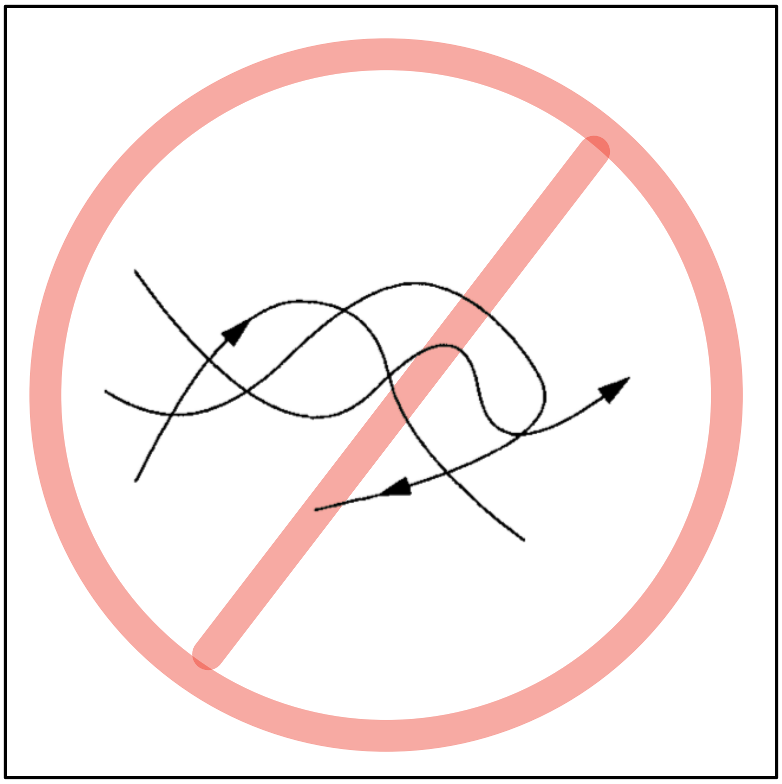
$$\bar{f} = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_N(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

son continuas y todas sus derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i=1,2,\dots,N)$ son también continuas en un entorno abierto

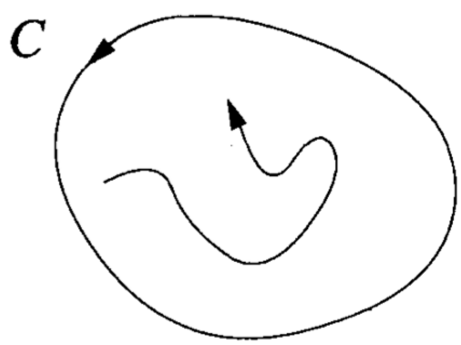
$D \subset \mathbb{R}^n$.

Entonces para $\bar{x}_0 \in D$, el problema de valor inicial tiene una solución $x(t)$ en cierto intervalo $(-\tau, \tau)$ y además la solución es única.

En pocas palabras, 2 soluciones diferentes (diferentes trayectorias) nunca se cruzan. Si pueden converger a un punto fijo, pero sin cruzarse



Si tenemos una órbita cerrada, nos delimita el interior del exterior

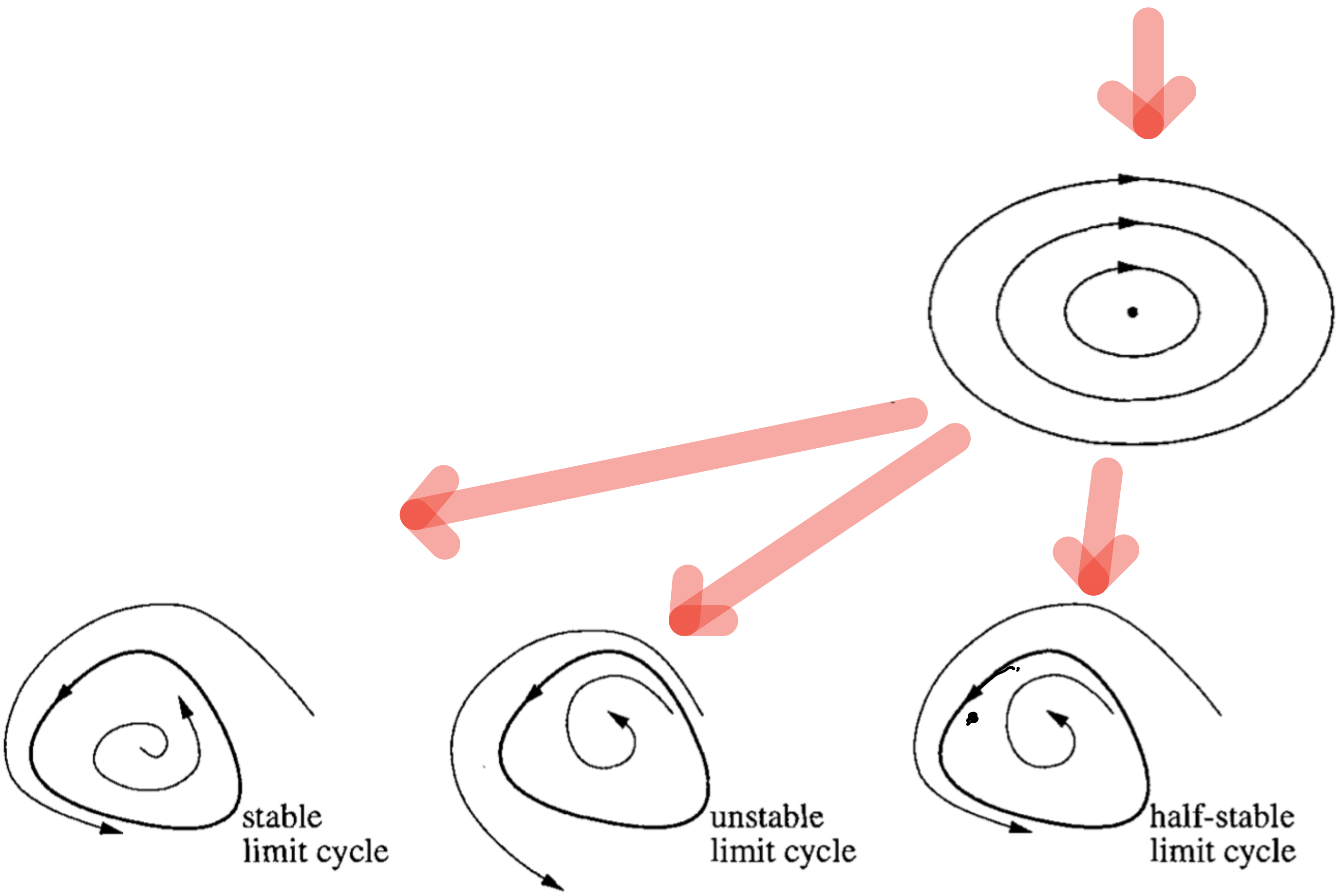


¿Qué pasa con un centro $(\mathrm{Re}(\lambda)=0)$ cuando nos alejamos del límite de validez lineal?

Los centros se transforman

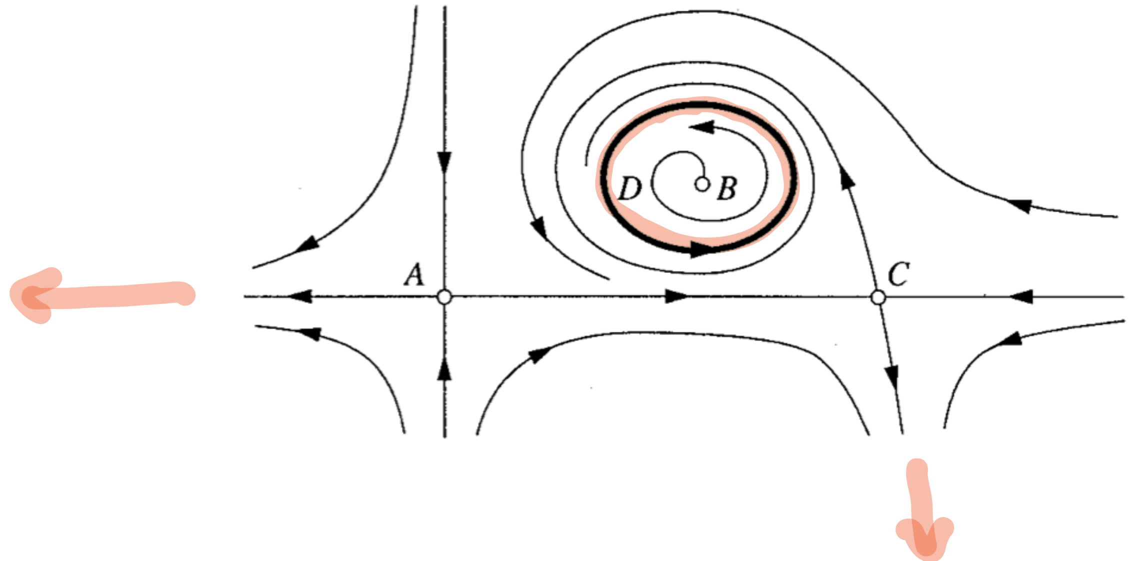
Casos robustos versus Casos marginales

$\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$ $\qquad$ $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$



Los centros se convierten (no siempre) en ciclos límite

Un ejemplo ficticio



Notemos que para $t \to \infty$ el sistema se va a infinito o a un ciclo límite D