Representaciones del grupo de Heisenberg

Esther Galina

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
11/07/2008

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Estas notas son parte de un curso dictado por profesores de FAMAF en la Universidad del Noroeste, en la ciudad de Corrientes, en el primer semestre de 2008. Esta parte del curso es la referida al análisis armónico en el grupo de Heisenberg.

Las siguientes palabras de Kirillov en [K2] dan una buena razón para estudiar representaciones de grupos:

El análisis armónico en el sentido más general puede ser definido como el aparato matemático aplicable al estudio y uso de las simetrías en el mundo que nos rodea y en sus modelos matemáticos. Como regla, las simetrías son descriptas en términos de transformaciones de grupos y el análisis armónico es el estudio de las correspondientes representaciones de grupos.

Efectivamente, los grupos son objetos algebraicos abstractos que satisfacen ciertas reglas. En el mundo real sólo podemos reconocer que existen simetrías en el mismo. El desarrollo matemático permitió ver esas simetrías como el reflejo de la acción de un grupo en ese espacio, es decir como una representación del grupo. Un mismo grupo puede dar lugar a diferentes simetrías, es por ello que se estudian las diversas representaciones, y en especial las irreducibles, pues no se pueden expresar en términos de otras no equivalentes.

El grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n$ es un grupo de Lie conexo y simplemente conexo, dos pasos nilpotente, de dimensión $2n+1$ y con centro Z de dimensión 1 sobre $\mathbb{R}$. Esto lo hace el grupo no conmutativo y no compacto más simple posible. Su nombre y su significado en la mecánica cuántica proviene del hecho que su álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ está definida por las relaciones canónicas de conmutación de Heisenberg. Este grupo tiene además la propiedad que toda representación unitaria de dimensión finita es trivial en el centro, y como $\mathbb{H}_n/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}^{2n}$, se factoriza a una representación del grupo abeliano cociente. Esto dice que estas representaciones no distinguen todos los puntos del grupo y que no aportan elementos nuevos a los ya conocidos del análisis armónico de $\mathbb{R}^{2n}$.

La idea de estas notas es analizar el grupo de Heisenberg, estudiar sus representaciones, clasificar las representaciones unitarias irreducibles y presentar el análogo a la teoría de Fourier para este grupo.

El grupo de Heisenberg tiene aplicaciones en diversas áreas de la matemática, la física teórica, la teoría de códigos y señales digitales, como así también en la ingeniería eléctrica.

Capítulo 2

Construcción del grupo de Heisenberg

Una de las formas en que se obtuvo el grupo de Heisenberg fue en el intento de construir el grupo de operadores unitarios sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ generado por el grupo de translaciones de dimensión n

$$\tau_p f(x) = f(x+p) \qquad \text{con } p \in \mathbb{R}^n$$

y por el grupo de dimensión n dado por las siguientes multiplicaciones

$$\mu_q f(x) = e^{i<q,x>} f(x) \qquad \text{con } q \in \mathbb{R}^n$$

Veremos que este grupo así obtenido es un grupo de dimensión $2n+1$. Es un grupo de Lie, pero no nos detendremos en detalles de esta propiedad. El *grupo de Heisenberg* $\mathbb{H}_n$ será el grupo simplemente conexo que lo cubre, su cubrimiento universal.

Los generadores infinitesimales, o derivadas en la dirección correspondiente, de los operadores definidos arriba son

$$\frac{d}{dt}\tau_{tp} f(x))\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x+tp)\bigg|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = i < p, D > f(x)$$

donde $D = -i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Análogamente,

$$\frac{d}{dt}\mu_{tq} f(x)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{it<q,x>} f(x))\bigg|_{t=0} = i \sum_{j=1}^{n} q_j x_j f(x) = i < q, X > f(x)$$

donde $X = (m_{x_1}, \dots, m_{x_n})$ y m_{x_i} es multiplicar por x_i.

Dado T un operador lineal que deja invariante el espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto de $\mathbb{R}^n$, podemos definir formalmente el operador lineal

$$e^T f = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n f$$

Como el espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$, T se enxtiende en forma única a $L^2(\mathbb{R}^n)$ y e^T está bien definido sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Notemos que tanto τ_p como μ_q preservan el espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esto permite que los operadores $< p, D >$ y $< q, X >$ definidos en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ se puedan extender en forma única a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, podríamos escribir a los generadores del grupo de Heisenberg por

$$\tau_p = e^{i<p,D>} \qquad\qquad \mu_q = e^{i<q,X>}$$

pues ambos términos de las igualdades definen el mismo operador infinitesimal.

Analicemos la estructura de $\mathbb{H}_n$ comparando las composiciones $\tau_p\mu_q$ y $\mu_q\tau_p$.

$$\tau_p\mu_q f(x) = (\mu_q) f(x+p) = e^{i<q,x+p>} f(x+p) = e^{i<q,p>} e^{i<q,x>} f(x+p)$$

y

$$\mu_q\tau_p f(x) = e^{i<q,x>}(\tau_q) f(x) = e^{i<q,x>} f(x+p)$$

Comparando ambos resultados tenemos que

$$e^{i<p,D>} e^{i<q,X>} = e^{i<q,p>} e^{i<q,X>} e^{i<p,D>}$$

conocidas como las relaciones de conmutación de Weyl. Las identidades

$$[< p,D >, < q,X >] =< p,D >< q,X > - < q,X >< p,D >=< p,q > I$$

son llamadas las relaciones de conmutación de Heisenberg.

De esto se deduce que el grupo generado por los operadores de translación y multiplicación consiste de todos los operadores de la forma

$$e^{it} e^{i<q,X>} e^{i<p,D>}, \qquad\qquad p,q \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}$$

Pero preferimos expresarlos en términos de los operadores

$$e^{i(t+<q,X>+<p,D>)}$$

Proposición 2.1. *El operador* $e^{i(t+<q,X>+<p,D>)}$ *deja invariante a* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y satisface*

$$e^{i(t+<q,X>+<p,D>)}f(x) = e^{i(t+<q,x>+\frac{1}{2}<p,q>)}f(x+p)$$

o equivalentemente

$$e^{i(t+<q,X>+<p,D>)} = e^{i(t+\frac{1}{2}<p,q>)}e^{i<q,X>}e^{i<p,D>}$$

Más aún, para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$*,*

$$F(t,p,q)(x) = e^{i(t+<q,X>+<p,D>)}f(x)$$

es una función continua en (t,p,q) *con valores en* $L^2(\mathbb{R}^n)$*.*

Demostración. Verificaremos la fórmula planteada, para ello definamos el operador $A = t+ < q,X > + < p,D >$. Si $v(s,x) = e^{isA}f(x)$, tenemos que

$$\frac{d}{ds}v(s,x) = iAv(s,x) = \left(i(t+ < q,x >) + \sum p_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) f(x)$$

es decir, v satisface el problema de valores iniciales

$$\left(\frac{d}{ds} - \sum p_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) v = i(t+ < q,x >)v, \qquad v(0,x) = f(x)$$

Para resolver este problema de valores iniciales integramos sobre las curvas integrales de $\frac{d}{ds} - \sum p_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, y obtenemos

$$v(s,x) = e^{i(st+s<q,x>+s^2\frac{1}{2}<p,q>)}f(x+sp)$$

Valuando en $s = 1$ tenemos el resultado esperado.

Es claro que esta familia de operadores deja invariante al espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ la función F definida arriba. Si

$$V(t,q,p) = e^{i(t+<q,X>+<p,D>)}$$

tenemos que

$$F(t,q,p) = V(t,q,p)f$$

donde $V(t,q,p)$ es claramente un operador unitario en $L^2(\mathbb{R}^n)$ para cada $(t,q,p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es suficiente probarlo para $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, lo cual es evidente por ser $V(t,q,p)f = e^{i(t+<q,x>+\frac{1}{2}<p,q>)}f(x+p)$. $\square$

Usando el resultado anterior junto la fórmula de conmutación, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&e^{i(t_1+<q_1,X>+<p_1,D>)}e^{i(t_2+<q_2,X>+<p_2,D>)} = \\
&= e^{i(t_1+\frac{1}{2}<q_1,p_1>)}e^{i<q_1,X>}e^{i<p_1,D>}e^{i(t_2+\frac{1}{2}<q_2,p_2>)}e^{i<q_2,X>}e^{i<p_2,D>)} \\
&= e^{i(t_1+\frac{1}{2}<q_1,p_1>+t_2+\frac{1}{2}<q_2,p_2>)}e^{i<q_2,p_1>}e^{i<q_1+q_2,X>}e^{i<p_1+p_2,D>} \\
&= e^{i(t_1+\frac{1}{2}<q_1,p_1>+t_2+\frac{1}{2}<q_2,p_2>+<q_2,p_1>)}e^{i(-\frac{1}{2}<p_1+p_2,q_1+q_2>+<q_1+q_2,X>+<p_1+p_2,D>)} \\
&= e^{i(t_1+t_2+\frac{1}{2}<q_2,p_1>-\frac{1}{2}<q_1,p_2>+<q_1+q_2,X>+<p_1+p_2,D>)}
\end{aligned}
$$

Esto nos permite definir el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n$. Denotemos los puntos de $\mathbb{H}_n$ por (t,q,p) con $t \in \mathbb{R}$, $q,p \in \mathbb{R}^n$. Definamos el producto de estos elementos de la siguiente manera,

$$
(t_1,q_1,p_1)(t_2,q_2,p_2) = (t_1+t_2+\frac{1}{2}<p_1,q_2> - \frac{1}{2}<p_2,q_1>, q_1+q_2, p_1+p_2)
$$

Ejercicio 2.1. a) Probar que realmente $\mathbb{H}_n$ es un grupo con la operación dada e identidad $0 = (0,0,0)$ e inverso de (t,q,p) igual a $(-t,-q,-p)$.

b) Probar que el producto y la inversión son funciones C^∞ como funciones de

$$
\cdot : \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1} \qquad (\ )^{-1} : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}
$$

Los resultados del ejercicio hacen de $\mathbb{H}_n$ un grupo de Lie.

Ejercicio 2.2. Probar que los siguientes grupos son isomorfos.

1. $\mathbb{H}_n$;

2. el subgrupo N de matrices $(n+2)\times(n+2)$ del tipo

$$
n(t,q,p) = \begin{pmatrix} 1 & q^T & t \\ 0 & I_n & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

donde $q,p \in \mathbb{R}^n$, con el producto usual de matrices;

3. el subgrupo $\tilde{N}$ de matrices $(n+2)\times(n+2)$ del tipo

$$
g(z,t) = \begin{pmatrix} 1 & z^* & \frac{1}{2}z^*z+it \\ 0 & I_n & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

donde $z \in \mathbb{C}^n$ y z^* es el vector fila transpuesto conjugado a z, con el producto usual de matrices.

Ejercicio 2.3. Probar que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{H}_n$ es invariante a izquierda y a derecha por el producto dado. Por lo tanto la medida de Lebesgue da una medida de Haar en $\mathbb{H}_n$ resultando unimodular.

Denotaremos un campo vectorial X en $\mathbb{H}_n$ por

$$X = a\frac{\partial}{\partial t} + b_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + b_n\frac{\partial}{\partial x_n} + c_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + c_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

Definición 2.2. Un campo vectorial de $\mathbb{H}_n$ se dice *invariante a izquierda* por el producto de $\mathbb{H}_n$ si

$$DL_{(t,q,p)}X\big|_{(s,v,w)} = X|_{L_{(t,q,p)}(s,v,w)} = X|_{(t,q,p)(s,v,w)}$$

donde $L_{(t,q,p)}(s,v,w) = (t,q,p)(s,v,w)$ y $DL_{(t,q,p)}$ es el diferencial de $L_{(t,q,p)}$.

Definición 2.3. Un *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ con una operación bilineal

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $[X,Y] = -[Y,X]$ para todo $X,Y \in \mathfrak{g}$,
2. $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$ para todo $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$.

Es sabido que todo grupo de Lie tiene asociada un álgebra de Lie, el álgebra generada por los campos invariantes a izquierda del grupo con el corchete de campos vectoriales. Veremos que significa esto para el grupo $\mathbb{H}_n$.

Sea $\mathfrak{h}$ el espacio vectorial generado por los campos vectoriales

$$T = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad L_j = \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{1}{2}p_j\frac{\partial}{\partial t}, \qquad M_j = \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{1}{2}q_j\frac{\partial}{\partial t}, \qquad 1 \le j \le n$$

Ejercicio 2.4. Probar que estos son campos invariantes a izquierda y que el corchete definido por el conmutador

$$[X,Y] = XY - YX \qquad X,Y \in \mathfrak{h}$$

convierte a $\mathfrak{h}$ en un álgebra de Lie. En particular ver que

$$[L_j, M_j] = T = -[M_j, L_j] \qquad 1 \le j \le n$$

y que el resto de los corchetes entre los elementos de la base de $\mathfrak{h}$ son nulos.

Recordemos que obtuvimos el grupo $\mathbb{H}_n$ como el generado por los operadores τ_p y μ_q.

Ejercicio 2.5. Probar que los siguientes operadores Q_j, P_j y C, $1 \leq j \leq n$, también generan $\mathfrak{h}$, donde

$$(Q_j f)(x) = ix_j f(x), \qquad (P_j f)(x) = i\frac{\partial}{\partial x_j} f(x), \qquad (Cf)(x) = if(x)$$

y satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[Q_j, P_j] = C = -[P_j, Q_j]$$

y el resto de los corchetes iguales a 0.

Ejercicio 2.6. a) Probar que $\mathfrak{h}$ es isomorfo como espacio vectorial al espacio $\mathfrak{n}$ de matrices $(n+2) \times (n+2)$ del tipo

$$N(t, q, p) = \begin{pmatrix} 0 & q^T & t \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $q, p \in \mathbb{R}^{n-2}$, con el producto usual de matrices.

b) Probar que $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{n}$ son isomorfas como álgebras de Lie, es decir son isomorfas como espacios vectoriales y además, si ϕ es el isomorfismo satisface la siguiente relación entre los corchetes de las álgebras de Lie dadas,

$$\phi([X, Y]_{\mathfrak{h}}) = [\phi(X), \phi(Y)]_{\mathfrak{n}}$$

Ejercicio 2.7. a) Probar que todo elemento del álgebra de Lie del grupo de Heisenberg es nilpotente. Esto justifica que se diga que el grupo de Heisenberg es un grupo de Lie *nilpotente*.

b) Probar que $Z = \{(t, 0, 0) \in \mathbb{H}_n : t \in \mathbb{R}\}$ es el centro de $\mathbb{H}_n$.

Capítulo 3

Representaciones de $\mathbb{H}_n$

Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad & \mathbb{H}_n \to U(L^2(\mathbb{R}^n)) \quad \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)) \\ (t,q,p) & \to \pi_1(t,q,p) = e^{i(t+<q,X>+<p,D>)} \end{aligned}$$

sobre el subgrupo de operadores lineales unitarios sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ a partir de los operadores lineales definidos en el capítulo anterior.

Ejercicio 3.1. Usando los resultados de la Proposición 2.1, probar que $(\pi_1, L^2(\mathbb{R}^n))$ es una representación unitaria del grupo de Heisenberg. Es decir, probar que π_1 es un homomorfismo de grupos y que para cada $(t,q,p) \in \mathbb{H}_n$ las aplicaciones $(t,q,p) \to \pi_1(t,q,p)f$ sean continuas para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ o sea que π_1 sea fuertemente continua.

En realidad la forma en que construímos el grupo de Heisenberg en el capítulo anterior fue a partir de la representación π_1. Es decir, a partir de los problemas de la física cuántica se observó esta representación, entonces como abstracción matemática se obtuvo $\mathbb{H}_n$ y a lo observado como una representación del mismo.

Sabemos que las representaciones irreducibles juegan un papel fundamental en la descripción de las representaciones. En el caso de grupos finitos o compactos toda representación se descompone como suma de representaciones irreducibles. No siendo el caso en general para grupos no compactos. Recordemos que una representación (π, V) es *irreducible* si los únicos subespacios cerrados invariantes de V son V y 0.

Veamos qué podemos decir de la representación π_1. Para ello probaremos el siguiente lema.

Teorema 3.1. *La representación $(\pi_1, L^2(\mathbb{R}^n))$ es una representación unitaria irreducible de $\mathbb{H}_n$.*

Demostración. Supongamos que π_1 no es irreducible, por ser unitaria tiene un complemento ortogonal en $L^2(\mathbb{R}^n)$. En efecto, sea W un subespacio invariante cerrado propio de $L^2(\mathbb{R}^n)$ y sea $W^\perp$ su complemento ortogonal. Por ser W invariante, $(\pi_1|_W, W)$ es una subrepresentación de $\mathbb{H}_n$ donde $\pi_1|_W(g) = \pi_1(g)|_W$. Si $v \in W^\perp$,

$$< \pi_1(g)v, w >_{L^2} = < v, \pi_1(g^{-1})w >_{L^2} = 0 \qquad \forall w \in W$$

Eso significa que $(\pi_1|_{W^\perp}, W^\perp)$ también es subrepresentación de π_1 y que $\pi_1 = \pi_1|_W \oplus \pi_1|_{W^\perp}$.

Sea $w \in W$ y $v \in W^\perp$. Como para todo $q, p \in \mathbb{R}^n$,

$$0 = < \pi_1(0, q, p)w, v >_{L^2} = \int e^{i<q,x>} w(x+p)\overline{v(x)}\, dx$$

tenemos que para cada $p \in \mathbb{R}^n$, la transformada de Fourier de $w(x+p)\overline{v(x)}$ es el elemento de $L^1(\mathbb{R}^n)$ identicamente nulo. Esto implica que $w(x+p)\overline{v(x)} = 0$ para casi todo x, es decir que si $v(x) \neq 0$ en un conjunto de medida positiva, $w = 0$ para casi todo x. Por lo tanto, $W = 0$. Es decir que π_1 es irreducible. $\square$

Construyamos otras representaciones de $\mathbb{H}_n$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ modificando un poco la representación π_1. Observemos que para cada $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \delta_{\pm\lambda} : \quad & \mathbb{H}_n \to \mathbb{H}_n \\ & (t, q, p) \to (\pm\lambda t, \pm\lambda^{1/2} q, \lambda^{1/2} p) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos. Por lo tanto, cada $\delta_{\pm\lambda}$ es un automorfismo de $\mathbb{H}_n$. Esto nos permite definir

$$\pi_{\pm\lambda}(t, q, p) = \pi_1(\delta_{\pm\lambda}(t, q, p)) = \pi_1(\pm\lambda t, \pm\lambda^{1/2} q, \lambda^{1/2} p) \tag{3.1}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \pi_{\pm\lambda}(t, q, p) f(x) &= e^{i(\pm\lambda t \pm \lambda^{1/2} <q,X> + \lambda^{1/2} <p,D>)} f(x) \\ &= e^{i(\pm\lambda t \pm \lambda^{1/2} <q,x> + \frac{\lambda}{2} <q,p>)} f(x + \lambda^{1/2} p) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ejercicio 3.2. a) Probar que para cada $\lambda > 0$, $(\pi_{\pm\lambda}, L^2(\mathbb{R}^n))$ es una representación irreducible de $\mathbb{H}_n$.

b) Probar que $\pi_{\pm\lambda}$ es unitariamente equivalente a $\tilde{\pi}_{\pm\lambda}$ donde

$$\tilde{\pi}_{\pm\lambda}(t, q, p) = e^{i(\pm\lambda t + \pm\lambda <q,X> + <p,D>)}$$

es decir que existe un operador de entrelazamiento $U : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n))$ tal que $U\pi_\lambda(t, q, p)U^{-1} = \tilde{\pi}_\lambda(t, q, p)$ para todo $(t, q, p) \in \mathbb{H}_n$.

Veamos que las representaciones del grupo de Heisenberg que son triviales cuando las restrigimos al centro se corresponden con las representaciones de $\mathbb{R}^{2n}$.

Proposición 3.2. *Sea (π, V) una representación de $\mathbb{H}_n$, su restricción $\pi|_Z$ al centro de $\mathbb{H}_n$ es es trivial si y sólo si $(\tilde{\pi}, V)$ es una representación de $\mathbb{R}^{2n}$ donde $\tilde{\pi}(q, p) = \pi(0, q, p)$ para todo $q, p \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Si vemos a $\mathbb{R}^{2n}$ como el subgrupo cerrado $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{H}_n$, tenemos que la restricción a ese grupo de π es una representación del mismo, y esa no más que $\tilde{\pi}$.

Recíprocamente, si definimos $\pi(t, q, p) = \tilde{\pi}(q, p)$ para todo $(t, q, p) \in \mathbb{H}_n$, es fácil ver que define una representación de $\mathbb{H}_n$ sobre V y que $\pi(t, 0, 0) = \tilde{\pi}(0, 0) = 1$. □

Esto nos dice que las representaciones unitarias irreducibles del grupo de Heisenberg están en correspondencia con las del mismo tipo de $\mathbb{R}^{2n}$, por lo tanto son de dimensión 1. Estas están parametrizadas por $(\nu, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$ de la siguiente manera,

$$\pi_{(\nu,\eta)}(t, q, p) = e^{i(<\nu,q>+<\eta,p>)} \tag{3.3}$$

Proposición 3.3. *Las representaciones de $\mathbb{H}_n$ del tipo π_λ y $\pi_{(\nu,\eta)}$, dadas por 3.1 y 3.3, son dos a dos unitariamente no equivalentes.*

Demostración. Un argumento de dimensiones descarta que puedan ser equivalentes representaciones del tipo 3.1 a una del tipo 3.3.

Es fácil ver que si $(\nu, \eta) \neq (\nu', \eta')$, dos representaciones del tipo $\pi_{(\nu,\eta)}$ y $\pi_{(\nu',\eta')}$ son unitariamente no equivalentes por ser escalares, ya que si lo fueran tendrían que ser iguales como funciones de (q, p).

Veamos que si $\lambda \neq \lambda'$, no existe un operador de entrelazamiento unitario U tal que para todo $(t, q, p) \in \mathbb{H}_n$

$$U\pi_\lambda(t, q, p)U^{-1} = \pi_{\lambda'}(t, q, p)$$

En efecto, para $(t, 0, 0)$ la ecuación anterior se convierte en

$$Ue^{i\lambda t}U^{-1} = e^{i\lambda' t}$$

Como $e^{i\lambda t}$ es un escalar, eso implica que $e^{i\lambda t} = e^{i\lambda' t}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo tanto $\lambda = \lambda'$. Quedando así demostrada la proposición. □

Las representaciones π_λ son llamadas *representaciones de Schrödinger de* $\mathbb{H}_n$. De la demostración de la proposición anterior vemos que estas representaciones son no equivalentes si sus restricciones al centro $Z = \{(t,0,0) : t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{H}_n$ son no equivalentes.

El siguiente resultado es muy importate y nos permitirá dar el "desarrollo de Fourier" de una función sobre el grupo de Heisenberg. En general, este resultado no se conoce para cualquier grupo de Lie. Kirillov pudo resolver este problema para grupos de Lie nilpotentes a través del método de órbitas en 1962 [K1]. Este es un caso particular de ello, resuelto independientemente por Stone en 1930 y von Newman en 1931. Una demostración de este teorema puede encontrarse en [T].

Teorema 3.4. *(Stone, von Neumann) Every irreducible unitary representation of $\mathbb{H}_n$ es unitariamente equivalente a una representación de tipo π_λ o $\pi_{(\nu,\eta)}$.*

Observación 3.5. Las representaciones irreducibles unitarias no equivalentes de $\mathbb{H}_n$ se distinguen por su valor en el centro de $\mathbb{H}_n$.

Definición 3.6. Una representación (π, V) de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un homomorfismo

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathcal{E}\mathrm{nd}(V)$$

tal que

$$\pi([X,Y]) = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X)$$

Ejercicio 3.3. a) Probar que las representaciones $\pi_{\pm\lambda}$ definen representaciones del álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathbb{H}_n$ dadas por

$$\pi_{\pm\lambda}(aT + \sum b_j L_j + \sum c_j M_j) f = \frac{d}{ds}(e^{is(\pm\lambda a \pm \lambda^{1/2} <b,X> + \lambda^{1/2} <c,D>)} f)\Big|_{s=0}$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. En particular ver que

$$\pi_{\pm\lambda}(T) = \pm i\lambda, \qquad \pi_{\pm\lambda}(L_j) = \pm i\lambda^{1/2} x_j, \qquad \pi_{\pm\lambda}(M_j) = \lambda^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

b) Probar lo análogo para las representaciones $\pi_{(\nu,\eta)}$. En particular ver que

$$\pi_{(\nu,\eta)}(T) = 0, \qquad \pi_{(\nu,\eta)}(L_j) = i\nu_j, \qquad \pi_{(\nu,\eta)}(M_j) = i\eta_j$$

c) Obtener los valores de las representaciones de $\mathfrak{h}$ de (a) y (b) en Q_j, P_j y C definidos en el Ejercicio 2.5.

Capítulo 4

Análisis de Fourier en el grupo de Heisenberg

En la teoría de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$ las funciones $e^{i<x,\xi>}$ juegan un papel fundamental en el desarrollo de las funciones de decaimiento rápido, en particular para las de soporte compacto. Estas corresponden a todos los caracteres de las representaciones irreducibles unitarias no equivalentes de $\mathbb{R}^n$.

En el intento de generalizar esto para grupos no abelianos han visto la teoría de caracteres para grupos compactos y el teorema de Peter-Weyl que permite expresar cada $f \in L^2(G)$, G compacto, a través de una *serie de Fourier* en términos de los coeficientes matriciales de cada elemento de $\hat{G}$, el conjunto de representaciones irreducibles unitarias no equivalentes de G.

Ahora queremos analizar la situación del grupo $\mathbb{H}_n$. Como sabemos este grupo es el más sencillo de los no abelianos y es no compacto. En ese sentido, es tenemos que tener una expresión de la *fórmula de Plancherel*, de la *transformada de Fourier* y de la *fórmula de inversión* para $\mathbb{H}_n$. Para ello necesitamos algunas definiciones.

Definición 4.1. Un operador lineal $T : L^2(\mathbb{H}_n) \to L^2(\mathbb{H}_n)$ se dice que es un *operador traza* si su norma de Hilbert-Schmidt dada por $\|T\|_{HS}^2 = tr(T^*T)$ es finita.

Observemos que si T^*T es un operador compacto, $\|T\|_{HS}^2$ es exactamente la suma numerable de los autovalores de T^*T. Por lo tanto, si esa serie converge, T es un operador de Hilbert-Schmidt.

En analogía con lo que sucede en $\mathbb{R}^m$, podemos asociar a cada f una especie de *transformada de Fourier* que no es más que un operador lineal sobre el dual unitario de $\mathbb{H}_n$ dado por

$$\pi(f) = \int_{\mathbb{H}_n} f(g)\pi(g)\, dg$$

para cada representación irreducible unitaria π.

Se puede probar que los operadores $\pi_{\pm\lambda}(f)$ son operadores traza para toda $f \in L^2(\mathbb{H}_n)$ y todo $\lambda > 0$.

Teorema 4.2. *(Fórmula de Plancherel para el grupo de Heisenberg)*

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{H}_n} |f(g)|^2 \, dg = c_n \int_{-\infty}^{\infty} \|\pi_\lambda(f)\|_{HS}^2 |\lambda|^n \, d\lambda$$

Una demostración de este resultado se encuentra en el Capítulo 1 de [T].

Notemos que las representaciones de tipo $\pi_{\nu,\eta}$ no aparecen en la fórmula de Plancherel. Se dice que esas representaciones tienen medida de Plancherel nula.

Observemos que a partir de la fórmula dada para $\|f\|_2^2$ podemos dar la siguiente fórmula para el producto interno

$$\begin{aligned} < f, h >_2 &= \int_{\mathbb{H}_n} f(g)\overline{h(g)} \, dg \\ &= c_n \int_{-\infty}^{\infty} tr(\pi_\lambda(h)^* \pi_\lambda(f)) |\lambda|^n \, d\lambda \qquad (4.1) \\ &= c_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{H}_n} f(g) tr(\pi_\lambda(h)^* \pi_\lambda(g)) \, dg \, |\lambda|^n \, d\lambda \end{aligned}$$

Si reemplazamos la función h por una sucesión en $C_c^\infty(\mathbb{H}_n)$ que tienda a la función delta y tomando límite, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3. *(Fórmula de Inversión para el grupo de Heisenberg)*

$$f(g) = c_n \int_{-\infty}^{\infty} tr(\pi_\lambda(g)^* \pi_\lambda(f)) |\lambda|^n \, d\lambda$$

Bibliografía

[GKS] E. Galina, A. Kaplan y L. Saal, *Spinor types in infinite dimensions*, J. of Lie Theory 15, 457–495, 2005.

[K1] A. A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Russ. Math. Surv. 17, N. 4, 53–104, 1962.

[K2] A. A. Kirillov, *Representation theory and nonconmutative harmonic analysis I*, Enciclopedia of Mathematical Science vol. 2, Springer-Verlag, 1998.

[T] M. E. Taylor, *Nonconmutative harmonic analysis*, Mathematical Surveys and Monographs of AMS 22, 1986.

[VK] N. J. Vilenkin, A. U. Klimyk, *Representation of Lie groups and spetial functions*, Mathematics and its Applications vol. 74, Kluwer Academic Publishers, 1993.